Funzioni elementari

Funzione potenza

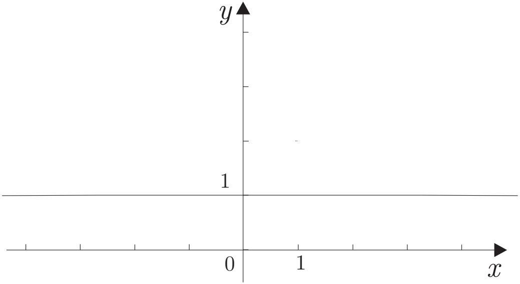
Fissato $n \in \mathbb{N}_0$ la funzione

$$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

si chiama funzione **potenza *n*-ma.**

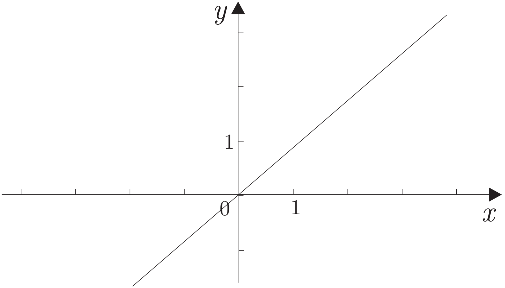
Casi particolari

$$n = 0 \;\Rightarrow\; f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^0 = 1 \in \mathbb{R}$$



Casi particolari

$$n = 1 \;\Rightarrow\; f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^1 = x \in \mathbb{R}$$

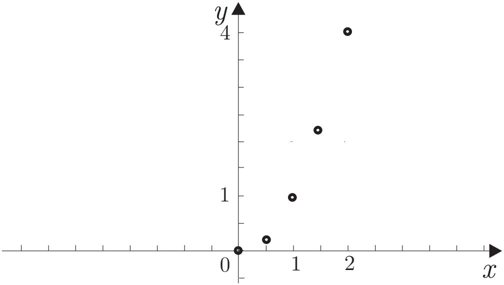


Funzione identica

Casi particolari

$$n = 2 \ \Rightarrow \ f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$$

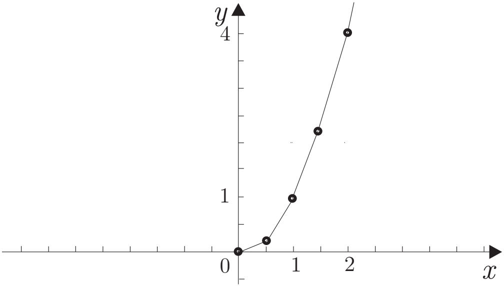
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4



Casi particolari

$$n = 2 \ \Rightarrow \ f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$$

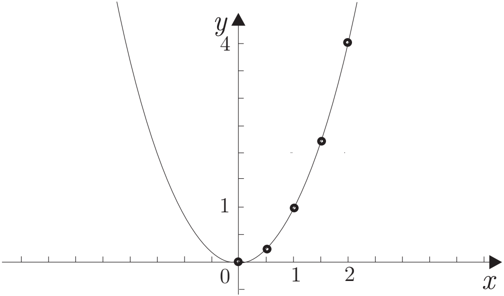
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4



Casi particolari

$$n = 2 \;\Rightarrow\; f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$$

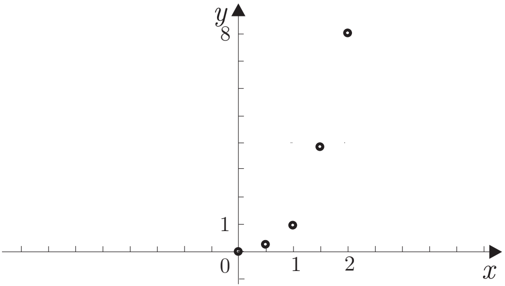
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4



Casi particolari

$$n = 3 \;\Rightarrow\; f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$$

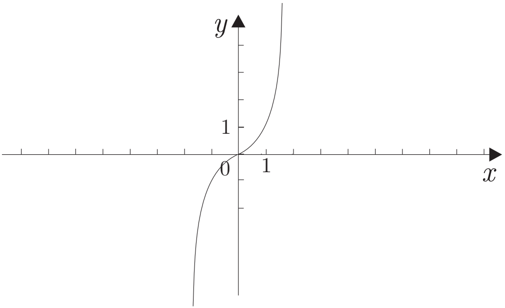
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x) = x^3$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8



