# Funzioni a più variabili

# Funzioni di più variabili

Siano $n > 1$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to 3x - 2y \in \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to z \log(x + y) \in \mathbb{R}$$

# Funzioni di più variabili

Siano $n > 1$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to 3x - 2y \in \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to z \log(x + y) \in \mathbb{R}$$

# Funzioni di più variabili

Siano $n > 1$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to 3x - 2y \in \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to z \log(x + y) \in \mathbb{R}$$

# Diagramma di una funzione di più variabili

Se $D \subseteq \mathbb{R}$, il grafico di una funzione definita in $D$ è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$, il grafico di una funzione $f$ definita in $D$ è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_2)) : (x_1, ..., x_n) \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Se $n > 2$ il diagramma di una funzione di più variabili non ammette una interpretazione geometrica.

# Diagramma di una funzione di più variabili

Se $D \subseteq \mathbb{R}$, il grafico di una funzione definita in $D$ è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$, il grafico di una funzione $f$ definita in $D$ è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_2)) : (x_1, ..., x_n) \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Se $n > 2$ il diagramma di una funzione di più variabili non ammette una interpretazione geometrica.

# Diagramma di una funzione di più variabili

Se $D \subseteq \mathbb{R}$, il grafico di una funzione definita in $D$ è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$, il grafico di una funzione $f$ definita in $D$ è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_2)) : (x_1, ..., x_n) \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Se $n > 2$ il diagramma di una funzione di più variabili non ammette una interpretazione geometrica.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio $D$ di una funzione $f$ di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.

Per ogni punto $P(x, y) \in D$ si individua il punto dello spazio di coordinate $(x, y, f(x, y))$.

Se $n = 2$, il grafico di $f$ è un insieme di punti dello spazio $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ è una superficie nello spazio tridimensionale.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio $D$ di una funzione $f$ di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.
Per ogni punto $P(x, y) \in D$ si individua il punto dello spazio di coordinate $(x, y, f(x, y))$.
Se $n = 2$, il grafico di $f$ è un insieme di punti dello spazio $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ è una superficie nello spazio tridimensionale.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio $D$ di una funzione $f$ di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.
Per ogni punto $P(x, y) \in D$ si individua il punto dello spazio di coordinate $(x, y, f(x, y))$.
Se $n = 2$, il grafico di $f$ è un insieme di punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ è una superficie nello spazio tridimensionale.

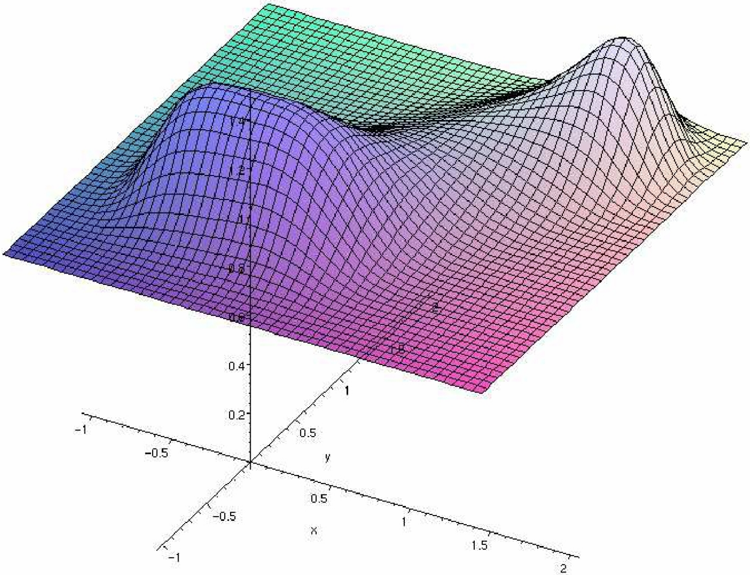
# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio $D$ di una funzione $f$ di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.
Per ogni punto $P(x, y) \in D$ si individua il punto dello spazio di coordinate $(x, y, f(x, y))$.
Se $n = 2$, il grafico di $f$ è un insieme di punti dello spazio $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ è una superficie nello spazio tridimensionale.

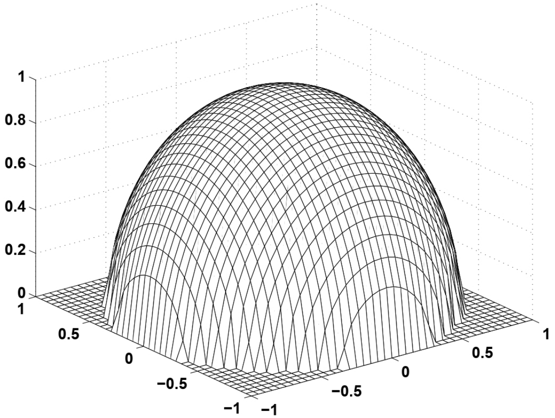
# Esempio



# Esempio

$$f : (x, y) \in D \to \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}^+$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \Leftrightarrow \text{cerchio di centro } (0, 0) \text{ e raggio } 1.$$



# Curve di livello di una funzione di 2 variabili

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si chiamano curve o linee di livello di $f$ le curve del dominio lungo le quali la funzione assume lo stesso valore.

Fissato un valore $k$, le curve di livello $k$ sono definite dalle soluzioni dell'equazione

$$f(x, y) = k.$$

# Curve di livello di una funzione di 2 variabili

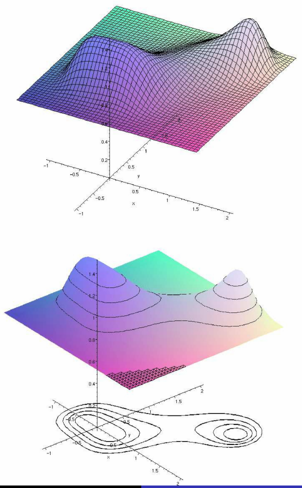
Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si chiamano curve o linee di livello di $f$ le curve del dominio lungo le quali la funzione assume lo stesso valore.

Fissato un valore $k$, le curve di livello $k$ sono definite dalle soluzioni dell'equazione

$$f(x, y) = k.$$

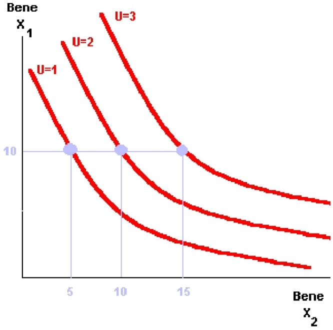
# Curve di livello per funzioni di 2 variabili

Graficamente, si ottengono intersecando il grafico della funzione con il piano di equazione $z = k$ e proiettando tale intersezione sul piano $xy$.



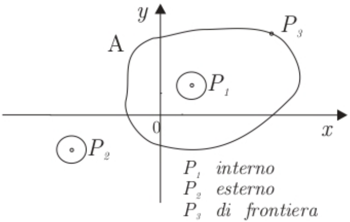
# Curve di indifferenza

Sia $U = U(x_1, x_2)$ una funzione che esprime l'utilità del consumatore rispetto al consumo di due beni.
Le curve di livello rappresentano la combinazione di due beni (paniere) che realizzano lo stesso livello di utilità per il consumatore, sono pertanto nominate **curve di indifferenza**.



Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

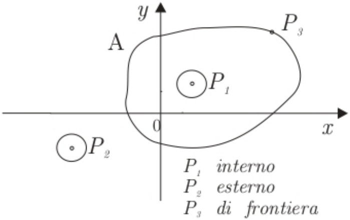
- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

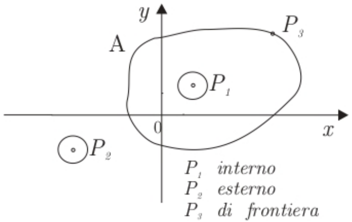
Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

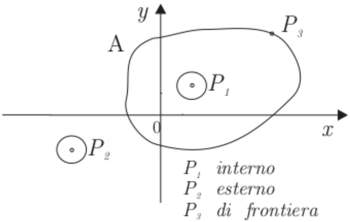
- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

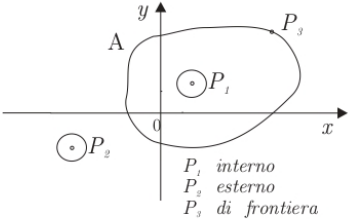
- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

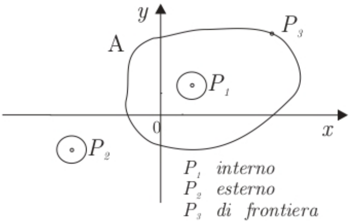
Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

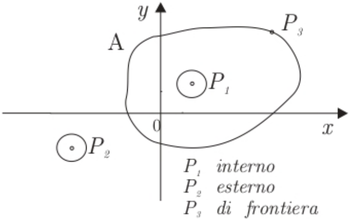
- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

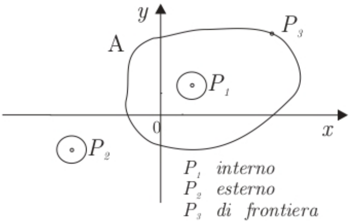
Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



Sia $A$ un insieme di punti del piano. Preso un punto $P$ si definisce intorno di $P$ un qualunque cerchio di centro $P$.

- $P$ è **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $A$;
- $P$ è **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $P$ contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus A$;
- $P$ è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di $A$ l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$ è di **accumulazione** per $A$ se per ogni intorno di $P$ esiste almeno un punto di $A$ diverso da $P$ (un punto di $A$ non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **aperto** se per ogni punto $P$ di $A$ esiste un intorno di $P$ interamente contenuto $A$.

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **chiuso** se $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto (Nota: $A$ è chiuso se contiene la sua frontiera).

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **limitato** se esiste un cerchio di raggio finito che lo contiene.

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **aperto** se per ogni punto $P$ di $A$ esiste un intorno di $P$ interamente contenuto $A$.

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **chiuso** se $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto (Nota: $A$ è chiuso se contiene la sua frontiera).

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **limitato** se esiste un cerchio di raggio finito che lo contiene.

# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **aperto** se per ogni punto $P$ di $A$ esiste un intorno di $P$ interamente contenuto $A$.

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **chiuso** se $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto (Nota: $A$ è chiuso se contiene la sua frontiera).

Un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ si dice **limitato** se esiste un cerchio di raggio finito che lo contiene.

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$,
si dice che $f$ **tende a** $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ al tendere di $(x, y)$ a $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell)\ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$,
si dice che $f$ **tende a** $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ al tendere di $(x, y)$ a $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell)\ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$,
si dice che $f$ **tende a** $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ al tendere di $(x, y)$ a $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell)\ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$,
si dice che $f$ **tende a** $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ al tendere di $(x, y)$ a $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell)\ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in \mathcal{I}(f(x_0, y_0)) \ \exists U \in \mathcal{U}((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in \mathcal{I}(f(x_0, y_0))\ \exists U \in \mathcal{U}((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0))\ \exists U \in U((x_0, y_0))\ \text{t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0))\ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0))\ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \; \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto di $D$, si dice che $f$ è **continua in** $P_0$ se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \ \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

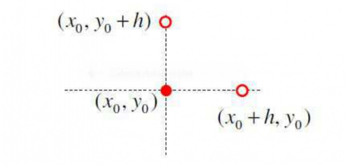
$f$ è **continua in** $P_0$ se e solo se è valida una delle due alternative

1. $(x_0, y_0)$ punto di accumulazione per $D$ e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$
2. $(x_0, y_0)$ punto isolato per $D$.

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice **continua in** $D$ se è **continua in ogni punto di** $D$.

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $x$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

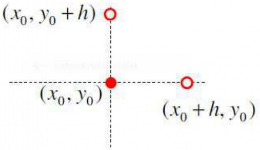
$$f_x(x_0, y_0), \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $x$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

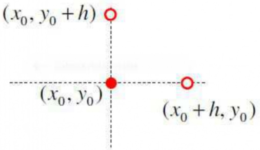
$$f_x(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $x$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

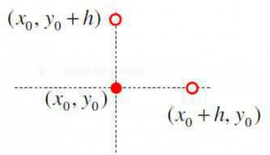
$$f_x(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $y$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

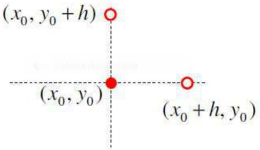
$$f_y(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $y$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $y$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

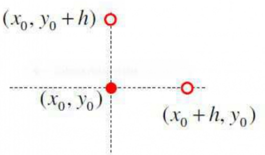
$$f_y(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $y$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $y$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

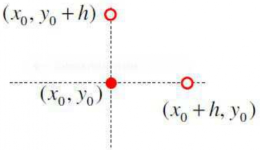
$$f_y(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $y$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$.




Si chiama derivata parziale prima della funzione $f$ rispetto alla variabile $y$ nel punto $(x_0, y_0)$ e si indica con

$$f_y(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a $y$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x,y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \mathrm{sen} y.$$

$$f(x,y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{sen} y.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \mathrm{sen} y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{sen} y.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \mathrm{sen} y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{sen} y.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \mathrm{sen} y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{sen} y.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x,y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \mathrm{sen} y.$$

$$f(x,y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{sen} y.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x,y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \mathrm{sen} y.$$

$$f(x,y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{sen} y.$$

## Vettore gradiente

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ un punto interno a $D$.

Si definisce **vettore gradiente** nel punto $P$ il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), ..., f_{x_n}(P)).$$

Un punto $P$ di $D$ che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Vettore gradiente

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ un punto interno a $D$.

Si definisce **vettore gradiente** nel punto $P$ il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), ..., f_{x_n}(P)).$$

Un punto $P$ di $D$ che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Vettore gradiente

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ un punto interno a $D$.
Si definisce **vettore gradiente** nel punto $P$ il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), ..., f_{x_n}(P)).$$

Un punto $P$ di $D$ che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

# Vettore gradiente

## Vettore gradiente

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ un punto interno a $D$.
Si definisce **vettore gradiente** nel punto $P$ il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), ..., f_{x_n}(P)).$$

Un punto $P$ di $D$ che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

# Vettore gradiente

## Vettore gradiente

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ un punto interno a $D$.

