Funzioni Numeriche

Funzioni numeriche

- funzioni di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ (successioni)
- funzioni di $X \subseteq \mathbb{R}$.

Definizioni principali

- Minimo e massimo,
- estremo inferiore e superiore,
- Grafico
- Monotonia
- Campo di esistenza

Richiami

Massimo e minimo di un insieme

Sia A un sottoinsieme di un insieme numerico B, si definisce

- minimo di A, se esiste, quell'elemento di A minore o uguale ad ogni altro elemento di A:

$$min\,A \leqslant x, \ \forall x \in A$$

- massimo di A, se esiste, quell'elemento di A maggiore o uguale ad ogni altro elemento di A:

$$max\,A \geqslant x, \ \forall x \in A$$

Richiami

Estremo inferiore di un insieme

Sia A un sottoinsieme di un insieme numerico B,

- si definisce minorante di A, ogni elemento di B minore o uguale ad ogni altro elemento di A.
- si indica con A_{min} l'insieme dei minoranti di A

$$b \in A_{min} \Leftrightarrow b \in B, \;\; b \leqslant x, \; \forall x \in A$$

- se $A_{min} \neq \emptyset$ (ovvero esistono minoranti per l'insieme A) allora A viene detto limitato inferiormente
- se $A_{min} = \emptyset$ (ovvero non esistono minoranti per l'insieme A) allora A viene detto illimitato inferiormente
- si definisce estremo inferiore di A, se esiste, il massimo dei minoranti

$$infA = maxA_{min}$$

Richiami

Estremo superiore di un insieme

Sia A un sottoinsieme di un insieme numerico B,

- si definisce maggiorante di A, ogni elemento di B maggiore o uguale ad ogni altro elemento di A.
- si indica con A_{mag} l'insieme dei maggioranti di A

$$b \in A_{mag} \Leftrightarrow b \in B, \;\; b \geqslant x, \;\forall x \in A$$

- se $A_{mag} \neq \emptyset$ (ovvero esistono maggioranti per l'insieme A) allora A viene detto limitato superiormente
- se $A_{mag} = \emptyset$ (ovvero non esistono maggioranti per l'insieme A) allora A viene detto illimitato superiormente
- si definisce estremo superiore di A, se esiste, il minimo dei maggioranti

$$supA = minA_{mag}$$

Richiami

Esistenza estremi di un insieme

Dato l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$,

- ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente ammette estremo inferiore,
- ogni suo sottoinsieme limitato superiormente ammette estremo superiore.

Esistenza estremi di un insieme

Risulta utile definire un estremo inferiore (superiore) anche per insiemi non limitati inferiormente (superiormente).

- Se A è illimitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$,
- Se A è illimitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$.

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette estremo inferiore e estremo superiore.

Richiami

Estremi di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

- Se A è limitato inferiormente, allora $\inf A \in \mathbb{R}$,
- Se A è illimitato inferiormente, allora $\inf A = -\infty$,
- Se A è limitato superiormente, allora $\sup A \in \mathbb{R}$,
- Se A è illimitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$.

Minimo assoluto di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\min_{x \in X} f(x)$ si indica il **minimo assoluto di f per $x \in X$**.

Il minimo assoluto di f corrisponde al minimo assoluto dell'immagine della funzione:
$\min_{x \in X} f(x) = \min f(X)$.

Di conseguenza

$$\min_{x \in X} f(x) \leqslant f(x) \ \forall x \in X.$$

Punto di minimo assoluto

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Un valore x_0 nel quale si realizza il minimo $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ si definisce **punto di minimo assoluto per la funzione f**.

Massimo assoluto di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\max_{x \in X} f(x)$ si indica il **massimo assoluto di f per $x \in X$**.

Il massimo assoluto di f corrisponde al massimo assoluto dell'immagine della funzione:
$\max_{x \in X} f(x) = \max f(X)$.

Di conseguenza

$$\max_{x \in X} f(x) \geqslant f(x) \; \forall x \in X.$$

Punto di minimo assoluto

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Un valore x_0 nel quale si realizza il massimo $f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)$ si definisce **punto di massimo assoluto per la funzione f**.

Osservazioni

- Il minimo e il massimo assoluto di una funzione sono elementi del codominio della funzione.
- I punti di minimo e i punti di massimo di una funzione sono elementi del dominio della funzione.
- Il minimo assoluto e il massimo assoluto, se esistono, sono unici.
- I punti di minimo e i punti di massimo assoluto possono essere più di uno.