Casi particolari

$$n = 3 \;\Rightarrow\; f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$$

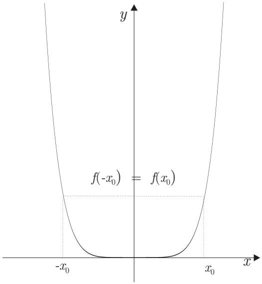
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x) = x^3$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8



Proprietà della funzione potenza n-ma

Osserviamo che, se n è pari

- $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^n < {x_2}^n \Leftrightarrow$ la restrizione della funzione a $[0, +\infty)$ è **strettamente crescente** su $[0, +\infty)$.
- $(-x)^n = x^n \Rightarrow$ la funzione potenza n-ma è una **funzione pari**.



Osserviamo che, se n è dispari

- $x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^n < {x_2}^n \Leftrightarrow$ la funzione è **strettamente crescente**;
- $(-x)^n = -x^n \Rightarrow$ la funzione potenza n-ma è una **funzione dispari**.

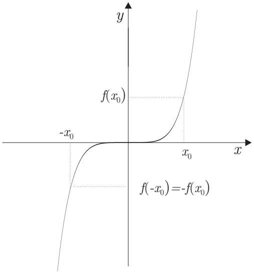
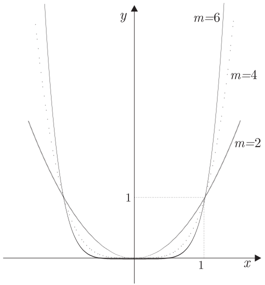
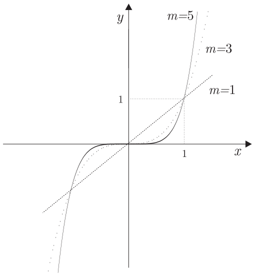


Grafico Potenza





Proprietà della funzione potenza n-ma

La funzione potenza n-ma è

- per ogni n dispari
  - illimitata inferiormente, illimitata superiormente:
    $\sup x^n = +\infty, \quad \inf x^n = -\infty$
- per ogni n pari
  - limitata inferiormente, illimitata superiormente:
    $\sup x^n = +\infty, \quad \inf x^n = \min f(x) = 0$

La restrizione della funzione potenza nell'intervallo $[0, +\infty)$

$$f : x \in [0, +\infty) \to f(x) = x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile:

$$\forall y \in [0, +\infty) \quad \exists ! x \in [0, +\infty) \ : x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

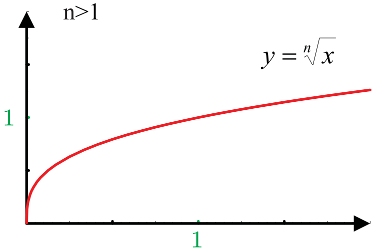
L'inversa di tale restrizione si dice **Radice n-ma**

Funzione radice n-ma

$$f : x \in [0, +\infty) \to y = f(x) = \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty), \; n \in \mathbb{N}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione radice n-ma è una funzione **strettamente crescente.**

$$\min \; f(x) = 0 \;\; ; \;\; \sup \; f(x) = +\infty$$



Proprietà dell'operazione di potenza

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ \cdots \ x}_{n \ \ volte} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad\qquad x \geq 0$$

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad\qquad x \neq 0$$

$$x^{-n} \cdot x^n = x^{n-n} = x^0 = 1$$

$$\frac{1}{x^n} \cdot x^n = 1$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R},\ a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots \ a}_{b\ \ volte}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\},\ a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty),\ a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty),\ a^b = ?$$

Teorema

Per ogni $a \in]0, +\infty)$, risulta che:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : \; b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\left(\frac{1}{2}\right)^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Potenza con esponente reale 2

$$\forall b \in \mathbb{R} \text{ siano } \begin{cases} \mathrm{A}_b = \{x \in \mathbb{Q} : x < b\} \\ \mathrm{B}_b = \{y \in \mathbb{Q} : y > b\} \end{cases}$$

Tranne che per $a = 1$, gli insiemi:

$$\overline{\mathrm{A}}_b = \{a^x, x \in \mathrm{A}_b\} \text{ e } \overline{\mathrm{B}}_b = \{a^y, y \in \mathrm{B}_b\}$$

sono **separati** : ogni elemento di uno minore di ogni elemento dell'altro. Si dimostra che sono, anche, **contigui** : l'estremo superiore di uno uguale all'estremo inferiore dell'altro ; tale valore comune si chiama **elemento di separazione** tra i due insiemi.

