Il campo dei numeri complessi

September 21, 2021

1 Definizione

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Se (x_1, b_1) e (x_2, y_2) sono elementi di $\mathbb{R}^2$ le posizioni:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

definiscono due operazioni interne a $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 1. Rappresentare nel piano cartesiano $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Esercizio 2. Verificare che l'operazione $+$ gode della proprietà associativa e commutativa, l'elemento neutro è $(0, 0)$ e il simmetrico (o opposto) del generico elemento (x, y) è l'elemento $-(x, y) = (-x, -y)$. Brevente si dice che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 3. Verificare che l'operazione $\cdot$ è associativa, commutativa e distributiva rispetto a $+$. Brevente si dice che $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un anello commutativo (ricordando anche le proprietà dell'operazione $+$).

Qualsiasi siano i numeri reali x e y risulta $(x, y)(1, 0) = (x, y)$, cioè $(1, 0)$ è l'elemento neutro dell'operazione $\cdot$. Inoltre, se x e y sono numeri reali non entrambi nulli si verifica facilmente che l'elemento (x, y) è invertibile, cioè esiste $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tale che $(x, y) \cdot (x', y') = (1, 0)$. Chiaramente

$$(x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

In definitiva, la struttura algebrica $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo chiamato *campo dei numeri complessi* e denotato con $\mathbb{C}$. Gli elementi di $\mathbb{C}$ si chiamano ovviamente *numeri complessi*.

Si consideri l'applicazione

$$\iota : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C};$$

essa è evidentemente iniettiva. Se x e y sono elementi di $\mathbb{R}$ risulta

$$\iota(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \iota(x) + \iota(y)$$

e

$$\iota(xy) = (xy, 0) = (x, 0)(y, 0) = \iota(x)\iota(y).$$

Quindi l'applicazione ι trasforma la somma o il prodotto di elementi di $\mathbb{R}$ rispettivamente nella somma o nel prodotto di elementi di $\iota(\mathbb{R})$. E' pertanto ragionevole identificare $\mathbb{R}$ con $\iota(\mathbb{R}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ovvero identificare l'elemento x di $\mathbb{R}$ con l'elemento $\iota(x) = (x, 0)$ e così pensare ad $\mathbb{R}$ come una parte di $\mathbb{C}$. Ad essere precisi $\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$.
Si osservi che il sottoinsieme $\mathcal{I} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ non è stabile rispetto all'operazione $\cdot$. Infatti

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Gli elementi di $\mathcal{I}$ sono detti numeri puramente immaginari.
Posto $j = (0, 1)$ si ottiene che

$$j^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Il numero complesso $j = (0, 1)$ si dice *unità immaginaria* di $\mathbb{C}$.

Inoltre se $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + jy,$$

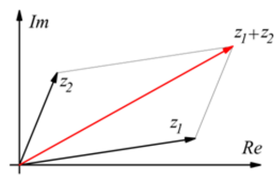
e pertanto ogni elemento $z = (x, y)$ di $\mathbb{C}$ si scrive (in unico modo) nella forma $z = x + jy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, detta *forma algebrica* del numero complesso. Il numero reale x si dice *parte reale* del numero complesso z, e si denota con $\mathrm{Re}\,(z)$, mentre il numero reale y si dice *parte immaginaria* di z e si denota con $\mathrm{Im}\,(z)$.

Esercizio 4. Verificare che

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

e

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$



Considerata la definizione di numero complesso, è naturale associre al numero complesso z il punto del piano che, fissato un riferimento cartesiano ortogonale, ha ascissa $\mathrm{Re}\,(z)$ e ordinata $\mathrm{Im}\,(z)$, e viceversa al punto di coordinate (x, y) possiamo associare il numero complesso $x + jy$.

In tale corrispondenza tra numero complessi e coppie di numeri reali, l'asse delle ascisse è detto *asse reale* e l'asse delle ordinate *asse immaginario*; inoltre, il piano in tale contesto prende il nome di *piano di Argand–Gauss*.

Esercizio 5. Rappresentare nel piano di Gauss $\iota(\mathbb{R})$ e $\mathcal{I}$.

Esercizio 6. Determinare e rappresentare nel piano cartesiano, noto come piano di Gauss, $\mathrm{Re}\,(z)$ e $\mathrm{Im}\,(z)$ quando $z = 0$, $z = 1$, $z = j$, $z = -2j$, $z = 3 + 2j$,$z = -1 + 5j$,$z = 6 - j$.