Esempio

Siano $X = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \in X \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1^2 + 1 = 2, \\
f(2) &= 2^2 + 1 = 5, \\
f(3) &= 3^2 + 1 = 10, \\
f(4) &= 4^2 + 1 = 17.
\end{aligned}
$$

- minimo di $f = 2$ con $x = 1$ punto di minimo,
- massimo di $f = 17$ con $x = 4$ punto di massimo.

Esempio

Siano $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ e
$f : x \in X \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min\limits_{x \in X} f(x)$ e $\max\limits_{x \in X} f(x)$.

$f(0) = 1$
$f(1) = 1^2 + 1 = 2$, $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$,
$f(2) = 2^2 + 1 = 5$, $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$,
$f(3) = 3^2 + 1 = 10$, $f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$,
$f(4) = 4^2 + 1 = 17$, $f(-4) = (-4)^2 + 1 = 17$.

- minimo di $f = 1$ con $x = 0$ punto di minimo,
- massimo di $f = 17$ con $x = -4$ e $x = 4$ punto di massimo.

Esempio

Sia $f : x \in \mathbb{Z} \to 1 - x^2 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min_{x \in \mathbb{Z}} f(x)$ e $\max_{x \in \mathbb{Z}} f(x)$.

$f(0) = 1$
$f(1) = 0$, $f(-1) = 0$,
$f(2) = -3$, $f(-2) = -3$,
$f(3) = -8$, $f(-3) = -8$,
$f(4) = -15$, $f(-4) = -15$.

- $\nexists$ minimo di f,
- massimo di $f = 1$ con $x = 0$ punto di massimo.

Estremo inferiore di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\inf_{x \in X} f(x)$ si indica **l'estremo inferiore di f per $x \in X$**.

L'estremo inferiore di f corrisponde all'estremo inferiore dell'immagine della funzione:
$\inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X)$.

Se l'estremo inferiore è

- finito allora la funzione si dice limitata inferiormente;
- $-\infty$ allora la funzione si dice illimitata inferiormente.

Estremo superiore di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ si indica **l'estremo superiore di f per $x \in X$**.

L'estremo superiore di f corrisponde all'estremo superiore dell'immagine della funzione:
$\sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup f(X)$.

Se l'estremo superiore è

- finito allora la funzione si dice limitata superiormente;
- $+\infty$ allora la funzione si dice illimitata superiormente.

Funzioni limitate

Una funzione limitata sia superiormente sia inferiormente si dice limitata

- $\exists \min_{x \in X} f(x) \Rightarrow \exists \inf_{x \in X} f(x)$ e $\min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \max_{x \in X} f(x) \Rightarrow \exists \sup_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \inf_{x \in X} f(x) \not\Rightarrow \exists \min_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \sup_{x \in X} f(x) \not\Rightarrow \exists \max_{x \in X} f(x)$.

Esempio

Siano $X = [1,2[\subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \in X \to -2x \in \mathbb{R}$.

Si osservi che
$1 \leqslant x < 2 \Rightarrow (-2) \cdot 1 \geqslant -2x > -2 \cdot 2 \Rightarrow -2 \geqslant -2x > -4$.
Pertanto $f(X) =]-4, -2]$.

- $\inf_{x \in X} f(x) = -4$ e $\nexists \min_{x \in X} f(x)$,
- $\sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = -2$ con $x = 1$ punto di massimo.

Funzioni monotone

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica.

Se $\forall x_1$ e x_2 in X con $x_1 < x_2$

- $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, la funzione f si dice crescente
- $f(x_1) < f(x_2)$, la funzione f si dice strettamente crescente
- $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, la funzione f si dice decrescente
- $f(x_1) > f(x_2)$, la funzione f si dice strettamente decrescente

Una funzione che gode di una delle proprietà precedenti viene detta monotona.

Funzioni lineari e affini

Siano a e b appartententi a $\mathbb{R}$ con $a > 0$. Sia
$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$.

Si osservi che $\forall x_1$ e x_2 in X con $x_1 < x_2$
$f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$
quindi la funzione f è strettamente crescente

Funzioni lineari e affini

In generale una funzione lineare $f(x) = ax$ e una funzione affine $f(x) = ax + b$ sono

- strettamente crescenti se $a > 0$,
- strettamente decrescenti se $a < 0$,
- costanti (contemporaneamente crescenti e decrescenti) se $a = 0$.

Funzioni quadratiche

Sia a appartentente a $\mathbb{R}$ con $a > 0$. Sia
$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = ax^2 \in \mathbb{R}$.

