Infiniti e infinitesimi

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X ***al finito***;
- x_0 punto di accumulazione per X ***all' infinito***.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X ***al finito***;
- x_0 punto di accumulazione per X ***all' infinito***.

Infiniti ed infinitesimi

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X ***al finito***;
- x_0 punto di accumulazione per X ***all' infinito***.

Infiniti ed infinitesimi

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X ***al finito***;
- x_0 punto di accumulazione per X ***all' infinito***.

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinito*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

Infiniti

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinito*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

Confronto

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per confrontare tra loro due infiniti in un punto x_0.

Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0, uno dei rapporti [a]:

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| \; e \; \left|\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right|$$

[a] Supporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per confrontare tra loro due infiniti in un punto x_0.
Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0, uno dei rapporti [a]:

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| \quad e \quad \left|\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right|$$

[a] Supporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per confrontare tra loro due infiniti in un punto x_0.
Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0, uno dei rapporti [a]:

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| \quad e \quad \left|\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right|$$

[a] Supporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per confrontare tra loro due infiniti in un punto x_0.
Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0, uno dei rapporti [a]:

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| \quad e \quad \left|\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right|$$

[a] Supporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto tra infiniti

Caso 1

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) > ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *più rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Confronto tra infiniti

Caso 1

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) > ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *più rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Confronto tra infiniti

Caso 1

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) > ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *più rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Confronto tra infiniti

Caso 2

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) < ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *meno rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 2

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) < ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *meno rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 3

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x\to x_0} f_1(x) = ord_{x\to x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Confronto tra infiniti

Caso 3

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Confronto tra infiniti

Caso 3: Infiniti equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infiniti si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) equiv_{x \to x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infiniti equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infiniti si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) equiv_{x \to x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infiniti equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infiniti si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) equiv_{x \to x_0} f_2(x).$$

Confronto tra infiniti

Caso 4

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si dice che gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ***non sono confrontabili***.

Ordine di un infinito

Obiettivo

Ci si propone adesso di determinare ***numericamente***, ove possibile, l'***ordine*** di un infinito.

Ordine di un infinito

Infinito campione

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Indicheremo con $f_\infty(x)$ **l'infinito campione** , convenzionalmente di **ordine 1**, in x_0 ovvero:

$$f_\infty(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-x_0)}, & x_0 \in \mathbb{R}, \\ x, & x_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

Ordine di un infinito

Considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine α (rispetto all'infinito campione), se esiste un valore $\alpha > 0$ per cui risulti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = \ell \neq 0.$$

Si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f(x) = \alpha.$$

Ordine di un infinito

In generale

In generale, considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine minore, uguale o maggiore di α (rispetto all'infinito campione), secondo che sia di ordine minore, uguale o maggiore dell'infinito $|f_\infty(x)|^\alpha$.

In generale

In generale, considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine minore, uguale o maggiore di α (rispetto all'infinito campione), secondo che sia di ordine minore, uguale o maggiore dell'infinito $|f_\infty(x)|^\alpha$.

Ordine di un infinito

In generale

In generale, considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine minore, uguale o maggiore di α (rispetto all'infinito campione), secondo che sia di ordine minore, uguale o maggiore dell'infinito $|f_\infty(x)|^\alpha$.

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} 2x^3.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to+\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.
Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) equiv_{x \to +\infty} x.$$

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinito $f(x)$ risulta *sempre* di ordine inferiore oppure *sempre* di ordine superiore rispetto all'infinito campione di ordine α, ossia:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinito $f(x)$ è rispettivamente di ordine arbitrariamente piccolo, arbitrariamente grande.

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinito $f(x)$ risulta *sempre* di ordine inferiore oppure *sempre* di ordine superiore rispetto all'infinito campione di ordine α, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinito $f(x)$ è rispettivamente di ordine arbitrariamente piccolo, arbitrariamente grande.

Casi particolari

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinito $f(x)$ risulta *sempre* di ordine inferiore oppure *sempre* di ordine superiore rispetto all'infinito campione di ordine α, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinito $f(x)$ è rispettivamente di ordine arbitrariamente piccolo, arbitrariamente grande.

