Derivata

Rapporto incrementale di una funzione

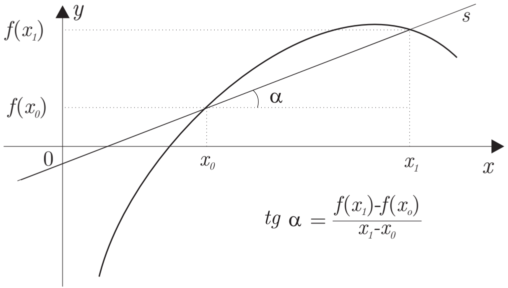
Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

La funzione
$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
si chiama ***rapporto incrementale di f relativo al punto x_0***.

$E[g_{x_0}] = X - \{x_0\}$.

Interpretazione geometrica

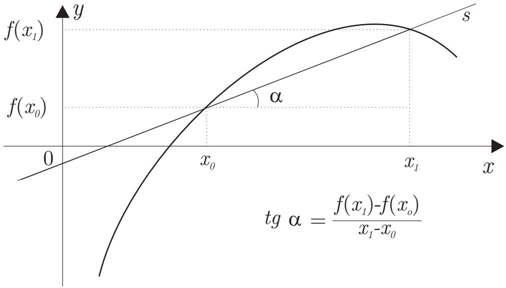
Sia s la retta che passa per i punti
$P_0 \equiv (x_0, f(x_0)),\ P_1 \equiv (x_1, f(x_1))$.



Essa ha equazione

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Interpretazione geometrica



Il coefficiente angolare di s coincide con il valore assunto dal rapporto incrementale nel punto x_1

$$g_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Derivata di una funzione in x_0

Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} g_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso si definisce ***derivata di f in x_0***.

La derivata di f in x_0 si indica con:

$$D[f(x)]_{x=x_0}.$$

Derivata destra

Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.
Se esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} g_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso si definisce ***derivata destra di*** f ***in*** x_0 e si indica con:

$$D_d[f(x)]_{x=x_0}.$$

Derivata sinistra

Analogamente, se esiste

$$\lim_{x \to x_0^-} g_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso si definisce ***derivata sinistra di*** f ***in*** x_0 e si indica con:

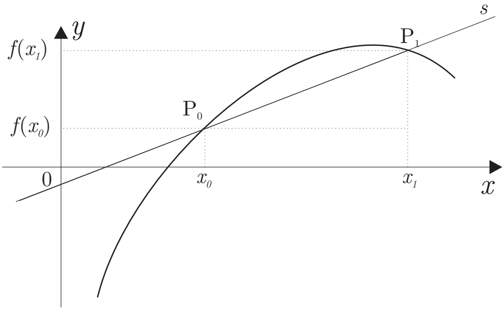
$$D_s[f(x)]_{x=x_0}.$$

La derivata di f in x_0 può essere

- finita; $\Leftrightarrow D[f(x)]_{x=x_0} \in \mathbb{R}$.
  In questo caso si dice che la funzione è ***derivabile in*** x_0.
- non finita; $\Leftrightarrow D[f(x)]_{x=x_0} = \pm\infty$.

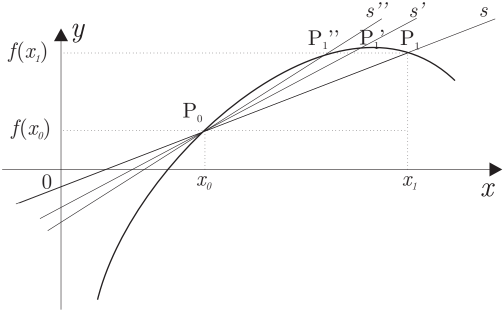
Interpretazione geometrica

Siano $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, x_1 \in X$.
Consideriamo la retta che passa per i punti $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$ e $P_1 \equiv (x_1, f(x_1))$.



Se si sposta il punto P_1 lungo la curva di equazione $y = f(x)$ avvicinandolo a P_0, la retta secante ruota intorno a P_0.

Interpretazione geometrica



Esiste una retta ”posizione limite” per le rette secanti il grafico della funzione al tendere di P_1 a P_0?

Interpretazione geometrica

Equazione retta secante:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

La retta esiste se:

$$\exists \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Updownarrow$$

il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0 è regolare in x_0 $\Leftrightarrow$ se esiste la derivata di f in x_0.
Se tale retta esiste, si chiama:
retta tangente al grafico della funzione nel punto x_0.
Problema: scrivere l'equazione della retta tangente.