Esercizio 7. 1) Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

$$z = \frac{1}{2j}$$

$$z = \frac{1}{2 + 3j}$$

$$z = \frac{3}{5 - 7j}$$

Suggerimento $z = \frac{1}{2+3j} = \frac{2-3j}{(2+3j)(2-3j)} = \frac{2-3j}{15} = \frac{2}{15} - j\frac{1}{5}$. 2) Calcolare $(1 + j)(2 - j), (1 + j)^{-1}$.

In $\mathbb{C}$ non c'è una relazione d'ordine compatibile con la sua struttura algebrica.

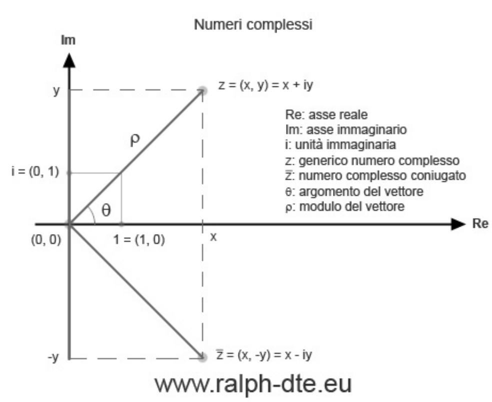
Se $z = x + jy$ è un numero complesso, si dice *complesso coniugato* di z il numero complesso $\bar{z} = x - jy$.

Esercizio 8. Determinare e rappresentare nel piano cartesiano, noto come piano di Gauss, $\bar{z}$ quando $z = 0$, $z = 1$, $z = j$, $z = -2j$, $z = 3 + 2j$,$z = -1 + 5j$,$z = 6 - j$.

Nel piano di Gauss, se un numero complesso z è rappresentato dal punto P, il complesso coniugato $\bar{z}$ di z è rappresentato dal simmetrico di P rispetto all'asse reale.

Valgono le seguenti proprietà

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z = \bar{z}$ se e solo se z è un numero reale
- se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ allora
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$
- $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}\,(z)j$
- $z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2$



Ancora, si dice *modulo* del numero complesso $z = z + jy$ il numero reale non negativo $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Valgono le seguenti proprietà

- $|z|_{\mathbb{C}} \geq 0$ e $|z|_{\mathbb{C}} = 0$ se e solo se $z = 0$
- $|z|^2_{\mathbb{C}} = z \cdot \bar{z}$
- if $z \in \mathbb{R}$, then $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$
- if $z = jy$ with $y \in \mathbb{R}$, then $|z|_{\mathbb{C}} = |y|_{\mathbb{R}}$
- se $z, w \in \mathbb{C}$
  (i) $|zw|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{C}}|w|_{\mathbb{C}}$;
  (ii) $|z|_{\mathbb{C}} = |\bar{z}|_{\mathbb{C}} = |-z|_{\mathbb{C}}$;
  (iii) $|z + w|_{\mathbb{C}} \leq |z|_{\mathbb{C}} + |w|_{\mathbb{C}}$.
- nel piano di Gauss $|z|_{\mathbb{C}}$ rappresenta la distanza di z dallo zero (origine degli assi)

Quando il contesto è chiaro il modulo si indicherà semplicemente con $|\cdot|$.

Esercizio 9. Determinare il modulo di $z = 0$, $z = 1$, $z = j$, $z = -2j$, $z = 3 + 2j$,$z = -1 + 5j$,$z = 6 - j$.

Esercizio 10. Verificare che

- Se $z = x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ allora $|z| = x$
- Se $z = x \in \mathbb{R}$ e $x < 0$ allora $|z| - x$
- Se $z = jy$ con $y \in \mathbb{R}$ e $y > 0$ allora $|z| = y$
- Se $z = jy$ con $y \in \mathbb{R}$ e $y < 0$ allora $|z| = -y$

Esercizio 11. Rappresentare nel piano di Gauss $\mathrm{Re}\,(z) = 2, \mathrm{Im}\,(z) = -3, \mathrm{Im}\,(z) = 3\mathrm{Re}\,(z), |z| = 2$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$ allora

$$z^1 = z$$

$$z^n = z^{n-1}z \quad n \geq 1.$$

Si pone per definizione $z^0 = 1$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

Esercizio 12. Verificare che

$$j^0 = 1$$
$$j^i = j$$
$$j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$
$$j^4 = 1$$
$$j^5 = j$$
$$j^6 = -1$$
$$j^7 = -j$$
$$j^8 = 1$$

e rappresentarle nel piano di Gauss

Si osservi che $j^m = j^n$ se m e n hanno lo stesso resto nella divisione per 4.