Casi particolari

Tabella

	Infinito	x_0	ordine
a)	$\log_a x$	$+\infty$	arbitrariamente piccolo
b)	$\log_a x$	0	arbitrariamente piccolo
c)	$a^x, a > 1$	$+\infty$	arbitrariamente grande
d)	$a^x, 0 < a < 1$	$-\infty$	arbitrariamente grande

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinitesimo*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$$

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinitesimo*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Confronto

Confronto tra infinitesimi

Come per gli infiniti, si introduce un criterio per confrontare tra loro due infinitesimi in un punto x_0, nelle ipotesi precedentemente introdotte.

Confronto

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare ***quattro casi***:

Confronto tra infinitesimi

Caso 1

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) > ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *più rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Confronto tra infinitesimi

Caso 1

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) > ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *più rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Confronto tra infinitesimi

Caso 1

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) > ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *più rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Caso 2

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) < ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *meno rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Confronto tra infinitesimi

Caso 2

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) < ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *meno rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Confronto tra infinitesimi

Caso 3

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Confronto tra infinitesimi

Caso 3

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| = \ell \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x\to x_0} f_1(x) = ord_{x\to x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = \ell \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = ord_{x \to x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3: Infinitesimi equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) equiv_{x \to x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infinitesimi equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) equiv_{x \to x_0} f_2(x).$$

Confronto tra infinitesimi

Caso 3: Infinitesimi equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| = 1.$$

Gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) equiv_{x\to x_0} f_2(x).$$

Confronto tra infinitesimi

Caso 4

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si dice che gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ***non sono confrontabili***.

Ordine di un infinitesimo

Obiettivo

Ci si propone adesso di determinare ***numericamente***, ove possibile, l'***ordine*** di un infinitesimo.

Infinitesimo campione

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Indicheremo con $f_0(x)$ **l'infinitesimo campione**, convenzionalmente di **ordine 1**, in x_0, ovvero:

$$f_0(x) = \begin{cases} (x - x_0), & x_0 \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{x}, & x_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

Ordine di un infinitesimo

Considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine α (rispetto all'infinitesimo campione), se esiste un valore $\alpha > 0$ per cui risulti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = \ell \neq 0.$$

Si scrive:

$$ord_{x \to x_0} f(x) = \alpha.$$

Ordine di un infinitesimo

In generale

In generale, considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine minore, uguale o maggiore di α (rispetto all'infinitesimo campione), secondo che sia di ordine minore, uguale o maggiore dell'infinitesimo $|f_0(x)|^\alpha$.

Ordine di un infinitesimo

In generale

In generale, considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine minore, uguale o maggiore di α (rispetto all'infinitesimo campione), secondo che sia di ordine minore, uguale o maggiore dell'infinitesimo $|f_0(x)|^\alpha$.

Ordine di un infinitesimo

In generale

In generale, considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di ordine minore, uguale o maggiore di α (rispetto all'infinitesimo campione), secondo che sia di ordine minore, uguale o maggiore dell'infinitesimo $|f_0(x)|^\alpha$.

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left| \frac{x^2-1}{x-1} \right| = \lim_{x\to 1} \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left| \frac{f(x)}{2(x-1)} \right| = \lim_{x\to 1} \left| \frac{x^2-1}{2(x-1)} \right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1} \left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left| \frac{x^2-1}{x-1} \right| = \lim_{x\to 1} \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left| \frac{f(x)}{2(x-1)} \right| = \lim_{x\to 1} \left| \frac{x^2-1}{2(x-1)} \right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x\to 1} \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right| = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$$

$$ord_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 1} \left| \frac{f(x)}{2(x-1)} \right| = \lim_{x\to 1} \left| \frac{x^2-1}{2(x-1)} \right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to 1} 2(x-1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 1.
Risulta:

$$\lim_{x\to1}\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = \lim_{x\to1}\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \lim_{x\to1} x+1 = 2$$

$$ord_{x\to1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to1}\left|\frac{f(x)}{2(x-1)}\right| = \lim_{x\to1}\left|\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right| = 1.$$

$$f(x) equiv_{x\to1} 2(x-1).$$

Casi particolari

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x)$ risulta *sempre* di ordine inferiore oppure *sempre* di ordine superiore rispetto all'infinitesimo campione di ordine α, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = +\infty \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinitesimo $f(x)$ è rispettivamente di ordine arbitrariamente piccolo, arbitrariamente grande.