Si definisce **vettore gradiente** nel punto $P$ il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), ..., f_{x_n}(P)).$$

Un punto $P$ di $D$ che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Piano tangente

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. Definiamo piano tangente alla superficie di equazione

$$z = f(x, y)$$

nel punto

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## Piano tangente

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. Definiamo piano tangente alla superficie di equazione

$$z = f(x, y)$$

nel punto

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## Piano tangente

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. Definiamo piano tangente alla superficie di equazione

$$z = f(x, y)$$

nel punto

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

# Derivate seconde pure

## Derivate seconde pure

Se

1. $f_x(x, y)$ è derivabile rispetto a $x$;
2. $f_y(x, y)$ è derivabile rispetto a $y$;

le loro derivate

$$f_{xx}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f_{yy}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si dicono **derivate parziali seconde pure.**

## Derivate seconde pure

Se

1. $f_x(x, y)$ è derivabile rispetto a $x$;
2. $f_y(x, y)$ è derivabile rispetto a $y$;

le loro derivate

$$f_{xx}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f_{yy}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si dicono **derivate parziali seconde pure.**

# Derivate seconde miste

## Derivate seconde miste

Se

1. $f_x(x, y)$ è derivabile rispetto a $y$;
2. $f_y(x, y)$ è derivabile rispetto a $x$;

le loro derivate

$$f_{xy}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad f_{yx}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

si dicono **derivate parziali seconde miste.**

## Derivate seconde miste

Se

1. $f_x(x, y)$ è derivabile rispetto a $y$;
2. $f_y(x, y)$ è derivabile rispetto a $x$;

le loro derivate

$$f_{xy}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad f_{yx}(x, y) \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

si dicono **derivate parziali seconde miste.**

### Teorema di Schwarz

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se

1. esistono le derivate seconde $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$;
2. la derivata mista è continua

allora esiste la derivata $f_{yx}$ e

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y},$$
$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2},$$
$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y},$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y},$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x,y) = e^{-x}\log y.$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}\log y, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\frac{1}{y},$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}\log y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x}\frac{1}{y^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x}\frac{1}{y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x}\frac{1}{y}.$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x,y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

# Esempio

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x,y) = e^{-x}\log y.$$

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}\log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\frac{1}{y},\\
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}\log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x}\frac{1}{y^2},\\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x}\frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x}\frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

# Massimi e minimi assoluti

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice massimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice minimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo assoluto o punto estremale assoluto se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi assoluti

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice massimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice minimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo assoluto o punto estremale assoluto se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi assoluti

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice massimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice minimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo assoluto o punto estremale assoluto se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi assoluti

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice massimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo assoluto se per ogni $(x, y)$ in $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$ si dice minimo assoluto.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo assoluto o punto estremale assoluto se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi relativi

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice massimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice minimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo relativo o punto estremale relativo se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice massimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice minimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo relativo o punto estremale relativo se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice massimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice minimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo relativo o punto estremale relativo se è un punto di massimo o di minimo relativo.

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice massimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice minimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo relativo o punto estremale relativo se è un punto di massimo o di minimo relativo.

## Massimi e minimi relativi

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice massimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice minimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo relativo o punto estremale relativo se è un punto di massimo o di minimo relativo.

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice massimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y)$ in $D \cap U$ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. $f(x_0, y_0)$ si dice minimo relativo.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $D$ si dice punto di estremo relativo o punto estremale relativo se è un punto di massimo o di minimo relativo.

### Teorema di Fermat

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$. Se $P_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo, allora le derivate parziali si annullano in $P_0$.

### Osservazione

Se $P$ è punto interno al dominio, estremale relativo, allora deve essere stazionario.

# Teorema di Fermat

## Teorema di Fermat

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$. Se $P_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo, allora le derivate parziali si annullano in $P_0$.

## Osservazione

Se $P$ è punto interno al dominio, estremale relativo, allora deve essere stazionario.

# Teorema di Fermat

**Teorema di Fermat**

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto interno a $D$. Se $P_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo, allora le derivate parziali si annullano in $P_0$.

**Osservazione**

Se $P$ è punto interno al dominio, estremale relativo, allora deve essere stazionario.

# Esempio

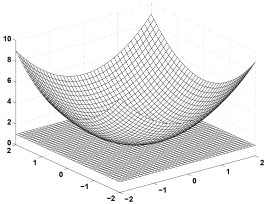
Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è $(0, 0)$.



# Esempio

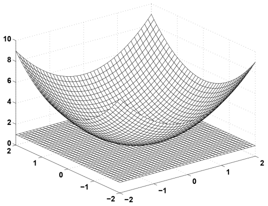
Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è $(0, 0)$.



# Esempio

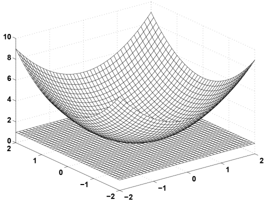
Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è $(0,0)$.



# Esempio

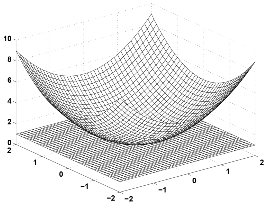
Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è $(0,0)$.



# Esempio

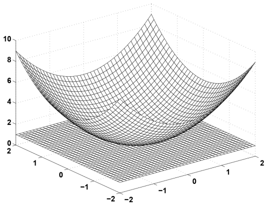
Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è $(0, 0)$.



# Esempio

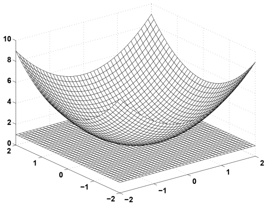
Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$f_x(x, y) = 2x, \;\; f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è $(0, 0)$.



**Teorema di Weiestrass**

Siano $D$ un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $D$. Allora $f$ ammette massimo e minimo in $D$.

**Teorema di Weiestrass**

Siano $D$ un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $D$. Allora $f$ ammette massimo e minimo in $D$.

Si definisce matrice Hessiana di una funzione $f$ di 2 variabili la matrice delle derivate seconde

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Si definisce Hessiano di una funzione $f$ il determinante della matrice Hessiana.

$$detH_f(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y) \cdot f_{yx}(x,y).$$

# Matrice Hessiana

Si definisce matrice Hessiana di una funzione $f$ di 2 variabili la matrice delle derivate seconde

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si definisce Hessiano di una funzione $f$ il determinante della matrice Hessiana.

$$det H_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y).$$

# Matrice Hessiana

Si definisce matrice Hessiana di una funzione $f$ di 2 variabili la matrice delle derivate seconde

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Si definisce Hessiano di una funzione $f$ il determinante della matrice Hessiana.

$$det H_f(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y) \cdot f_{yx}(x,y).$$

# Hessiano

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).

Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

# Hessiano

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

# Hessiano

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

# Hessiano

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

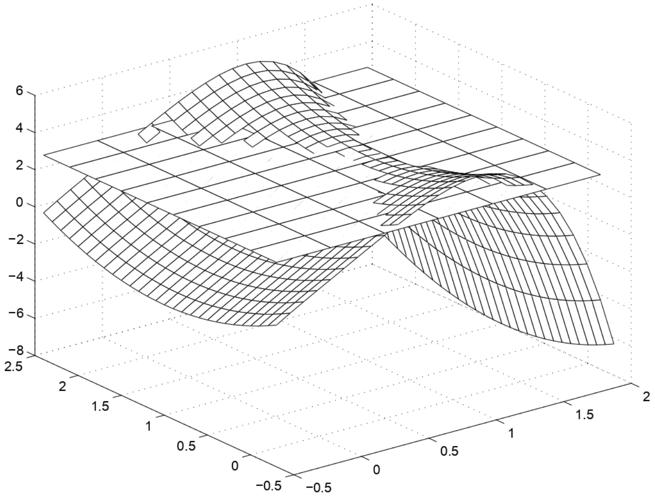
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

**Teorema**

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto stazionario di $f$ (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di $f(x, y)$).
Valgono le seguenti implicazioni

- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di minimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di massimo relativo**;
- $detH_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella.**

# Esempio



# Esempio

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = -x^4 + y^2 + 4x - 2y + 1.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (1,1).$$

# Esempio

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = -x^4 + y^2 + 4x - 2y + 1.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (1,1).$$

# Esempio

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \;\; f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;$$
$$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2;$$

$detH_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;$$
$$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2;$$

$detH_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;$$
$$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2;$$

$detH_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;$$
$$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2;$$

$detH_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;\\
&f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;\\
&f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;\\
&f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2;
\end{aligned}$$

$detH_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;\\
&f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;\\
&f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;\\
&f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2;
\end{aligned}$$

$det H_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

$$f_x(x,y) = -4x^3 + 4, \;\; f_y(x,y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned} &f_{xx}(x,y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = -12;\\ &f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 0;\\ &f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1,1) = 0;\\ &f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 2; \end{aligned}$$

$det H_f(1,1) = -24 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x,$$

si annullano contemporaneamente nell'origine $P = (0,0)$.