Esercizio 13. Usando la regola precedente si provi che

$$j^4 = j^0 = 1$$
$$j^5 = j^1 = j$$
$$j^6 = j^2 = -1$$
$$j^7 = j^3 = -j$$
$$j^8 = j^0 = 1$$
$$j^{16} = j^0 = 1$$
$$j^{17} = j^1 = j$$

Esercizio 14. Verificare che

$$j^{-1} = j^3 = -j$$

$$j^{-2} = j^2 = -1$$

$$j^{-3} = j$$

$$j^{-4} = j^0 = 1$$

$$j^{-5} = j^{-1} = j^3 = -j$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

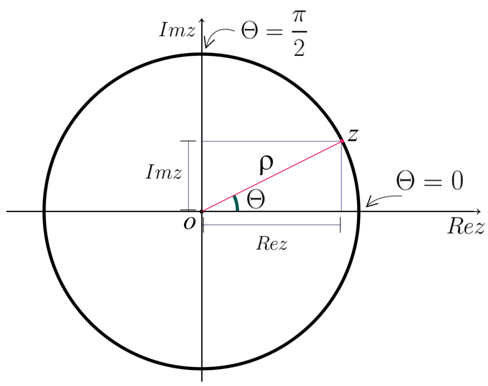
Si osservi che le potenze di j assumono i valori $1, j, -1, -j$, muovendosi in senso orario per le potenze positive e in senso antiorario per le potenze negative.

2 Coordinate polari

Un altro modo per rappresentare i numeri complessi consiste nell'utilizzo delle *coordinate polari*. Se $P(x, y)$ è un punto del piano diverso dall'origine, esso è univocamente determinato da una coppia di numeri reali (ρ, θ) dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ è detto *modulo* e rappresenta la distanza di P dall'origine degli assi O, e θ è l'*anomalia* (o *argomento*) ossia l'angolo (orientato) che il segmento OP forma col semiasse postivo delle ascisse. La coppia (ρ, θ) si dice coppia di *coordinate polari* del punto P e quindi del numero complesso z identificato da P.

Il modulo di z è stato già introdotto nel paragrafo precedente. L'argomento $arg(z)$ del numero complesso z si determina a meno di multipli di 2π. Il valore dell'argomento del numero complesso z compreso in $]-\pi, \pi]$ è univocamente determinato ed è noto come argomento principale e indicato con $Arg(z)$.

Si osservi che per $z = 0$ il modulo vale zero e l'argomento è indefinito.



Le relazioni

$$\begin{cases} x = \rho \, cos\theta \\ y = \rho \, sen\theta \end{cases} \tag{1}$$

consentono di ricavare le coordinate cartesiane (x, y) qualora sono note quelle polari (ρ, θ). Viceversa, se si conoscono le coordinate cartesiane (x, y) le relazioni

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{2}$$

consentono di individuare le coordinate polari. Si può quindi scrivere il numero complesso $z = x + jy$ nella forma

$$z = \rho(cos\theta + j \, sen\theta)$$

detta *forma trigonometrica* del numero complesso. Per brevità a volte scriverermo anche $z = [\rho, \theta]$.

Esercizio 15. Il numero complesso $z = 1 + j$ ha modulo $\rho = \sqrt{2}$ e, usando (2), dalle relazioni

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = sen\theta$$

ricaviamo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e quindi

$$z = \sqrt{2}\Big(cos\frac{\pi}{4} + j \, sen\frac{\pi}{4}\Big)$$

o anche
$$z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Esercizio 16. Il numero complesso di modulo 6 e anomalia $\frac{\pi}{3}$ ha forma algebrica

$$z = 6\Big(cos\frac{\pi}{3} + j\ sen\frac{\pi}{3}\Big) = 6\Big(\frac{1}{2} + j\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 3 + 3\sqrt{3}\ j.$$

Esercizio 17. Verificare che

- Se $z = x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ allora $z = [x, 0]$
- Se $z = x \in \mathbb{R}$ e $x < 0$ allora $z = [-x, \pi]$
- Se $z = jy$ con $y \in \mathbb{R}$ e $y > 0$ allora $z = [y, \pi/2]$
- Se $z = jy$ con $y \in \mathbb{R}$ e $y < 0$ allora $z = [-y, -\pi/2]$
- $arg(\bar{z}) = -arg(z)$

Se $z = [1, \theta]$ e $w = [1, \varphi]$, dalla definizione di prodotto in $\mathbb{C}$ e dalle formule trigonometriche di addizione segue che

$$zw = (cos\theta cos\varphi - \text{sen}\theta sen\varphi) + j\,(cos\theta sen\varphi + cos\varphi \text{sen}\theta)\ = cos(\theta+\varphi) + jsen(\theta+\varphi) = [1, \theta+\varphi]$$

Quindi per numeri complessi di modulo unitario (sulla circonferenza di raggio 1) la moltiplicazione corrisponde ad una rotazione sulla circonferenza.