Retta tangente: caso finito

Equazione retta secante:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

$D[f(x)]_{x=x_0} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ La funzione è derivabile in x_0
la retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto x_0 ha coefficiente angolare dato da:

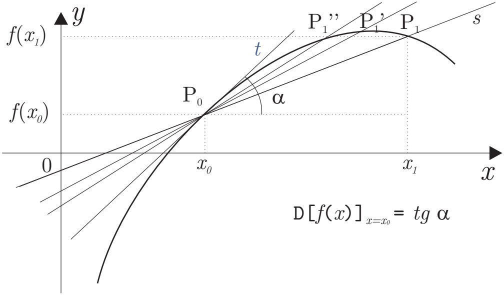
$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = D[f(x)]_{x=x_0} \in \mathbb{R}$$

L'equazione della retta tangente è pertanto:

$$y = D[f(x)]_{x=x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Retta tangente: caso finito

Geometricamente:



Equazione retta secante:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

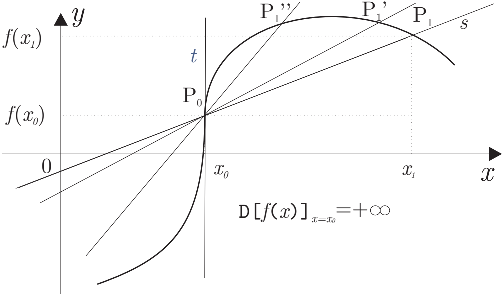
$D[f(x)]_{x=x_0} = \pm\infty$

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = D[f(x)]_{x=x_0} = \pm\infty$$

La retta tangente è la retta verticale passante per P_0.
La sua equazione è: $x = x_0$.

Retta tangente: caso infinito

Geometricamente:

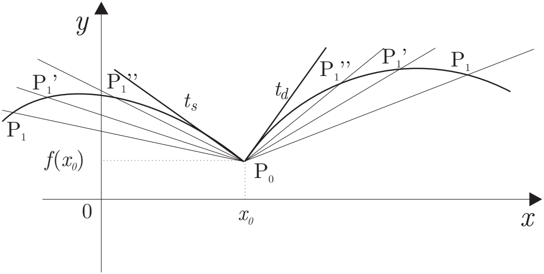


Tangente destra e sinistra

Se esistono la derivata destra e la derivata sinistra di f in x_0 ed esse sono diverse, non esiste una retta tangente in x_0.

- esiste la derivata destra $\Rightarrow$ le rette secanti ottenute con punti a destra di P_0 hanno una posizione limite: **tangente destra**;
- esiste la derivata sinistra $\Rightarrow$ le rette secanti ottenute con punti a sinistra di P_0 hanno una diversa posizione limite: **tangente sinistra.**

Geometricamente:



Definizione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$.
La funzione f si dice ***derivabile in*** X, se essa è derivabile in ogni punto di X.

In particolare, si dirà derivabile in un intervallo chiuso $[a, b]$ se, oltre ad essere derivabile in ogni punto interno, è dotata di derivata sinistra finita in a e di derivata destra finita in b $\Leftrightarrow$

$$D_d[f(x)]_{x=a} \in \mathbb{R}, \quad D_s[f(x)]_{x=b} \in \mathbb{R}.$$

Definizione

Sia f una funzione derivabile in X. Si chiama ***funzione derivata*** di f la funzione:

$$f' : x_0 \in X \to f'(x_0) = D[f(x)]_{x=x_0} \in \mathbb{R}.$$

Essa si indica equivalentemente con i simboli $f'(x)$ oppure $D[f(x)]$.

Se la funzione f è derivabile in un intervallo chiuso $[a, b]$ si pone

$$f'(a) = D_d[f(x)]_{x=a} \quad f'(b) = D_s[f(x)]_{x=b}$$

Derivate delle funzioni elementari

funzione	dominio	derivata	dominio
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$]0, +\infty)$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$a^x \log a$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$]0, +\infty)$	$\frac{\log_a e}{x}$	$]0, +\infty)$
$\log x$	$]0, +\infty)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty)$

Derivate delle funzioni elementari

funzione	dominio	derivata	dominio
x^α	$[0,+\infty),\ \alpha \geq 1$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$[0,+\infty)$
	$[0,+\infty),\ 0 < \alpha < 1$		$]0,+\infty)$
	$]0,+\infty),\ \alpha < 0$		$]0,+\infty)$
$\mathrm{sen} x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\mathrm{sen} x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{tg} x$	$\mathbb{R} - \mathbf{A}$	$\frac{1}{\cos^2 x} =$	$\mathbb{R} - \mathbf{A}$
$\mathbf{A} =$	$\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$= 1 + \mathrm{tg}^2 x$	
$\mathrm{cotg} x$	$\mathbb{R} - \mathbf{B}$	$\frac{-1}{\mathrm{sen}^2 x} =$	$\mathbb{R} - \mathbf{B}$
$\mathbf{B} =$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$= -1 - \mathrm{cotg}^2 x$	

Derivate delle funzioni elementari

funzione	dominio	derivata	dominio
$\mathrm{arcsen}\, x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Regole di derivazione

Siano f e g due funzioni derivabili.
Valgono le seguenti regole:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{D}[f(x)+g(x)] & = & f'(x)+g'(x) \\
\mathrm{D}[f(x)-g(x)] & = & f'(x)-g'(x) \\
\mathrm{D}[f(x)\cdot g(x)] & = & f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \\
\mathrm{D}[\frac{f(x)}{g(x)}],\, g(x)\neq 0 & = & \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \\
\mathrm{D}[f\circ g(x))] & = & f'(g(x))\cdot g'(x)
\end{array}
$$

Derivabilità delle funzioni inverse

Sia $f : X \to Y$ derivabile ed invertibile; Se $f'(x) \neq 0$ allora la funzione inversa

$$f^{-1} : Y \to X$$

è derivabile e

$$D[f^{-1}(y)] = \frac{1}{D[f(x)]_{x=f^{-1}(y)}}.$$