Definizione di potenza con esponente reale

Definizione:
si indica con il simbolo a^b l'elemento di separazione tra gli insiemi

$$\overline{\mathrm{A}}_b \text{ e } \overline{\mathrm{B}}_b$$

dove:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{A}}_b &= \{a^x, x \in \mathbb{Q} : x < b\} \\ \overline{\mathrm{B}}_b &= \{a^y, y \in \mathbb{Q} : y > b\} \end{aligned}$$

Propriet della potenza ad esponente reale

Valgono tutte le proprietà note della potenza con esponente razionale

$$\forall a, b, r, s \in \mathbb{R}, a > 0, \ b > 0$$

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $a < b, \ r > 0 \Rightarrow a^r < b^r$
- $a < b, \ r < 0 \Rightarrow a^r > b^r$
- $a > 1, \ r < s \Rightarrow a^r < a^s$
- $a < 1, \ r < s \Rightarrow a^r > a^s$

Funzione esponenziale

Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, la funzione:

$$\exp_a : x \in \mathbb{R} \to \exp_a(x) = a^x \in \mathbb{R}^+$$

si chiama funzione esponenziale.
Osserviamo che:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} < a^{x_2} & a > 1 \\ a^{x_1} = a^{x_2} = 1 & a = 1 \\ a^{x_1} > a^{x_2} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

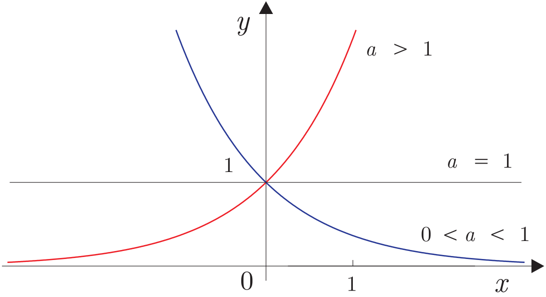
- strettamente crescente per $a > 1$
- costante per $a = 1$
- strettamente decrescente per $0 < a < 1$

La funzione esponenziale è:
tranne che per $a = 1$,

- limitata inferiormente
- illimitata superiormente

$$\sup \exp_a(x) = +\infty \quad ; \quad \inf \exp_a(x) = 0$$

Grafico della funzione esponenziale



Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$
$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathbb{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$.
L'inversa della funzione esponenziale si dice **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \to x = \log_a y \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+.$$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(c \cdot b)$;
- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c)$;
- $b \log_a c = \log_a(c^b)$;
- $\log_a c = \log_b c / \log_b a$;
- $a = b^{\log_b a}$;
- $a^c = b^{c \log_b a}$.

Funzione logaritmica

Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, la funzione logaritmica

$$\log_a : x \in]0, +\infty) \to \log_a x \in \mathbb{R}$$

è:

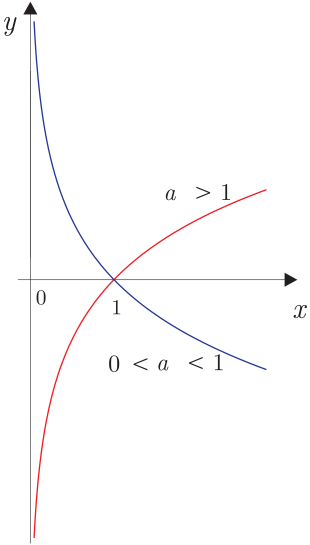
- strettamente crescente per $a > 1$
- strettamente decrescente per $0 < a < 1$

La funzione logaritmica è:

- illimitata inferiormente
- illimitata superiormente

$$\sup \log_a(x) = +\infty \quad ; \quad \inf \log_a(x) = -\infty$$

Funzione logaritmo



Funzione potenza con esponente reale

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f : x \in [0, +\infty) \to f(x) = x^\alpha \in [0, +\infty), \quad \alpha > 0$$

$$f : x \in]0, +\infty) \to f(x) = x^\alpha \in]0, +\infty), \quad \alpha < 0$$

si chiama **funzione potenza con esponente reale**.