Esercizio 18. Se $z = [1, \pi/4]$ e $w = [1, \pi/2]$, determinare e rappresentare nel piano di Gauss zw.

Se $z = \rho(cos\theta + j\ sen\theta) = [\rho, \theta]$ e $w = \sigma(cos\varphi + j\ sen\varphi) = [\sigma, \varphi]$ sono numeri complessi in forma trigonometrica si ha che

$$zw = \rho\sigma[\cos\theta\cos\varphi - \text{sen}\,\theta\text{sen}\,\varphi + j(\cos\theta\text{sen}\,\varphi + \cos\varphi\text{sen}\,\theta)] = \rho\sigma[\cos(\theta+\varphi) + j\text{sen}\,(\theta+\varphi)]$$

ossia
$$zw = [\rho\sigma, \theta + \varphi]$$
e quindi il prodotto di due numeri complessi è quel numero complesso di modulo il prodotto dei moduli e argomento la somma degli argomenti.

Esercizio 19. Se $z = [2, \pi/4]$ e $w = [3, \pi/2]$, determinare e rappresentare nel piano di Gauss zw.

In particolare si ha il seguente:

$$z^2 = z \cdot z = \rho^2(cos2\theta + j\ sen2\theta) = [\rho^2, 2\theta]$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = z \cdot z = \rho^3(cos3\theta + j\ sen3\theta) = [\rho^3, 3\theta]$$

e così via.

Inoltre z^{-1} è il numero complesso tale che $z \cdot z^{-1} = 1$ e quindi

$$z^{-1} = [\rho^{-1}, -\theta].$$

Ne segue che

$$\frac{z}{w} = [\frac{\rho}{\sigma}, \theta - \varphi].$$

Più in generale si ha:

Teorema 2.1. (Formula di de Moivre) Sia z un numero complesso non nullo e sia $n \in \mathbb{Z}$. Se $z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta)$, allora

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta) = [\rho^n, n\theta].$$

Esercizio 20. Siano $z = [2, \pi]$ e $w = [3, \pi/4]$, calcolare zw, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, z^{-1}, w^{-2}, z^3, z^2w^3, z^3w^{-2}.

Esercizio 21. Siano $z = 1+j$ e $w = 1-j$, calcolare zw, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, z^{-1}, w^{-2}, z^3, z^2w^3, z^3w^{-2}.

3 Forma esponenziale dei numeri complessi

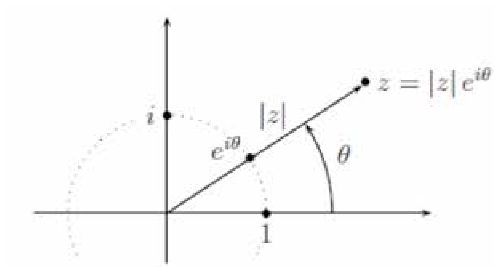
Esiste anche un'altra forma per scrivere un numero complesso. Infatti, per ogni numero reale θ sussiste la seguente *formula di Eulero*

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta = [1, \theta],$$

e quindi se z è il numero complesso di modulo ρ e anomalia θ, si può scrivere l'uguaglianza

$$z = \rho e^{j\theta} = [\rho, \theta]$$

che esprime il numero complesso z nella sua *forma esponenziale*.



Esercizio 22. Scrivere in forma esponenziale $z = [2, \pi]$ e $w = [3, \pi/4]$

Esercizio 23. Scrivere in forma esponenziale $z = 1 + j$ e $w = 1 - j$.

Si osservi per ogni $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{j\theta} e^{j\varphi} = [1, \theta] \cdot [1, \varphi] = [1, \theta + \varphi] = e^{j(\theta+\varphi)}.$$

Inoltre il modulo di $e^{j\theta}$ è 1 e l'argomento (a meno di multipli di 2π) è θ.