Si osservi che
$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = ax_1^2 < ax_2^2 = f(x_2)$
mentre
$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow f(x_1) = ax_1^2 > ax_2^2 = f(x_2)$

- strettamente crescenti se $x \in [0, +\infty[$,
- strettamente decrescenti se $x \in]-\infty, 0]$.

Monotonia di funzioni composte

Siano

- $f : X \to Y$
- $g : Y \to Z$

Considerata la funzione composta $h = g \circ f$ si ha

- se f e g sono entrambe (strettamente) crescenti o decrescenti h è (strettamente) crescente;
- se f e g sono una (strettamente) crescente, l'altra (strettamente) decrescente h è (strettamente) decrescente.

Monotonia dell'inversa

Una $f : X \to f(X)$ strettamente monotone è

- iniettiva
- suriettiva

quindi è biunivoca e invertibile.

La funzione inversa $f^{-1} : f(X) \to X$
è (strettamente) monotona.

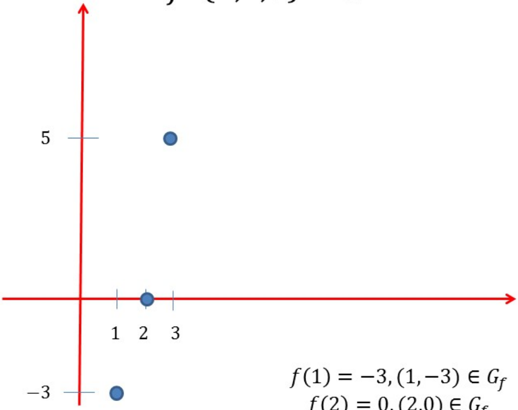
Grafico di una funzione

Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si definsce Grafico di f l'insieme delle coppie ordinate
$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Il grafico di una funzione numerica si rappresenta con un opportuno insieme di punti del piano.

Esempi

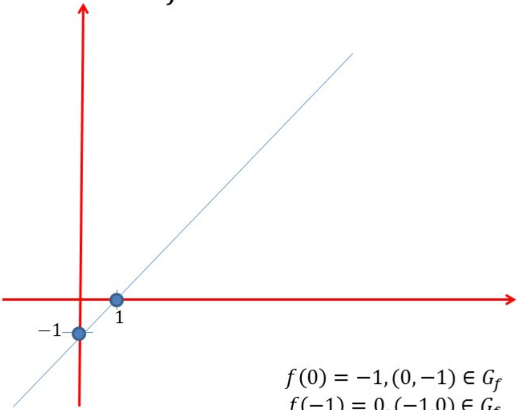
$$f:\{1,2,3\} \to x^2 - 4$$



$$f(1) = -3, (1,-3) \in G_f$$
$$f(2) = 0, (2,0) \in G_f$$
$$f(3) = 5, (3,5) \in G_f$$

Esempi

$$f: x \rightarrow x - 1$$



$$f(0) = -1, (0, -1) \in G_f$$
$$f(-1) = 0, (-1, 0) \in G_f$$

Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ è caratterizzata da

Un insieme di partenza $X \subseteq \mathbb{R}$ **Dominio** Campo di esistenza	Una legge di corrispondenza	Un insieme di arrivo $Y \subseteq \mathbb{R}$ **Codominio** Campo dei valori

Campo di esistenza di una funzione

Data una legge di corrispondenza si definisce campo di esistenza della funzione e viene generalmente indicato con $E[f]$ il più grande insieme di numeri reali nel quale la legge può essere definita.

Osservazione

Il dominio di una funzione deve essere un sottoinsieme del suo campo di esistenza.

Esempi

Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
2. $f(x) = x^2 - 1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$

1. $E[f] = \mathbb{R} - \{1\}$
2. $E[f] = \mathbb{R}$
3. $E[f] = [0, +\infty)$

ricerca del campo di esistenza

La ricerca del campo di esistenza di una funzione richiede, in generale, in diversi passi

1. decomposizione della legge di associazione nelle sue componenti;
2. calcolo dei campi di esistenza delle componenti;
3. opportuna combinazione di tali insiemi.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x+3}{x^2-x}$$

1. $f = f_1 + f_2 \Rightarrow E[f] = E[f_1] \cap E[f_2]$,
2. $f_1 = \sqrt{x-1} \Rightarrow x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$,
3. $f_2 = \frac{x+3}{x^2-x} \Rightarrow x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $x \neq 1$,
4. $E[f_1] = [1, +\infty)$, $E[f_2] = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow$
   $E[f] = [1, +\infty) \cap ((-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)) = (1, +\infty)$.