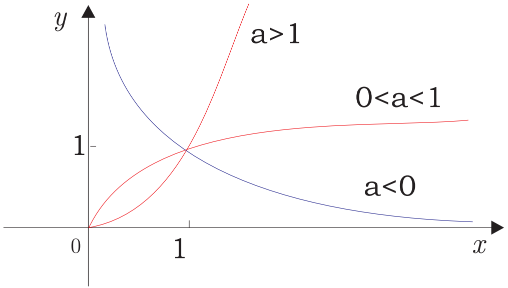
La funzione potenza con esponente reale è:

- strettamente crescente per $\alpha > 0$
- strettamente decrescente per $\alpha < 0$

La funzione risulta:

- limitata inferiormente,
- illimitata superiormente

$$\sup x^\alpha = +\infty \quad ; \quad \inf x^\alpha = 0$$


y
a>1
0<a<1
1
a<0
0
1
x

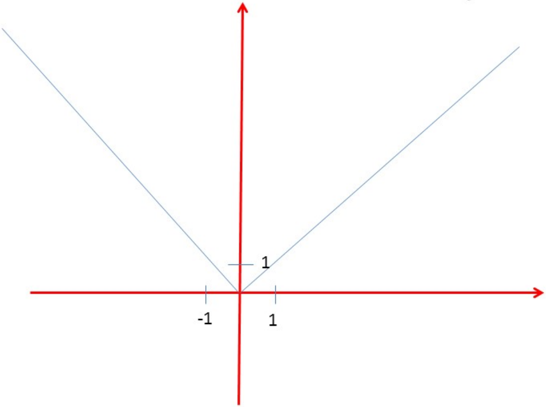
La funzione

$$\mathrm{abs} : x \in \mathbb{R} \to \mathrm{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

si chiama funzione valore assoluto.

Esempi

$$f : x \to |x|$$



Proprietà del Valore Assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \leq a$$

- Se $a < 0$, la disequazione non ammette soluzioni.
- Se $a = 0$ la disequazione è soddisfatta per $x = 0$.
- Se $a > 0$, la disequazione è soddisfatta per $-a \leq x \leq a \;\Leftrightarrow\; x \in [-a, a]$;

infatti se $a > 0$ la disequazione equivale

$$\begin{cases} -x \leq a \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ossia

$$[-a, 0[\cup[0, a].$$

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$$

Proprietà del Valore Assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \geq a.$$

- Se $a \leq 0$ la disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $a > 0$, la disequazione è soddisfatta per $x \leq -a \vee x \geq a$.

Infatti se $a > 0$, la disequazione equivale a

$$\begin{cases} -x \geq a \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

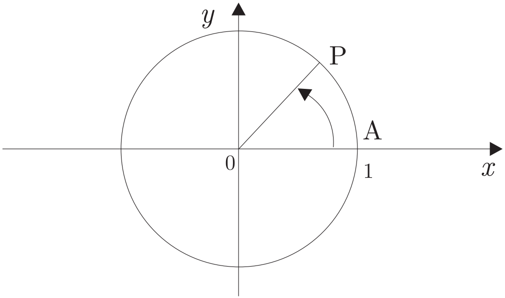
ossia

$$x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[.$$

Diseguaglianza triangolare

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \left|\ |x| - |y|\ \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Misura degli angoli



Un angolo può essere misurato:

- mediante il confronto rispetto ad un angolo unitario (misura in gradi);
- attraverso la lunghezza dell'arco AP (misura in radianti).

Relazione tra gradi e radianti

Angolo giro = 360° = 2π radianti

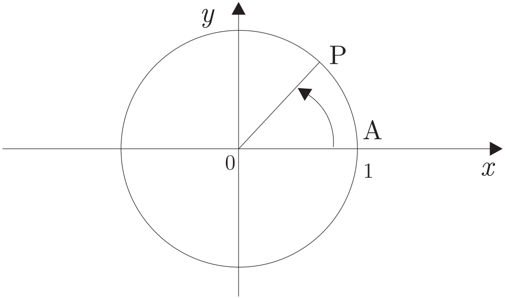
Angolo piatto = 180° = π radianti

$$\frac{\text{misura in gradi}}{180^\circ} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}\ \textit{radianti} &\Leftrightarrow 45^\circ \\ 1\ \textit{radiante} &\Leftrightarrow \simeq (57.297469)^\circ \\ 1^\circ &\Leftrightarrow \simeq 0.0174528\ \textit{radianti} \end{aligned}$$

Nel seguito gli angoli verranno misurati, esclusivamente, in radianti.