4 Le radici di numeri complessi

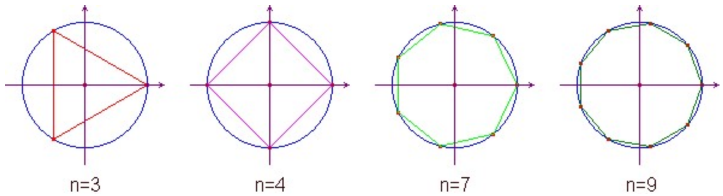
Per quanto riguarda le radici di un numero complesso, dalla formula di de Moivre si ricava il seguente risultato il quale assicura che i punti del piano cartesiano che corrispondono alle radici n-sime di un numero complesso di modulo ρ si distribuiscono come i vertici di un poligono regolare di n lati sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

Corollario 4.1. Siano z un numero complesso non nullo e n un intero positivo. Allora esistono esattamente n radici n-sime di z. Inoltre, se $z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta)$, le sue radici n-sime sono i numeri complessi

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big)$$

con $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

I punti del piano cartesiano che corrispondono alle radici n-sime di un numero complesso di modulo $\rho > 0$ si distribuiscono come i vertici di un poligono regolare di n lati sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.



Esercizio 24. Ad esempio, calcoliamo le radici quarte del numero complesso $z = 1$. Poichè in forma trigonometrica $z = 1$ ha modulo 1 e anomalia 0, si ottiene dal corollario 4.1, che le radici quarte di 1 sono date da

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + j\ \mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{4}$$

con $k = 0, 1, 2, 3$. Quindi

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos 0 + j\,\mathrm{sen}\,0 = 1, \\ w_1 &= \cos\frac{\pi}{2} + j\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i, \\ w_2 &= \cos\pi + j\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 \end{aligned}$$

e

$$w_3 = \cos\frac{3}{2}\pi + j\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi = -i.$$

5 Esponenziale nel campo complesso

Se $z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z = e^{\mathrm{Re}z}(\cos(\mathrm{Im}z) + j\mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z)).$$

Naturalmente se $z \in \mathbb{R}$ si ritrova la definizione dell'esponenziale nel campo reale.

Esercizio 25. Calcolare e^j, e^{2+j}, e^4.

Si osservi che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{\mathrm{Re}z_1}(\cos(\mathrm{Im}z_1)+j\mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z_1))e^{\mathrm{Re}z_2}(\cos(\mathrm{Im}z_2)+j\mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z_2)) = e^{\mathrm{Re}z_1+\mathrm{Re}z_2}$$

$$[(\cos(\mathrm{Im}z_1)\cos(\mathrm{Im}z_2) - \mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z_1)\mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z_2)) \ +j\,(\cos(\mathrm{Im}z_1)\mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z_2) + \mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}z_1)\cos(\mathrm{Im}z_2))]$$

$$= e^{\mathrm{Re}(z_1+z_2)}\,[\cos(\mathrm{Im}(z_1+z_2)) + j\mathrm{sen}\,(\mathrm{Im}(z_1+z_2))] = e^{z_1+z_2}.$$

Inoltre il modulo di e^z è $e^{\mathrm{Re}z}$ e l'argomento (a meno di multipli di 2π) è $\mathrm{Im}z$.

Esercizio 26. Calcolare il modulo e l'argomento di e^j, e^{2+j}, e^4.

Infine si osservi che $e^z = e^{z+2k\pi j}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Ne segue che ad esempio

$$1 = e^0 = e^{2\pi j} = e^{-2\pi j} = e^{4\pi j} = e^{-4\pi j}.$$

Infatti $2\pi j - 0 = 2\pi j, 2\pi j - (-2\pi j) = 4\pi j$ e così via, ovvero la differenza tra gli esponenti è un multiplo di 2π. Altro esempio

$$-1 = e^{\pi j} = e^{3\pi j} = e^{-\pi j} = e^{5\pi j} = e^{-3\pi j}.$$

6 Appendice

Ricordiamo la definizione di Campo.

Un campo è un insieme K, dotato di due operazioni interne (i.e. definite da $K \times K \to K$), indicate con $+$ e $*$, che soddisfano le seguenti proprietà:

- $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietà associativa)
- $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$ (proprietà commutativa)
- esiste l'elemento neutro rispetto +,indicato con 0, tale che $0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in K$
- per ogni $a \in K$ esiste l'opposto indicato con $(-a)$ tale che $a + (-a) = 0$
- $a * (b * c) = (a * b) * cd \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietà associativa)
- esiste l'elemento neutro rispetto $*$, indicato con 1, tale che $1 * a = a * 1 = a$
- per ogni $a \in K \setminus \{0\}$ esiste un elemento indicato con a^{-1} tale che $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$
- $a * b = b * a \quad \forall a, b \in K \setminus \{0\}$ (proprietà commutativa)
- $a * (b + c) = a * b + a * c$ and $(a + b) * c = a * c + b * c \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietàdistributive)