Variabili aleatorie (casuali) continue

- Le variabili aleatorie continue hanno la caratteristica di assumere tutti i valori compresi in un determinato intervallo, ad esempio da $-\infty$ a $+\infty$, oppure da 0 a $+\infty$, oppure da 0 a 1, ecc…

Esempio di v.a. continua: il tempo necessario per produrre un pezzo.

- Si definisce la funzione di densità di probabilità.
- Per le variabili aleatorie continue, si studia la probabilità che la variabile possa assumere un valore compreso in un intervallo.

Variabili aleatorie continue

Non si hanno singole modalità ma classi di modalità

Si parla di funzione di densità di probabilità associata alla classe x_i-x_{i+1}, piuttosto che di probabilità associata al singolo valore di xi

Ergo……di probabilità che si verifichi la classe x_i-x_{i+1}

La probabilità che la variabile possa assumere uno specifico valore è zero (paradosso della continuità).

xi	f(xi)
0-10	0.05
10-20	0.2
20-30	0.47
30-40	0.08
40-50	0.2
totale	1

0.05 è la probabilità che x possa assumere un valore nella classe [0 – 10]

Simbolicamente:

$$P(x_i < X < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$P(0 < X < 10) = \int_{0}^{10} f(x)\,dx$$

Variabili aleatorie continue

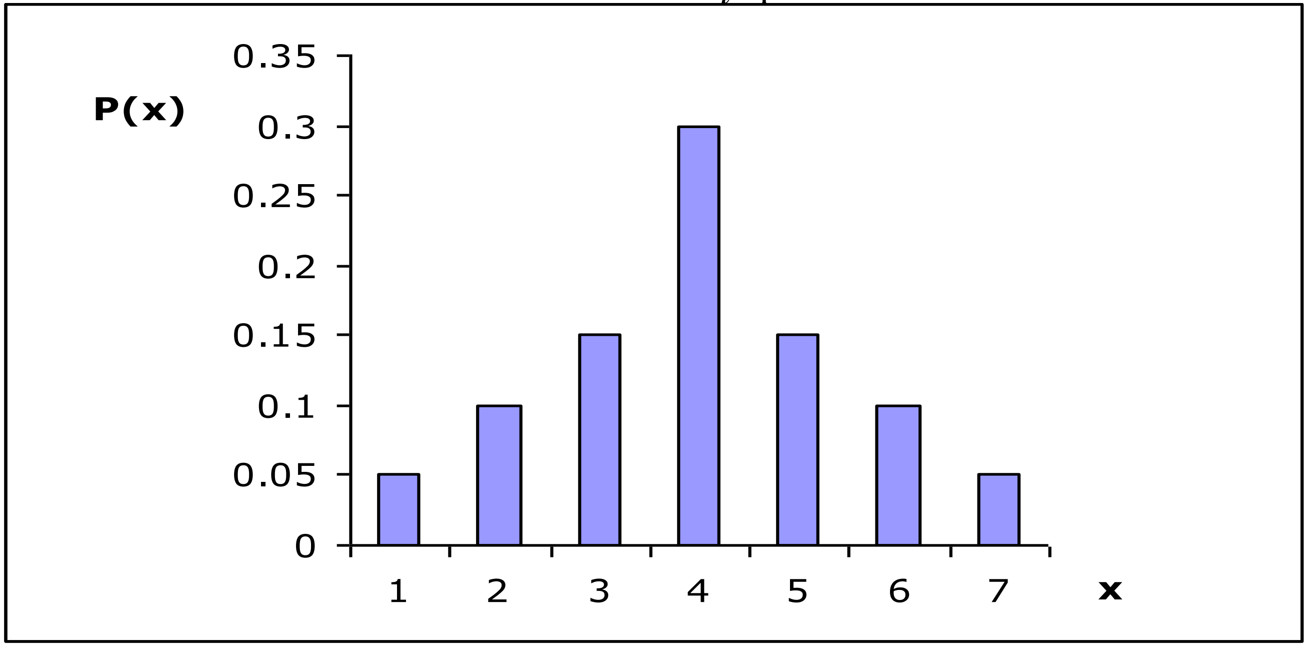
Il valore atteso di una variabile aleatoria (casuale) continua è una media ponderata delle modalità (valori centrali delle classi) ponderata per le probabilità - $f(x_i) = p(x_i)$ -