Consideriamo un circonferenza con raggio unitario e con centro nell'origine degli assi.



Un angolo, posizionato sulla circonferenza in modo che un lato coincida con la semiretta positiva dell'asse delle *x*, l'altro posto in senso levogiro, identifica un punto P. Viceversa, fissato un punto P sulla circonferenza resta individuato l'angolo $\widehat{\mathrm{AOP}}$ che il segmento OP forma con l'asse delle *x*.

Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ la misura dell'angolo $\widehat{AOP}$,

- il numero $-\alpha$ è la misura dell'angolo $\widehat{AOP'}$ di ampiezza uguale al precedente con P′ simmetrico di P rispetto all'asse delle *x*;
- al variare di *k* in $\mathbb{Z}$, i numeri $\alpha + k \cdot 2\pi$ denotano lo stesso angolo; la misura che ricade nell'intervallo $[0, 2\pi[$ viene detta **misura principale**

$$\begin{array}{rcl} \text{misura angolo} & & \text{misura pricipale} \\ \pi/4 & \Leftrightarrow & \pi/4 \\ 3\pi & \Leftrightarrow & \pi \\ -\pi/4 & \Leftrightarrow & \dfrac{7\pi}{4} \end{array}$$

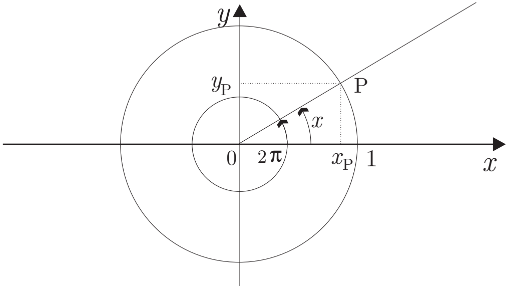
Funzioni trigonometriche

Considerata una circonferenza **C** di raggio unitario con il centro in un sistema di assi coordinati, esiste una funzione:

$$f : x \in \mathbb{R} \to P \in \mathbf{C}$$

$$f(x) = f(x + k2\pi)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

funzione periodica di periodo 2π



$$x \in \mathbb{R} \to P \in \mathbf{C} \to (x_P, y_P)$$

- $\cos : x \in \mathbb{R} \to \cos x = x_P \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{sen} : x \in \mathbb{R} \to \mathrm{sen} x = y_P \in \mathbb{R}$

Funzione tangente

Per ogni x per cui $\cos x \neq 0$, è possibile definire il rapporto $\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$:

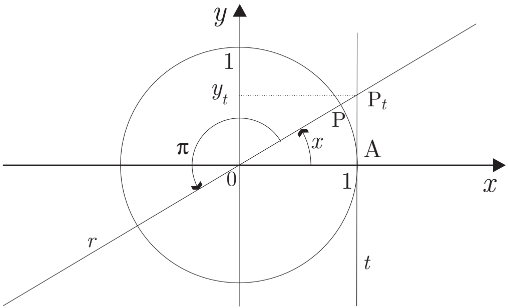
$$\mathrm{tg} : x \in \mathbb{R} - A \to \mathrm{tg}x = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x} \in \mathbb{R}$$

dove

$$A = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Funzione tangente

Geometricamente:



$\mathrm{tg} x = y_t =$ ordinata del punto P_t

Funzione cotangente

Per ogni x per cui $\mathrm{sen} x \neq 0$, è possibile definire il rapporto $\frac{\cos x}{\mathrm{sen} x}$:

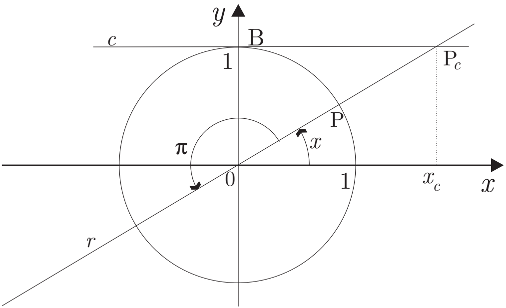
$$\mathrm{cotg} : x \in \mathbb{R} - B \to \mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen} x} \in \mathbb{R}$$

dove

$$B = \{x = k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Funzione cotangente

Geometricamente:



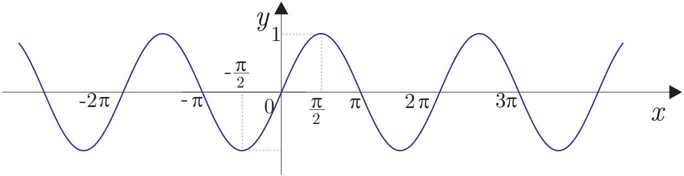
$\mathrm{cotg}\, x = x_c =$ ascissa del punto P_c

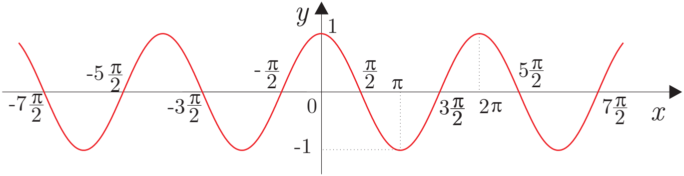
Nell'intervallo $[0, \pi/2]$ alcuni valori possono essere ricavati con semplici considerazioni geometriche:

	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0	0	1	0	$\nexists$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	$\nexists$	0

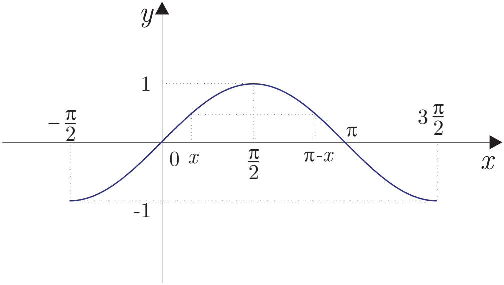
Proprietà delle funzioni seno e coseno

Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π



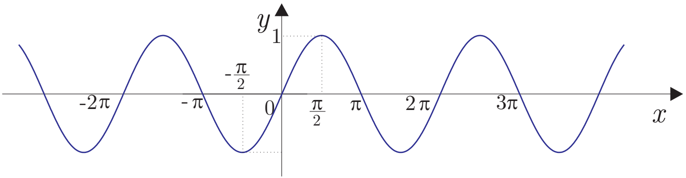


Funzione Seno



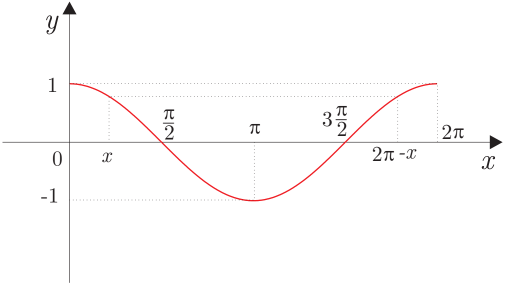
- $E[\mathrm{sen}x] = \mathbb{R}$; $\mathrm{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- $\min \mathrm{sen}x = -1$, $x = -\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\max \mathrm{sen}x = 1$, $x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Funzione Seno



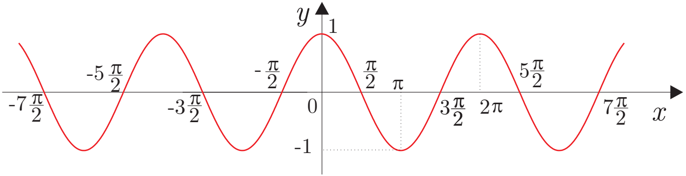
- la funzione è strettamente
    - **decrescente** in ogni intervallo $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$;
    - **crescente** in ogni intervallo $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$;
    - dispari $\Leftrightarrow \mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x)$.

Funzione Coseno



- $E[\cos x] = \mathbb{R}$; $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- $\min \cos x = -1$, $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\max \cos x = 1$, $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

Funzione Coseno

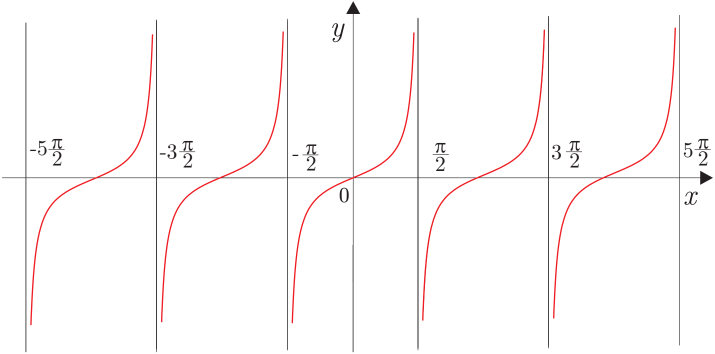


La funzione coseno è

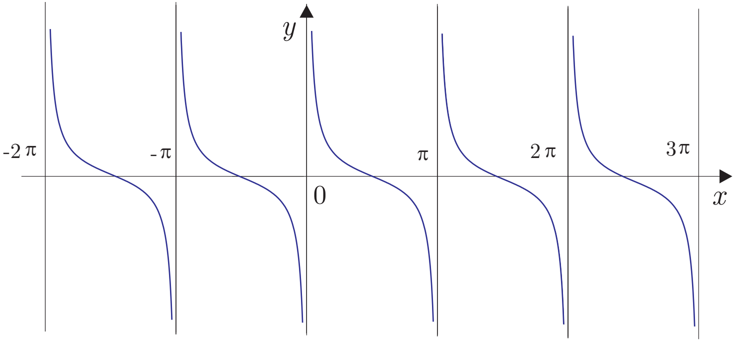
- strettamente decrescente in ogni intervallo $[2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$;
- strettamente crescente in ogni intervallo $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], k \in \mathbb{Z}$.
- pari $\Leftrightarrow$ $\cos(-x) = \cos(x)$.

Funzione Tangente

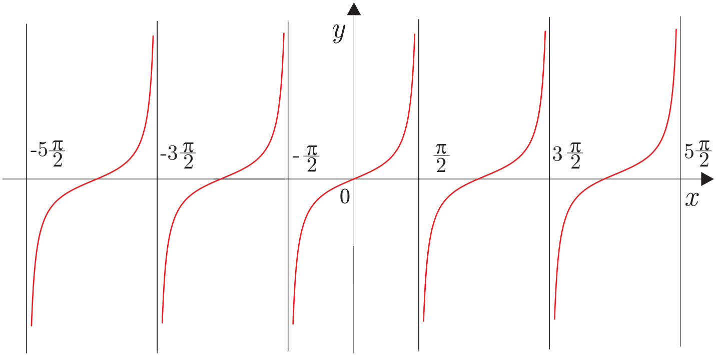
La funzione tangente è periodica di periodo π



La funzione cotangente è periodica di periodo π

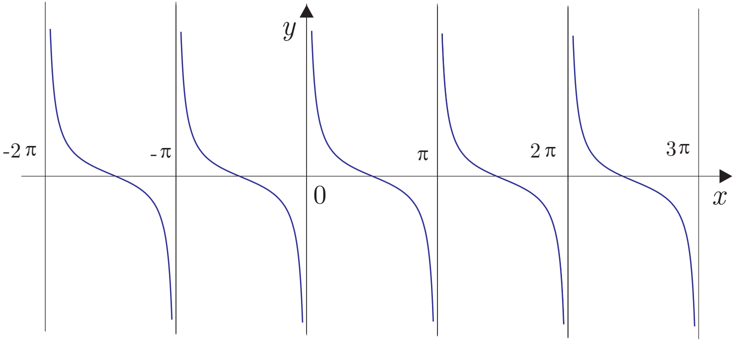


Funzione Tangente



- E[$\mathrm{tg}x$] = $\mathbb{R} - \{a : a = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
  $\mathrm{tg}(\mathbb{R} - \{a : a = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}) = \mathbb{R}$
- $\inf \mathrm{tg}x = -\infty$; $\sup \mathrm{tg}x = +\infty$
- la funzione è strettamente crescente in ogni intervallo $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$;
- la funzione è dispari $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$.

Cotangente



- E[$\operatorname{cotg} x$] = $\mathbb{R} - \{b : b = +k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
  $\operatorname{cotg}(\mathbb{R} - \{b : b = +k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ = $\mathbb{R}$
- $\inf \operatorname{cotg} x = -\infty$; $\sup \operatorname{cotg} x = +\infty$
- la funzione è strettamente decrescente in ogni intervallo $]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$; la funzione è dispari $\Leftrightarrow \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x)$.

Funzione Arcoseno

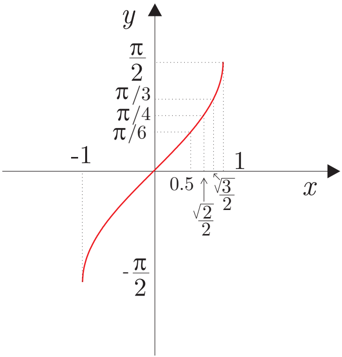
La restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1,1]\ \exists\, !x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \ \mathrm{sen} x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{arcsen} y$$

L'inversa della restrizione della funzione seno si chiama **Arcoseno**.

$$\mathrm{arcsen} : y \in [-1,1] \to x = \mathrm{arcsen} y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Funzione Arcoseno



- E[arcsen x] = $[-1, 1]$; arcsen($[-1, 1]$) = $[-\pi/2, \pi/2]$
- min arcsen $x = -\pi/2, x = -1$; max arcsen$x = \pi/2$, $x = 1$;
- strettamente crescente;
- iniettiva e suriettiva su $[-\pi/2, \pi/2]$.

Funzione Arcocoseno

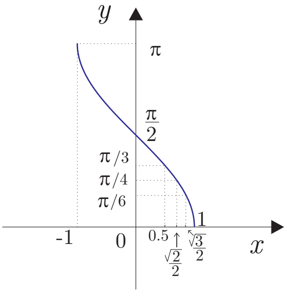
La restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \; \exists \, ! x \in [0, \pi] : \; \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

L'inversa della restrizione della funzione coseno si chiama **Arcocoseno**.

$$\arccos : y \in [-1, 1] \to x = \arccos y \in [0, \pi].$$

Funzione Arcocoseno



- E[arccos x] = $[-1, 1]$; arccos($[-1, 1]$) = $[0, \pi]$
- $\min \arccos x = 0$, $x = 1$; $\max \arccos x = \pi$, $x = -1$;
- strettamente decrescente.
- iniettiva e suriettiva su $[0, \pi]$.

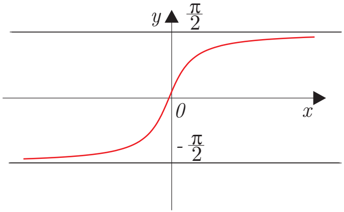
Funzione Arcotangente

La restrizione della funzione tangente all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists\ !x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[:\ \mathrm{tg} x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg} y.$$

L'inversa della restrizione della funzione tangente si chiama **Arcotangente**.

$$\mathrm{arctg} : y \in \mathbb{R} \to x = \mathrm{arctg} y \in]-\pi/2, \pi/2[.$$



- $E[\mathrm{arctg} x] = \mathbb{R}$; $\mathrm{arctg}(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$
- $\inf \mathrm{arctg} x = -\pi/2$; $\sup \mathrm{arctg} x = \pi/2$;
- strettamente crescente.
- iniettiva e suriettiva su $]-\pi/2, \pi/2[$.

Funzione Arcocotangente

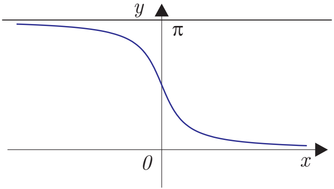
La restrizione della funzione cotangente all'intervallo $]0,\pi[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists\ !x \in]0,\pi[:\ \operatorname{cotg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} y.$$

L'inversa della restrizione della funzione cotangente si chiama **Arcocotangente**.

$$\operatorname{arcctg} : y \in \mathbb{R} \to x = \operatorname{arcctg} y \in]0,\pi[.$$

Funzione Arcocotangente



- E[arcctg x] = $\mathbb{R}$; $\text{arcctg}(\mathbb{R}) =]0, \pi[$
- $\inf \text{arcctg} x = 0$; $\sup \text{arcctg}\, x = \pi$;
- strettamente decrescente.
- iniettiva e suriettiva su $]0, \pi[$.