# Esempio

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x,$$

si annullano contemporaneamente nell'origine $P = (0, 0)$.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) = 2 &\Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2; \\ f_{xy}(x,y) = 1 &\Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1; \\ f_{yx}(x,y) = 1 &\Rightarrow f_{yx}(0,0) = 1; \\ f_{yy}(x,y) = 2 &\Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2; \end{aligned}$$

$det H_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$
$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$
$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$
$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$detH_f(0, 0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2; \\ f_{xy}(x,y) &= 1 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1; \\ f_{yx}(x,y) &= 1 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 1; \\ f_{yy}(x,y) &= 2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2; \end{aligned}$$

$detH_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2;$$
$$f_{xy}(x,y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1;$$
$$f_{yx}(x,y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 1;$$
$$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2;$$

$detH_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) = 2 &\Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2;\\
f_{xy}(x,y) = 1 &\Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1;\\
f_{yx}(x,y) = 1 &\Rightarrow f_{yx}(0,0) = 1;\\
f_{yy}(x,y) = 2 &\Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2;
\end{aligned}$$

$det H_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2;$$
$$f_{xy}(x,y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1;$$
$$f_{yx}(x,y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 1;$$
$$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2;$$

$detH_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio

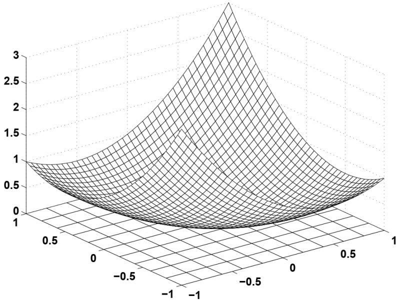
$$f_x(x,y) = 2x + y, \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2; \\ f_{xy}(x,y) &= 1 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1; \\ f_{yx}(x,y) &= 1 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 1; \\ f_{yy}(x,y) &= 2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2; \end{aligned}$$

$detH_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow P$ è un punto di minimo relativo.

# Esempio



Date una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una equazione $g(x, y) = 0$ si definisce massimo vincolato di $f$ mediante $g$ il massimo della funzione $f$ ristretta all'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$.

Date una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una equazione $g(x, y) = 0$ si definisce minimo vincolato di $f$ mediante $g$ il minimo della funzione $f$ ristretta all'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$.

$g(x, y) = 0$ prende il nome di vincolo.

Date una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una equazione $g(x, y) = 0$ si definisce massimo vincolato di $f$ mediante $g$ il massimo della funzione $f$ ristretta all'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, g(x, y) = 0\}$.

Date una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una equazione $g(x, y) = 0$ si definisce minimo vincolato di $f$ mediante $g$ il minimo della funzione $f$ ristretta all'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, g(x, y) = 0\}$.

$g(x, y) = 0$ prende il nome di vincolo.

Date una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una equazione $g(x, y) = 0$ si definisce massimo vincolato di $f$ mediante $g$ il massimo della funzione $f$ ristretta all'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$.

Date una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una equazione $g(x, y) = 0$ si definisce minimo vincolato di $f$ mediante $g$ il minimo della funzione $f$ ristretta all'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$.

$g(x, y) = 0$ prende il nome di vincolo.

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y)$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x,y)=0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y=v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x,v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0,y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x,y)=0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x,v(x))]_{(x_0,v(x_0))}=0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x,y)=0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x=v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y),y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0,y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x,y)=0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y),y)]_{(v(y_0),y_0)}=0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$, ovvero risulta scrivibile come $y = v(x)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(x, v(x))$.

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(x, v(x))]_{(x_0, v(x_0))} = 0.$$

Analogamente se il vincolo $g(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto a $x$, ovvero risulta scrivibile come $x = v(y)$, si può considerare la funzione di una sola variabile $f(v(y), y))$ e un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente il vincolo $g(x, y) = 0$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se

$$D[f(v(y), y)]_{(v(y_0), y_0)} = 0.$$

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Passi da compiere per determinare i punti estremali vincolati con vincoli esplicitabili

1. scrivere la funzione $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
2. determinare i punti estremali di $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
   Nota: così facendo si ricava l'ascissa (l'ordinata) dei punti estremali di $f(x, y)$
3. ricavare dalla condizione $y = v(x)$ $(x = v(y))$ l'ordinata (l'ascissa) del punto estremale di $f(x, y)$ vincolato a $g$.

Passi da compiere per determinare i punti estremali vincolati con vincoli esplicitabili

1. scrivere la funzione $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
2. determinare i punti estremali di $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
   Nota: così facendo si ricava l'ascissa (l'ordinata) dei punti estremali di $f(x, y)$
3. ricavare dalla condizione $y = v(x)$ $(x = v(y))$ l'ordinata (l'ascissa) del punto estremale di $f(x, y)$ vincolato a $g$.

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Passi da compiere per determinare i punti estremali vincolati con vincoli esplicitabili

1. scrivere la funzione $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
2. determinare i punti estremali di $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
   Nota: così facendo si ricava l'ascissa (l'ordinata) dei punti estremali di $f(x, y)$
3. ricavare dalla condizione $y = v(x)$ $(x = v(y))$ l'ordinata (l'ascissa) del punto estremale di $f(x, y)$ vincolato a $g$.

# Caso particolare: vincoli esplicitabili

Passi da compiere per determinare i punti estremali vincolati con vincoli esplicitabili

1. scrivere la funzione $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
2. determinare i punti estremali di $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
   Nota: così facendo si ricava l'ascissa (l'ordinata) dei punti estremali di $f(x, y)$
3. ricavare dalla condizione $y = v(x)$ $(x = v(y))$ l'ordinata (l'ascissa) del punto estremale di $f(x, y)$ vincolato a $g$.

Passi da compiere per determinare i punti estremali vincolati con vincoli esplicitabili

1. scrivere la funzione $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
2. determinare i punti estremali di $f(x, v(x))$ $(f(v(y), y))$,
   Nota: così facendo si ricava l'ascissa (l'ordinata) dei punti estremali di $f(x, y)$
3. ricavare dalla condizione $y = v(x)$ $(x = v(y))$ l'ordinata (l'ascissa) del punto estremale di $f(x, y)$ vincolato a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x, y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x, y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x, x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x, x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$D[f(x, x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x, y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x, y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x, x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x, x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$$D[f(x, x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}.$$

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x, y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x, y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x, x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x, x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$$D[f(x, x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}.$$

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x, y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x, y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x, x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x, x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$$D[f(x, x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}.$$

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x, y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x, y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x, x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x, x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$D[f(x, x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x,y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x,y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x,x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x,x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$D[f(x,x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x,y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x,y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x,x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x,x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$D[f(x,x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x,y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x,y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x,x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x,x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$D[f(x,x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x, y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x, y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x, x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x, x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$$D[f(x, x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}.$$

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Determinare gli eventuali punti estremali della funzione $f(x,y) = x + y^2$ soggetta al vincolo $y - x^2 = 0$.

Il vincolo $g(x,y) = y - x^2 = 0$ è esplicitabile rispetto a $y$ ovvero $y = x^2$.

