Applicazioni derivate

Monotonia in un punto

Siano f una funzione definita in X e x_0 un punto di X.

Se esiste un intorno di x_0 nel quale la funzione è strettamente crescente, si dice che la funzione è **strettamente crescente in** x_0.

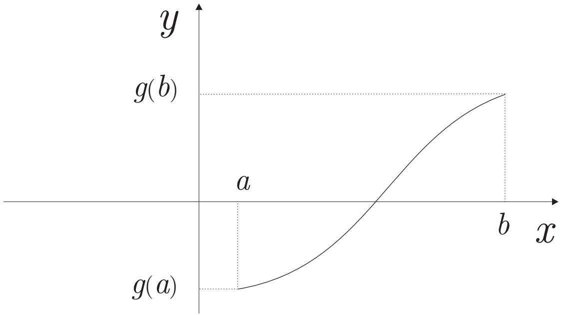
Se esiste un intorno di x_0 nel quale la funzione è strettamente decrescente, si dice che la funzione è **strettamente decrescente in** x_0.

NOTA

se una funzione è strettamente crescente in tutto X allora essa è strettamente crescente in ogni punto di X; viceversa, se una funzione è strettamente crescente in ogni punto di X potrebbe non essere strettamente crescente in tutto X.

Esempio

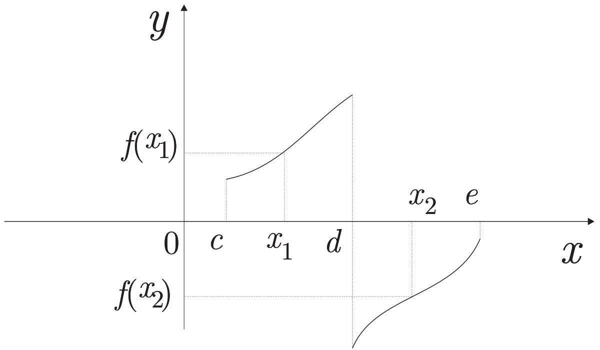
Consideriamo la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$;



g è strettamente crescente in tutto $[a, b]$.

Esempio

Consideriamo la funzione $f : [c, d[\cup]d, e] \to \mathbb{R}$;



f è strettamente crescente in ogni punto di $[c, d[\cup]d, e]$ ma non è strettamente crescente in tutto $[c, d[\cup]d, e]$:

$$\forall x_1 \in [c, d[, x_2 \in]d, e] \Rightarrow x_1 < x_2,\ f(x_1) > f(x_2)$$

Massimo relativo

Siano f una funzione definita e continua in X e $x_0 \in X$.
Se esistono

- un intorno sinistro di x_0 in cui f è strettamente crescente;
- un intorno destro di x_0 in cui f è strettamente decrescente

la funzione ha un **massimo relativo** in x_0; x_0 è detto **punto di massimo relativo.**

x_0 è un **punto di massimo relativo** per f $\Leftrightarrow$ esiste un intorno di x_0 in cui il massimo di f è $f(x_0)$, cioè se

$$\exists\, I \in I(x_0) \ : \ f(x_0) \geq f(x)\,, \qquad \forall\, x \in I \cap X$$

Minimo relativo

Siano f una funzione definita e continua in X e $x_0 \in X$.
Se esistono

- un intorno sinistro di x_0 in cui f è strettamente decrescente;
- un intorno destro di x_0 in cui f è strettamente crescente

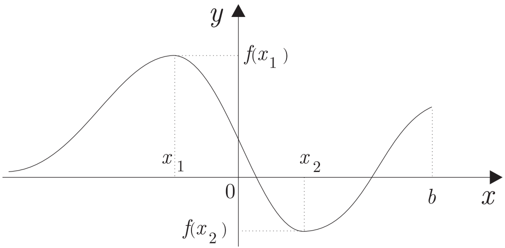
la funzione ha un **minimo relativo** in x_0; x_0 è detto **punto di minimo relativo.**

x_0 è un **punto di minimo relativo** per f $\Leftrightarrow$ esiste un intorno di x_0 in cui il minimo di f è $f(x_0)$, cioè se

$$\exists\, I \in I(x_0) \;:\; f(x_0) \leq f(x)\,, \qquad \forall\, x \in I \cap X$$

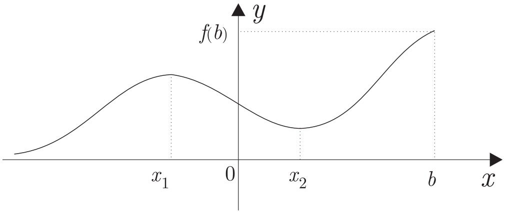
Esempio

Si consideri la funzione



x_1 è un punto di massimo relativo, x_2 è un punto di minimo relativo.

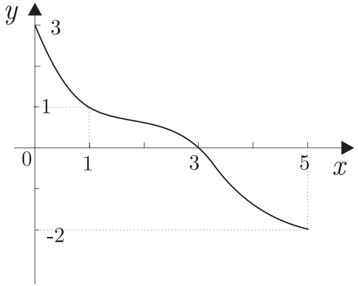
Esempio



La funzione

- è limitata inferiormente , $\inf f(x) = 0$, **non ha minimo assoluto**;
- **ha un minimo relativo** in x_2;
- **ammette massimo assoluto** nel punto b;
- **ha un massimo relativo** in x_1.

Esempio



La funzione

- ammette **massimo assoluto** in 0;
- non ha punti di **massimo relativo**;
- ammette minimo assoluto in 5;
- non ha punti di **minimo relativo**.

Segno della derivata in un punto

Siano f una funzione definita in X e $x_0 \in X$.

Se f è dotata di derivata in x_0 allora

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ strettamente crescente in x_0;
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ strettamente decrescente in x_0;
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ nulla si può dire sul comportamento della funzione.

Teorema di Fermat

Siano f una funzione definita in X, $x_0 \in X$. Se la funzione presenta un minimo (massimo) relativo in x_0 allora vale una delle due alternative seguenti:

- esiste la derivata in x_0 e $f'(x_0) = 0$;
- non esiste la derivata in x_0.

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$,

allora

$$\exists\, x_0 \in]a, b[: \; f'(x_0) = 0$$

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora

$$\exists\, x_0 \in]a, b[\,:\; f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollari del Teorema di Lagrange

Teorema 1 (caratterizzazione delle funzioni costanti)

Una funzione è costante in un intervallo $[a, b]$ se e solo se è derivabile in $]a, b[$ e $f'(x) = 0\ \forall\ x \in]a, b[$.

Teorema 2 (criterio di monotonia)

Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora

- f è crescente in $[a, b]$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f'(x) \geq 0\ \forall\ x \in]a, b[$.
- f è decrescente in $[a, b]$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f'(x) \leq 0\ \forall\ x \in]a, b[$.

Teorema 3 (criterio di stretta monotonia)

Una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ è strettamente crescente (decrescente) in tutto $[a, b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0 (\leq 0)\ \forall\ x \in]a, b[$ ed inoltre, non esiste un intervallo $I \subset]a, b[$ nel quale la derivata sia identicamente nulla.

Derivate di ordine superiore

Derivata seconda

Sia f una funzione definita, continua e derivabile in X. Se la derivata $f'(x)$ ammette derivata , essa si definisce **derivata seconda** di f e si indica con il simbolo f''.

Derivate di ordine superiore

Con considerazioni analoghe, è possibile definire le derivate di ordine superiore; in generale, con il simbolo $f^{(n)}$ si indica la derivata di ordine n.

Se $f^{(k)}(x_0) = 0$ $k = 1, ..., n-1$ allora:

n	$f^{(n)}$		
pari	positiva	$\Rightarrow$	x_0 punto di minimo relativo,
pari	negativa	$\Rightarrow$	x_0 punto di massimo relativo,
dispari	positiva	$\Rightarrow$	f strettamente crescente in x_0,
dispari	negativa	$\Rightarrow$	f strettamente decrescente in x_0.

Teorema di Weierstrass

Se f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f è dotata di minimo e massimo:

$$\exists m = \min f,\ \exists M = \max f \Rightarrow$$

$$m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b].$$

Di conseguenza esistono

1. almeno un punto di minimo $x_m \in [a, b]$, $f(x_m) = m$;
2. almeno un punto di massimo $x_M \in [a, b]$, $f(x_M) = M$.

Ricerca di massimi e minimi

Consideriamo una funzione definita in un intervallo, o, più in generale, in un insieme formato dall'unione di intervalli; supponiamo che essa derivabile in tutto il suo dominio, ad eccezione al più di un insieme finito di punti. I punti di minimo e massimo devono essere localizzati:

- agli estremi degli intervalli che compongono il dominio di f;
- nei punti di minimo e massimo relativo in cui
  - la funzione è derivabile e la derivata è nulla;
  - la funzione non è derivabile.

Ricerca di massimi e minimi

1. valutazione della funzione negli estremi del campo di esistenza;
2. calcolo della derivata
    - ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti;
    - individuazione dei punti in cui non esiste la derivata e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti.

Il massimo ed il minimo della funzione, se esistono, sono dati, rispettivamente, dal massimo e dal minimo dei valori calcolati.

Esempio

Calcoliamo il massimo ed il minimo della funzione $e^x - x$ per $x \in [-2, 3]$.

1. valutazione della funzione agli estremi:

$$f(-2) = e^{-2} + 2 \simeq 2.13, \; f(3) = e^3 - 3 \simeq 17.08;$$

2. calcolo della derivata:

$$f'(x) = \mathrm{D}[e^x - x] = e^x - 1$$

- ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti:

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad f(0) = 1;$$

Esempio

La funzione ammette derivata in tutto il suo campo di esistenza. Posto

$$y_1 = f(-2) \simeq 2.13, \ y_2 = f(3) \simeq 17.08$$

si ha

$$\min f = \min\{y_1, y_2, 1\} \Rightarrow$$

$$\min f = 1, \ x = 0 \text{ punto di minimo}$$

$$\max f = \max\{y_1, y_2, 1\} \Rightarrow$$

$$\max f = y_2, \ x = 3 \text{ punto di massimo}$$