SPAZI VETTORIALI

Definizione: Dato un insieme V non vuoto e un corpo K di sostegno si dice che V è un K-spazio vettoriale o uno spazio vettoriale su K se sono definite un'operazione di somma in V, $+ : V \times V \to V$ ed un prodotto esterno, $\cdot : K \times V \to V$, per le quali valgono le seguenti otto proprietà:

Proprietà della somma:

1. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ si ha: $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z})$ *(proprietà associativa)*;
2. $\forall\, \mathbf{v} \in V\ \exists\, \mathbf{0_V} \in V \mid \mathbf{v} + \mathbf{0_V} = \mathbf{v}$ *(esistenza di un elemento neutro)*;
3. $\forall\, v \in V\ \exists\, \mathbf{v}^1 \in V \mid \mathbf{v} + \mathbf{v}^1 = \mathbf{0_V}$ *(esistenza di un opposto)*;
4. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ *(proprietà commutativa)*.

Le proprietà 1 – 4 asseriscono che (V, +) è un gruppo abeliano.

Proprietà del prodotto per un a Î K:

1. $\forall\, \mathbf{v} \in V$ e $\forall\, a, b \in K$ si ha: $a(b\mathbf{v}) = (ab)\,\mathbf{v}$;
2. $\forall\, \mathbf{v} \in V$ si ha: $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Proprietà distributive:

1. $\forall\, \mathbf{v} \in V$ e $\forall\, a, b \in K$ si ha: $(a + b)\,\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;
2. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $\forall\, a \in K$ si ha: $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$.

Dalla definizione di spazio vettoriale seguono:

I. Il vettore nullo di V, che indicheremo con $\mathbf{0_V}$, è unico;

II. Per ogni $\mathbf{v} \in V$ il suo opposto, che indicheremo con $-\mathbf{v}$, è unico e questo è uguale a $(-1)\mathbf{v}$. Si scrive: $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{w} - \mathbf{v}$;

III. $a\mathbf{v} = \mathbf{0_V} \Leftrightarrow a = \mathbf{0_k}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0_V}$;

IV. Si ha $-(a\mathbf{v}) = a(-\mathbf{v}) = (-a)\,\mathbf{v} \quad \forall\, a \in K$ e $\forall\, \mathbf{v} \in V$.