Pertanto $f(x,x^2) = x + x^4$.

Quindi $D[f(x,x^2)] = D[x + x^4] = 1 + 4x^3$.

$$D[f(x,x^2)] = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -4^{-\frac{1}{3}}.$$

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ implica $y_0 = x_0^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

$D[f(x, x^4)] > 0$ se e soltanto se $x < -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ punto di minimo per $f(x, x^4)$.

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto di minimo vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

$D[f(x, x^4)] > 0$ se e soltanto se $x < -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ punto di minimo per $f(x, x^4)$.

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto di minimo vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

$D[f(x, x^4)] > 0$ se e soltanto se $x < -4^{-\frac{1}{3}}$.

$x_0 = -4^{-\frac{1}{3}}$ punto di minimo per $f(x, x^4)$.

$P_0 \equiv (-4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{2}{3}})$ punto di minimo vincolato di $f$ a $g$.

# Esempio

Dati $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x, y) = x^2 - y^2$, determinare i punti estremali della funzione nel suo dominio.

$f$ è continua, $Q$ è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo in $Q$. Analizziamo prima i punti interni a $Q$. Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (0, 0).$$

$P \equiv (0, 0)$ unico punto stazionario per $f$.

# Esempio

Dati $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x, y) = x^2 - y^2$, determinare i punti estremali della funzione nel suo dominio.

$f$ è continua, $Q$ è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo in $Q$. Analizziamo prima i punti interni a $Q$. Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (0, 0).$$

$P \equiv (0, 0)$ unico punto stazionario per $f$.

# Esempio

Dati $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x, y) = x^2 - y^2$, determinare i punti estremali della funzione nel suo dominio.

$f$ è continua, $Q$ è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo in $Q$. Analizziamo prima i punti interni a $Q$. Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (0, 0).$$

$P \equiv (0, 0)$ unico punto stazionario per $f$.

# Esempio

Dati $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x, y) = x^2 - y^2$, determinare i punti estremali della funzione nel suo dominio.

$f$ è continua, $Q$ è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo in $Q$. Analizziamo prima i punti interni a $Q$. Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (0, 0).$$

$P \equiv (0, 0)$ unico punto stazionario per $f$.

# Esempio

Dati $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x, y) = x^2 - y^2$, determinare i punti estremali della funzione nel suo dominio.

$f$ è continua, $Q$ è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo in $Q$. Analizziamo prima i punti interni a $Q$. Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (0, 0).$$

$P \equiv (0, 0)$ unico punto stazionario per $f$.

# Esempio

Dati $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge $f(x, y) = x^2 - y^2$, determinare i punti estremali della funzione nel suo dominio.

$f$ è continua, $Q$ è chiuso e limitato, quindi, per il Teorema di Weierstrass $f$ ammette massimo e minimo in $Q$. Analizziamo prima i punti interni a $Q$. Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (0, 0).$$

$P \equiv (0, 0)$ unico punto stazionario per $f$.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0;$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 0;$$
$$f_{yy}(x,y) = -2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2;$$

$detH(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0;$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 0;$$
$$f_{yy}(x,y) = -2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2;$$

$detH(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x, y) = 2x, \;\; f_y(x, y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$
$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 0;$$
$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 0;$$
$$f_{yy}(x, y) = -2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = -2;$$

$detH(0, 0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2; \\ f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0; \\ f_{yx}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 0; \\ f_{yy}(x,y) = -2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2; \end{array}$$

$detH(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2;\\
f_{xy}(x,y) &= 0 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0;\\
f_{yx}(x,y) &= 0 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 0;\\
f_{yy}(x,y) &= -2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2;
\end{aligned}$$

$detH(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2; \\ f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 0; \\ f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 0; \\ f_{yy}(x, y) = -2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = -2; \end{aligned}$$

$detH(0, 0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = -2y$$

Le derivate parziali seconde in $P$, valgono:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 2 \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2; \\
f_{xy}(x,y) &= 0 \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0; \\
f_{yx}(x,y) &= 0 \Rightarrow f_{yx}(0,0) = 0; \\
f_{yy}(x,y) &= -2 \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2;
\end{aligned}$$

$detH(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ la funzione ammette un punto di sella in P.

# Esempio

Analizziamo i punti di frontiera di $Q$. Nota: i punti di forntiera di $Q$ coincidono con i punti del quadrato di vertici $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$ e $D = (1, -1)$.
Quindi

$$\overline{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 1, \; x \in [-1, 1]\} = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = -1, \; y \in [-1, 1]\} = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = -1, \; x \in [-1, 1]\} = \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{DA} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 1, \; y \in [-1, 1]\} = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}.$$

# Esempio

Analizziamo i punti di frontiera di $Q$. Nota: i punti di forntiera di $Q$ coincidono con i punti del quadrato di vertici $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ e $D = (1,-1)$.
Quindi

$$\overline{AB} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 1, \, x \in [-1,1]\} = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\},$$

$$\overline{BC} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = -1, \, y \in [-1,1]\} = \{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = -1, \, x \in [-1,1]\} = \{(x,-1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\},$$

$$\overline{DA} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 1, \, y \in [-1,1]\} = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}.$$

# Esempio

Analizziamo i punti di frontiera di $Q$. Nota: i punti di forntiera di $Q$ coincidono con i punti del quadrato di vertici $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ e $D = (1,-1)$.
Quindi

$$\overline{AB} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1, \ x \in [-1,1]\} = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\},$$

$$\overline{BC} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = -1, \ y \in [-1,1]\} = \{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -1, \ x \in [-1,1]\} = \{(x,-1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\},$$

$$\overline{DA} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \ y \in [-1,1]\} = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}.$$

Analizziamo i punti di frontiera di $Q$. Nota: i punti di forntiera di $Q$ coincidono con i punti del quadrato di vertici $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ e $D = (1,-1)$.
Quindi

$$\overline{AB} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1, \, x \in [-1,1]\} = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\},$$

$$\overline{BC} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = -1, \, y \in [-1,1]\} = \{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -1, \, x \in [-1,1]\} = \{(x,-1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\},$$

$$\overline{DA} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \, y \in [-1,1]\} = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}.$$

Analizziamo i punti di frontiera di $Q$. Nota: i punti di forntiera di $Q$ coincidono con i punti del quadrato di vertici $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$ e $D = (1, -1)$.
Quindi

$$\overline{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1, \, x \in [-1, 1]\} = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = -1, \, y \in [-1, 1]\} = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -1, \, x \in [-1, 1]\} = \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{DA} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \, y \in [-1, 1]\} = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}.$$

# Esempio

Analizziamo i punti di frontiera di $Q$. Nota: i punti di forntiera di $Q$ coincidono con i punti del quadrato di vertici $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$ e $D = (1, -1)$.
Quindi

$$\overline{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1, \ x \in [-1, 1]\} = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = -1, \ y \in [-1, 1]\} = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{CD} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -1, \ x \in [-1, 1]\} = \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\},$$

$$\overline{DA} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \ y \in [-1, 1]\} = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}.$$

# Esempio

Si tratta ora di studiare $f$ ristretta ai quattro segmenti.

$f$ ristretta a $\overline{AB}$ ha legge $f(x,1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{BC}$ ha legge $f(-1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{CD}$ ha legge $f(x,-1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{DA}$ ha legge $f(1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$.

# Esempio

Si tratta ora di studiare $f$ ristretta ai quattro segmenti.

$f$ ristretta a $\overline{AB}$ ha legge $f(x,1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{BC}$ ha legge $f(-1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{CD}$ ha legge $f(x,-1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{DA}$ ha legge $f(1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$.

# Esempio

Si tratta ora di studiare $f$ ristretta ai quattro segmenti.

$f$ ristretta a $\overline{AB}$ ha legge $f(x, 1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1, 1]$,

$f$ ristretta a $\overline{BC}$ ha legge $f(-1, y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1, 1]$,

$f$ ristretta a $\overline{CD}$ ha legge $f(x, -1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1, 1]$,

$f$ ristretta a $\overline{DA}$ ha legge $f(1, y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1, 1]$.

# Esempio

Si tratta ora di studiare $f$ ristretta ai quattro segmenti.

$f$ ristretta a $\overline{AB}$ ha legge $f(x,1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{BC}$ ha legge $f(-1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{CD}$ ha legge $f(x,-1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{DA}$ ha legge $f(1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$.

# Esempio

Si tratta ora di studiare $f$ ristretta ai quattro segmenti.

$f$ ristretta a $\overline{AB}$ ha legge $f(x,1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{BC}$ ha legge $f(-1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{CD}$ ha legge $f(x,-1) = x^2 - 1$ con $x \in [-1,1]$,

$f$ ristretta a $\overline{DA}$ ha legge $f(1,y) = 1 - y^2$ con $y \in [-1,1]$.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Esempio

$D[f(x,1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_1 = (0,1)$ punto di minimo relativo.

Analogamente $D[f(x,-1)] = D[x^2 - 1] = 2x$ con $x \in [-1,1]$,
$D[f(x,-1)] > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow P_3 = (0,-1)$ punto di minimo relativo.

$D[f(-1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(-1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (-1,0)$ punto di massimo relativo.

$D[f(1,y)] = D[1 - y^2] = -2y$ con $y \in [-1,1]$,
$D[f(1,y)] > 0 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow P_2 = (1,0)$ punto di massimo relativo.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Supponiamo il vincolo sia espresso in forma implicita $g(x, y) = 0$ con $g$ continua, derivabile con derivate prime continue.

Un punto $P$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

$\lambda$ prende il nome di moltiplicatore di Lagrange.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Supponiamo il vincolo sia espresso in forma implicita $g(x, y) = 0$ con $g$ continua, derivabile con derivate prime continue.

Un punto $P$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

$\lambda$ prende il nome di moltiplicatore di Lagrange.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Supponiamo il vincolo sia espresso in forma implicita $g(x, y) = 0$ con $g$ continua, derivabile con derivate prime continue.

Un punto $P$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

$\lambda$ prende il nome di moltiplicatore di Lagrange.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Supponiamo il vincolo sia espresso in forma implicita $g(x, y) = 0$ con $g$ continua, derivabile con derivate prime continue.

Un punto $P$ si dice punto stazionario vincolato di $f$ a $g$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

$\lambda$ prende il nome di moltiplicatore di Lagrange.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$. Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda\nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$. Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$. Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda\nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$. Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$.
   Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda\nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$.
   Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

Passi da compiere per determinare i punti stazionari vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

1. scrivere la **funzione lagrangiana** del problema: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$,
2. determinare i punti stazionari della Lagrangiana, $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$. Nota: un punto $(x_0, y_0, \lambda_0)$ stazionario della Lagrangiana soddisfa $\nabla f(P) = \lambda\nabla g(P)$, quindi $(x_0, y_0)$ è punto stazionario vincolato di $f$ a $g$.

Nota: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato anche nel caso dei vincoli esplicitabili.

# Caso generale-funzione Lagrangiana

La condizione
$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x,y)) = (0,0,0)$ equivale al sistema nelle incognite $x, y$ e $\lambda$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g_x(x,y) = 0 \end{cases}$$

La condizione
$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$ equivale
al sistema nelle incognite $x, y$ e $\lambda$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

La condizione
$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g(x, y)) = (0, 0, 0)$ equivale al sistema nelle incognite $x, y$ e $\lambda$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

# Esempio

Data la funzione $f(x,y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinare gli eventuali punti stazionari vincolati di $f$ a $g$.

La funzione Lagrangiana del problema è
$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Le sue derivate parziali prime sono

$$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = -g(x,y) = -(x^2 + y^2 - 1)$$

# Esempio

Data la funzione $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinare gli eventuali punti stazionari vincolati di $f$ a $g$.

La funzione Lagrangiana del problema è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Le sue derivate parziali prime sono

$$\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -g(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1)$$

# Esempio

Data la funzione $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinare gli eventuali punti stazionari vincolati di $f$ a $g$.

La funzione Lagrangiana del problema è
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Le sue derivate parziali prime sono

$$\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -g(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1)$$

# Esempio

Data la funzione $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinare gli eventuali punti stazionari vincolati di $f$ a $g$.

La funzione Lagrangiana del problema è
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Le sue derivate parziali prime sono

$$\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -g(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1)$$

# Esempio

Data la funzione $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinare gli eventuali punti stazionari vincolati di $f$ a $g$.

La funzione Lagrangiana del problema è
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Le sue derivate parziali prime sono

$$\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -g(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1)$$

# Esempio

Data la funzione $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinare gli eventuali punti stazionari vincolati di $f$ a $g$.

La funzione Lagrangiana del problema è
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Le sue derivate parziali prime sono

$$\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -g(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1)$$

# Esempio

Pertanto si ha

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda = 0$ non porta a soluzioni pertanto poniamo $\lambda \neq 0$.

# Esempio

Pertanto si ha

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda = 0$ non porta a soluzioni pertanto poniamo $\lambda \neq 0$.

# Esempio

Pertanto si ha

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda = 0$ non porta a soluzioni pertanto poniamo $\lambda \neq 0$.

# Esempio

Pertanto si ha

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda = 0$ non porta a soluzioni pertanto poniamo $\lambda \neq 0$.

# Esempio

Pertanto si ha

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda = 0$ non porta a soluzioni pertanto poniamo $\lambda \neq 0$.

# Esempio

Pertanto si ha

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda = 0$ non porta a soluzioni pertanto poniamo $\lambda \neq 0$.

# Esempio

La condizione $\lambda \neq 0$ porta a

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

# Esempio

La condizione $\lambda \neq 0$ porta a

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

La condizione $\lambda \neq 0$ porta a

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

La condizione $\lambda \neq 0$ porta a

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

# Esempio

Ossia

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari per la funzione Lagrangiana

quindi

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari vincolati per $f$ a $g$.

# Esempio

Ossia

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari per la funzione Lagrangiana

quindi

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari vincolati per $f$ a $g$.

# Esempio

Ossia

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari per la funzione Lagrangiana

quindi

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari vincolati per $f$ a $g$.

# Hessiana della lagrangiana

Date due funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ continue, derivabili al secondo ordine si definisce matrice Hessiana della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ la matrice delle sue derivate seconde.

$$H_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) & -g_x(x,y) \\ f_{yx}(x,y) - \lambda g_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) - \lambda g_{yy}(x,y) & -g_y(x,y) \\ -g_x(x,y) & -g_y(x,y) & 0 \end{pmatrix}$$

# Hessiana della lagrangiana

Date due funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ continue, derivabili al secondo ordine si definisce matrice Hessiana della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ la matrice delle sue derivate seconde.

$$H_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) & -g_x(x,y) \\ f_{yx}(x,y) - \lambda g_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) - \lambda g_{yy}(x,y) & -g_y(x,y) \\ -g_x(x,y) & -g_y(x,y) & 0 \end{pmatrix}$$

# Hessiana della lagrangiana

Date due funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ continue, derivabili al secondo ordine si definisce matrice Hessiana della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ la matrice delle sue derivate seconde.

$$H_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) - \lambda g_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) - \lambda g_{xy}(x,y) & -g_x(x,y) \\ f_{yx}(x,y) - \lambda g_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) - \lambda g_{yy}(x,y) & -g_y(x,y) \\ -g_x(x,y) & -g_y(x,y) & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema** (condizione necessaria)
Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili con derivate parziali prime continue.
Sia $(x_0, y_0)$ un punto estremale vincolato per $f$, che **non sia stazionario per** $g$ (**condizione di qualificazione del vincolo**).

Allora esiste un numero reale $\lambda$ tale che $(x_0, y_0, \lambda)$ è punto stazionario della funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

# Punti estremali vincolati

**Teorema** (condizione necessaria)
Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili con derivate parziali prime continue.
Sia $(x_0, y_0)$ un punto estremale vincolato per $f$, che **non sia stazionario per** $g$ (**condizione di qualificazione del vincolo**).

Allora esiste un numero reale $\lambda$ tale che $(x_0, y_0, \lambda)$ è punto stazionario della funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

# Punti estremali vincolati

**Teorema** (condizione necessaria)
Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili con derivate parziali prime continue.
Sia $(x_0, y_0)$ un punto estremale vincolato per $f$, che **non sia stazionario per** $g$ (**condizione di qualificazione del vincolo**).

Allora esiste un numero reale $\lambda$ tale che $(x_0, y_0, \lambda)$ è punto stazionario della funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Punti estremali vincolati

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Punti estremali vincolati

Teorema: Siano $f(x,y)$ e $g(x,y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x,y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x,y)$ e $g(x,y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Punti estremali vincolati

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Punti estremali vincolati

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Punti estremali vincolati

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Punti estremali vincolati

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue e $\nabla g(x, y) \neq 0$. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto estremale per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ allora $(x_0, y_0)$ è un punto estremale vincolato per $f$ a $g$.

Teorema: Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni continue, derivabili al secondo ordine con derivate continue. Se $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ se la matrice Hessiana ha determinante positivo (negativo) in $(x_0, y_0, \lambda_0)$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo (minimo) locale vincolato per $f$ a $g$.

# Esempio: *Il problema del produttore*

Un'impresa impiega capitale e lavoro rispettivamente in quantità $C$ e $L$ e ottiene una quantità prodotta $f$ espressa dalla funzione di produzione di *Cobb-Douglas*:

$$f(C,L) = k\,C^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

dove $k$ misura la produzione unitaria.

Un problema economico interessante è massimizzare $f$ soddisfacente un vincolo sui fattori produttivi.
Supponiamo che l'azienda possieda un determinato budget $b > 0$, con il quale acquistare i servizi di capitale e lavoro.
La spesa per l'acquisto della combinazione di fattori è

$$C\,p_C + L\,p_L\ ,$$

dove $p_C$ = costo unitario di $C$ e $p_L$ = costo unitario di $L$.

## Esempio: *Il problema del produttore*

Un'impresa impiega capitale e lavoro rispettivamente in quantità $C$ e $L$ e ottiene una quantità prodotta $f$ espressa dalla funzione di produzione di *Cobb-Douglas*:

$$f(C, L) = k\, C^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

dove $k$ misura la produzione unitaria.

Un problema economico interessante è massimizzare $f$ soddisfacente un vincolo sui fattori produttivi.
Supponiamo che l'azienda possieda un determinato budget $b > 0$, con il quale acquistare i servizi di capitale e lavoro.
La spesa per l'acquisto della combinazione di fattori è

$$C\, p_C + L\, p_L\ ,$$

dove $p_C$ = costo unitario di $C$ e $p_L$ = costo unitario di $L$.

# Esempio: *Il problema del produttore*

Un'impresa impiega capitale e lavoro rispettivamente in quantità $C$ e $L$ e ottiene una quantità prodotta $f$ espressa dalla funzione di produzione di *Cobb-Douglas*:

$$f(C,L) = k\,C^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

dove $k$ misura la produzione unitaria.

Un problema economico interessante è massimizzare $f$ soddisfacente un vincolo sui fattori produttivi.
Supponiamo che l'azienda possieda un determinato budget $b > 0$, con il quale acquistare i servizi di capitale e lavoro.
La spesa per l'acquisto della combinazione di fattori è

$$C\,p_C + L\,p_L\ ,$$

dove $p_C =$ costo unitario di $C$ e $p_L =$ costo unitario di $L$.

# Esempio: *Il problema del produttore*

Un'impresa impiega capitale e lavoro rispettivamente in quantità $C$ e $L$ e ottiene una quantità prodotta $f$ espressa dalla funzione di produzione di *Cobb-Douglas*:

$$f(C, L) = k\, C^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

dove $k$ misura la produzione unitaria.

Un problema economico interessante è massimizzare $f$ soddisfacente un vincolo sui fattori produttivi.
Supponiamo che l'azienda possieda un determinato budget $b > 0$, con il quale acquistare i servizi di capitale e lavoro.
La spesa per l'acquisto della combinazione di fattori è

$$C\, p_C + L\, p_L\ ,$$

dove $p_C =$ costo unitario di $C$ e $p_L =$ costo unitario di $L$.

# Esempio: *Il problema del produttore*

Supponiamo che la spesa non possa eccedere il budget $b$. Risulta significativo allora chiedere di massimizzare $f$ rispetto al vincolo

$$C\,p_C + L\,p_L \le b\;.$$

Osservando, inoltre, che non conviene sottousare il budget, quindi il vincolo da considerare è:

$$C\,p_C + L\,p_L = b.$$

Si vuole cioè determinare il massimo della funzione

$$f(C, L) = k\,C^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

che soddisfi il vincolo esprimibile come $g(C, L) = Cp_C + Lp_L - b = 0$.

# Esempio: *Il problema del produttore*

Supponiamo che la spesa non possa eccedere il budget $b$. Risulta significativo allora chiedere di massimizzare $f$ rispetto al vincolo

$$C\,p_C + L\,p_L \leq b\ .$$

Osservando, inoltre, che non conviene sottousare il budget, quindi il vincolo da considerare è:

$$C\,p_C + L\,p_L = b.$$

Si vuole cioè determinare il massimo della funzione

$$f(C,L) = k\,C^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

che soddisfi il vincolo esprimibile come $g(C,L) = Cp_C + Lp_L - b = 0$.

# Esempio: *Il problema del produttore*

Supponiamo che la spesa non possa eccedere il budget $b$. Risulta significativo allora chiedere di massimizzare $f$ rispetto al vincolo

$$C\,p_C + L\,p_L \leq b\ .$$

Osservando, inoltre, che non conviene sottousare il budget, quindi il vincolo da considerare è:

$$C\,p_C + L\,p_L = b.$$

Si vuole cioè determinare il massimo della funzione

$$f(C,L) = k\,C^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad k > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

che soddisfi il vincolo esprimibile come
$g(C,L) = Cp_C + Lp_L - b = 0$.

La funzione Lagrangiana del problema risulta essere

$$\mathcal{L}(C, L, \lambda) = k\, C^{\alpha} L^{1-\alpha} - \lambda(C\, p_C + L\, p_L - b)\ .$$

Quindi
$\nabla\mathcal{L}(C, L, \lambda) =$
$(k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C,\ k(1-\alpha)C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L,\ b - C\, p_C - L\, p_L)$.
Le condizioni del primo ordine danno, quindi, luogo al sistema

$$\begin{cases} k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C = 0 \\ k(1-\alpha)C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L = 0 \\ b - C\, p_C - L\, p_L = 0 \end{cases}$$

La funzione Lagrangiana del problema risulta essere

$$\mathcal{L}(C, L, \lambda) = k\, C^{\alpha} L^{1-\alpha} - \lambda(C\, p_C + L\, p_L - b)\ .$$

Quindi
$\nabla\mathcal{L}(C, L, \lambda) =$
$(k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C,\ k(1-\alpha) C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L,\ b - C\, p_C - L\, p_L)$.
Le condizioni del primo ordine danno, quindi, luogo al sistema

$$\begin{cases} k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C = 0 \\ k(1-\alpha) C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L = 0 \\ b - C\, p_C - L\, p_L = 0 \end{cases}$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

La funzione Lagrangiana del problema risulta essere

$$\mathcal{L}(C, L, \lambda) = k\, C^{\alpha} L^{1-\alpha} - \lambda(C\, p_C + L\, p_L - b)\ .$$

Quindi
$\nabla\mathcal{L}(C, L, \lambda) =$
$(k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C,\ k(1-\alpha)C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L,\ b - C\, p_C - L\, p_L)$.
Le condizioni del primo ordine danno, quindi, luogo al sistema

$$\begin{cases} k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C = 0 \\ k(1-\alpha)C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L = 0 \\ b - C\, p_C - L\, p_L = 0 \end{cases}$$

La funzione Lagrangiana del problema risulta essere

$$\mathcal{L}(C, L, \lambda) = k\, C^{\alpha} L^{1-\alpha} - \lambda(C\, p_C + L\, p_L - b)\ .$$

Quindi
$\nabla\mathcal{L}(C, L, \lambda) =$
$(k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C,\ k(1-\alpha) C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L,\ b - C\, p_C - L\, p_L)$.
Le condizioni del primo ordine danno, quindi, luogo al sistema

$$\begin{cases} k\alpha C^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \lambda p_C = 0 \\ k(1-\alpha) C^{\alpha} L^{-\alpha} - \lambda p_L = 0 \\ b - C\, p_C - L\, p_L = 0 \end{cases}$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

Eliminando il moltiplicatore di Lagrange tra le prime due equazioni si ottiene

$$\frac{k\alpha C^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{p_C} = \frac{k(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha}}{p_L},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}L.$$

Sostituendo nella terza equazione del sistema si ha

$$b - \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}Lp_C - Lp_L = 0,$$

da cui

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L}.$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

Eliminando il moltiplicatore di Lagrange tra le prime due equazioni si ottiene

$$\frac{k\alpha C^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{p_C} = \frac{k(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha}}{p_L},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}L.$$

Sostituendo nella terza equazione del sistema si ha

$$b - \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}Lp_C - Lp_L = 0,$$

da cui

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L}.$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

Eliminando il moltiplicatore di Lagrange tra le prime due equazioni si ottiene

$$\frac{k\alpha C^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{p_C} = \frac{k(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha}}{p_L},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}L.$$

Sostituendo nella terza equazione del sistema si ha

$$b - \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}Lp_C - Lp_L = 0,$$

da cui

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L}.$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

Eliminando il moltiplicatore di Lagrange tra le prime due equazioni si ottiene

$$\frac{k\alpha C^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{p_C} = \frac{k(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha}}{p_L},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}L.$$

Sostituendo nella terza equazione del sistema si ha

$$b - \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}Lp_C - Lp_L = 0,$$

da cui

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L}.$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

Eliminando il moltiplicatore di Lagrange tra le prime due equazioni si ottiene

$$\frac{k\alpha C^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{p_C} = \frac{k(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha}}{p_L},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}L.$$

Sostituendo nella terza equazione del sistema si ha

$$b - \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}Lp_C - Lp_L = 0,$$

da cui

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L}.$$

# Esempio: *Il problema del produttore*

Eliminando il moltiplicatore di Lagrange tra le prime due equazioni si ottiene

$$\frac{k\alpha C^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{p_C} = \frac{k(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha}}{p_L},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}L.$$

Sostituendo nella terza equazione del sistema si ha

$$b - \frac{\alpha p_L}{(1-\alpha)p_C}Lp_C - Lp_L = 0,$$

da cui

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L}.$$

Pertanto

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L},$$

$$C_0 = \frac{b\alpha}{p_C}$$

e

$$\lambda_0 = K_0(1-\alpha)C_0^{\alpha}L_0^{-\alpha}.$$

Pertanto

$$L_0 = \frac{b(1-\alpha)}{p_L},$$

$$C_0 = \frac{b\alpha}{p_C}$$

e

$$\lambda_0 = K_0(1-\alpha)C_0^{\alpha}L_0^{-\alpha}.$$

L'Hessiana della Lagrangiana

$$H_{\mathcal{L}}(C, L, \lambda) = \begin{pmatrix} -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-2}L^{1-\alpha} & k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -p_C \\ k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha-1} & -p_L \\ -p_C & -p_L & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolandone il determinante si ottiene $detH_{\mathcal{L}} = k\alpha(1-\alpha)(p_C^2 C^{\alpha}L^{-\alpha-1} + 2p_C p_L C^{\alpha-1}L^{-\alpha} + p_L^2 C^{\alpha-2}L^{1-\alpha}) > 0$. Quindi

$$(C_0, L_0) = \left(\frac{b\alpha}{p_C}, \frac{b(1-\alpha)}{p_L}\right)$$

punto di massimo.

# Esempio: *Il problema del produttore*

L'Hessiana della Lagrangiana

$$H_{\mathcal{L}}(C,L,\lambda) = \begin{pmatrix} -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-2}L^{1-\alpha} & k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -p_C \\ k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha-1} & -p_L \\ -p_C & -p_L & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolandone il determinante si ottiene $detH_{\mathcal{L}} = k\alpha(1-\alpha)(p_C^2 C^{\alpha}L^{-\alpha-1} + 2p_C p_L C^{\alpha-1}L^{-\alpha} + p_L^2 C^{\alpha-2}L^{1-\alpha}) > 0.$
Quindi

$$(C_0, L_0) = \left(\frac{b\alpha}{p_C}, \frac{b(1-\alpha)}{p_L}\right)$$

punto di massimo.

# Esempio: *Il problema del produttore*

L'Hessiana della Lagrangiana

$$H_{\mathcal{L}}(C,L,\lambda)=\begin{pmatrix} -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-2}L^{1-\alpha} & k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -p_C \\ k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha-1} & -p_L \\ -p_C & -p_L & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolandone il determinante si ottiene $detH_{\mathcal{L}} = k\alpha(1-\alpha)(p_C^2 C^{\alpha}L^{-\alpha-1}+2p_Cp_LC^{\alpha-1}L^{-\alpha}+p_L^2C^{\alpha-2}L^{1-\alpha})>0.$

Quindi

$$(C_0,L_0)=\left(\frac{b\alpha}{p_C},\frac{b(1-\alpha)}{p_L}\right)$$

punto di massimo.

# Esempio: *Il problema del produttore*

L'Hessiana della Lagrangiana

$$H_{\mathcal{L}}(C, L, \lambda) = \begin{pmatrix} -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-2}L^{1-\alpha} & k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -p_C \\ k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha-1}L^{-\alpha} & -k\alpha(1-\alpha)C^{\alpha}L^{-\alpha-1} & -p_L \\ -p_C & -p_L & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolandone il determinante si ottiene $detH_{\mathcal{L}} = k\alpha(1-\alpha)(p_C^2 C^{\alpha}L^{-\alpha-1} + 2p_C p_L C^{\alpha-1}L^{-\alpha} + p_L^2 C^{\alpha-2}L^{1-\alpha}) > 0.$
Quindi

$$(C_0, L_0) = \left(\frac{b\alpha}{p_C}, \frac{b(1-\alpha)}{p_L}\right)$$

punto di massimo.