Casi particolari

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x)$ risulta *sempre* di ordine inferiore oppure *sempre* di ordine superiore rispetto all'infinitesimo campione di ordine α, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = +\infty \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinitesimo $f(x)$ è rispettivamente di ordine arbitrariamente piccolo, arbitrariamente grande.

Casi particolari

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x)$ risulta *sempre* di ordine inferiore oppure *sempre* di ordine superiore rispetto all'infinitesimo campione di ordine α, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = +\infty \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinitesimo $f(x)$ è rispettivamente di ordine arbitrariamente piccolo, arbitrariamente grande.

Casi particolari

Tabella

	Infinitesimo	x_0	ordine
a)	$a^x, a > 1$	$-\infty$	arbitrariamente grande
b)	$a^x, 0 < a < 1$	$+\infty$	arbitrariamente grande

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\mathrm{sen}x$	0	1	x
$\mathrm{tg}x$	0	1	x
$1-\cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathrm{arcsen}x$	0	1	x
$\mathrm{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x\log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
a^x-1	0	1	$x\log a$
e^x-1	0	1	x

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
sen$x$	0	1	x
tg$x$	0	1	x
$1-\cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
arcsen$x$	0	1	x
arctg$x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x\log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
a^x-1	0	1	$x\log a$
e^x-1	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
sen$x$	0	1	x
tg$x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
arcsen$x$	0	1	x
arctg$x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\mathrm{sen} x$	0	1	x
$\mathrm{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathrm{arcsen} x$	0	1	x
$\mathrm{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1 + x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1 + x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen} x$	0	1	x
$\text{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen} x$	0	1	x
$\text{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1 + x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1 + x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1 + x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1 + x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen} x$	0	1	x
$\text{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen} x$	0	1	x
$\text{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\mathrm{sen} x$	0	1	x
$\mathrm{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathrm{arcsen} x$	0	1	x
$\mathrm{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1-\cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\mathrm{sen} x$	0	1	x
$\mathrm{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathrm{arcsen} x$	0	1	x
$\mathrm{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1-\cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x\log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
a^x-1	0	1	$x\log a$
e^x-1	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1-\cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x\log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
a^x-1	0	1	$x\log a$
e^x-1	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\operatorname{sen} x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{arcsen} x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\mathrm{sen} x$	0	1	x
$\mathrm{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathrm{arcsen} x$	0	1	x
$\mathrm{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Prodotto

Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 allora il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) di ordine $\alpha_1 + \alpha_2$:

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = \alpha_1, \; ord_{x \to x_0} f_2(x) = \alpha_2$$

$$\Downarrow$$

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 equivalente al prodotto degli infiniti (infinitesimi) campione equivalenti, rispettivamente a $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Prodotto

Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 allora il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) di ordine $\alpha_1 + \alpha_2$:

$$ord_{x\to x_0} f_1(x) = \alpha_1, \; ord_{x\to x_0} f_2(x) = \alpha_2$$

$$\Downarrow$$

$$ord_{x\to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 equivalente al prodotto degli infiniti (infinitesimi) campione equivalenti, rispettivamente a $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Esempio 4

Sia $f(x) = x^3\sqrt{4x^2 - 1}$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$, dato dal prodotto di due infiniti in $+\infty$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

dove
$f_1(x) = x^3$
$f_2(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

$$ord_{x\to+\infty} f_1(x) = 3\,;$$

$$ord_{x\to+\infty} f_2(x) = 1\,;\ f_2(x) equiv_{x\to+\infty}\, 2x$$

e dunque:

$$ord_{x\to+\infty} f(x) = 3 + 1 = 4$$

$$f(x) equiv_{x\to 0} = x^3 \cdot 2x = 2x^4$$

Esempio 5

Sia $f(x) = \log(x^2+1)\mathrm{sen}3x$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 0, dato dal prodotto di due infinitesimi in zero:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

dove
$f_1(x) = \log(x^2+1)$
$f_2(x) = \mathrm{sen}3x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+1)}{x^2} = 1$$
$$\Downarrow$$

$$ord_{x\to+\infty} f_1(x) = 2$$

$$f_1(x) equiv_{x\to 0}\, x^2$$

Esempio 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$ord_{x \to +\infty} f_2(x) = 1$$

$$f_2(x) equiv_{x \to 0}\, 3x$$

e dunque:

$$ord_{x \to +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$$

$$f(x) equiv_{x \to 0} = x^2 \cdot 3x = 3x^3$$

Somma e differenza

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, allora la loro somma o differenza $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 che ha per ordine il maggiore (minore) dei numeri α_1 ed α_2.

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = \alpha_1 > \; ord_{x \to x_0} f_2(x) = \alpha_2$$

$$\Downarrow$$

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) \pm f_2(x) = \alpha_1(\alpha_2).$$

Operazioni tra infiniti e tra infinitesimi

Somma e differenza

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, allora la loro somma o differenza $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 che ha per ordine il maggiore (minore) dei numeri α_1 ed α_2.

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) = \alpha_1 > \; ord_{x \to x_0} f_2(x) = \alpha_2$$

$$\Downarrow$$

$$ord_{x \to x_0} f_1(x) \pm f_2(x) = \alpha_1 (\alpha_2).$$

Operazioni tra infiniti e tra infinitesimi

Somma e differenza

La somma $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 equivalente, tenuto conto del segno, all'infinito (infinitesimo) di ordine maggiore (minore).

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ allora la loro somma o differenza è ancora un infinito (infinitesimo) dello stesso ordine.

N.B. Fa eccezione il caso in cui $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono equivalenti.

Somma e differenza

La somma $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 equivalente, tenuto conto del segno, all'infinito (infinitesimo) di ordine maggiore (minore).
Se $\alpha_1 = \alpha_2$ allora la loro somma o differenza è ancora un infinito (infinitesimo) dello stesso ordine.
N.B. Fa eccezione il caso in cui $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono equivalenti.

Operazioni tra infiniti e tra infinitesimi

Somma e differenza

La somma $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 equivalente, tenuto conto del segno, all'infinito (infinitesimo) di ordine maggiore (minore).
Se $\alpha_1 = \alpha_2$ allora la loro somma o differenza è ancora un infinito (infinitesimo) dello stesso ordine.
N.B. Fa eccezione il caso in cui $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono equivalenti.

Esempio 6

Sia $f(x) = x^2 + \text{sen}^3 x$.
$f(x)$ è un infinitesimo in 0 dato dalla somma di due infinitesimi in 0:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

dove
$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = \text{sen}^3 x$

$$ord_{x\to 0} f_1(x) = 2$$

Esempio 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^3 x}{x^3} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$ord_{x\to 0} f_2(x) = 3$$

$$f_2(x) equiv_{x\to 0}\, x^3$$

e dunque:

$$ord_{x\to 0} f(x) = 2$$

$$f(x) equiv_{x\to 0} = x^2$$

Esempio 7

Sia $f(x) = x^3 + 4x^4 - 2^x$.
$f(x)$ è un infinito in $+\infty$ dato dalla differenza di due infiniti in $+\infty$:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

dove
$f_1(x) = x^3 + 4x^4$
$f_2(x) = -2^x$

$$ord_{x \to +\infty} f_1(x) = 4$$

$$f_1(x) equiv_{x \to 0} 4x^4$$

Esempio 7

$$ord_{x \to +\infty} f_2(x) \text{ arbitrariamente grande}$$

e dunque:

$$ord_{x \to +\infty} f(x) \text{ arbitrariamente grande}$$

$$f(x) equiv_{x \to 0} = -2^x$$