La rappresentazione grafica di una v.c. continua è una curva e, al contrario di quella discreta, si formano delle aree non ben definite

Rappresentazione grafica di una variabile aleatoria discreta

I punti possono essere congiunti da segmenti paralleli all'asse delle ascisse e si ottengono tanti rettangoli separati…l'area totale è la somma delle aree dei rettangoli…da cui si ricava il valore atteso:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} X_i P(X_i)$$



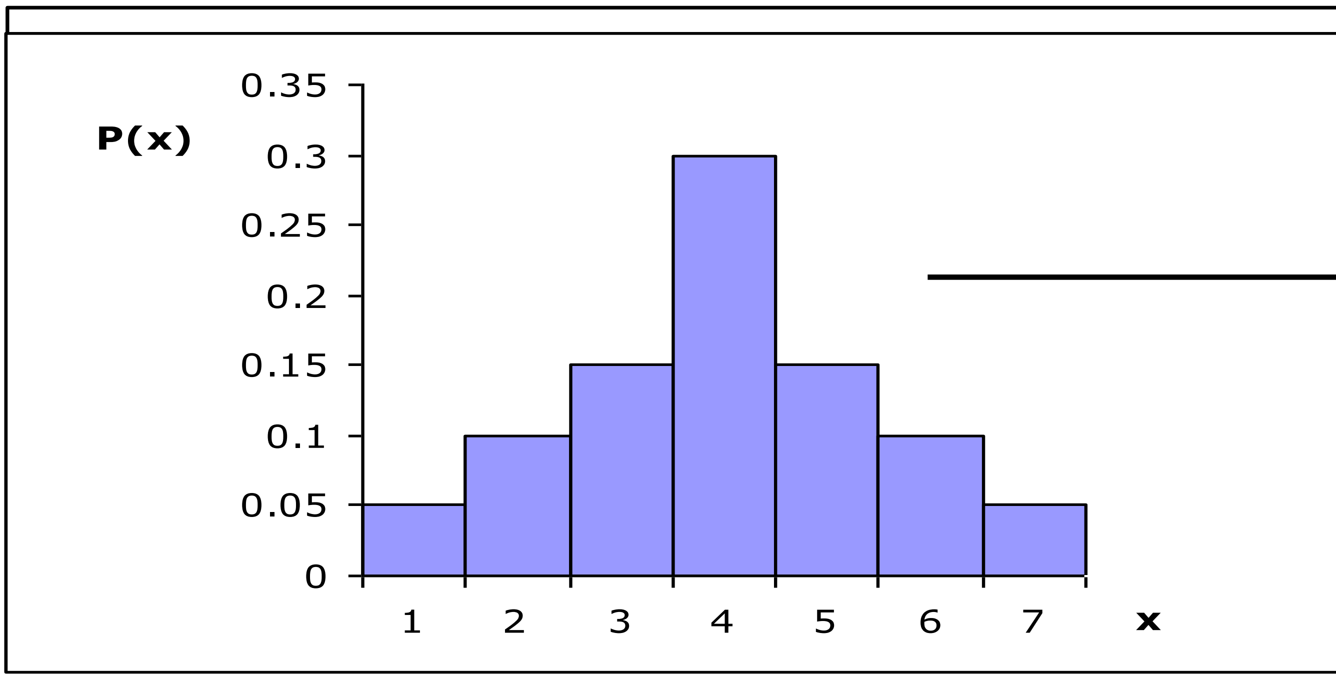
Rappresentazione grafica di una variabile aleatoria continua

La misura di un'area sottesa ad una curva è ottenuta applicando l'integrale

Si ha quindi:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

corrispondono alle p_i



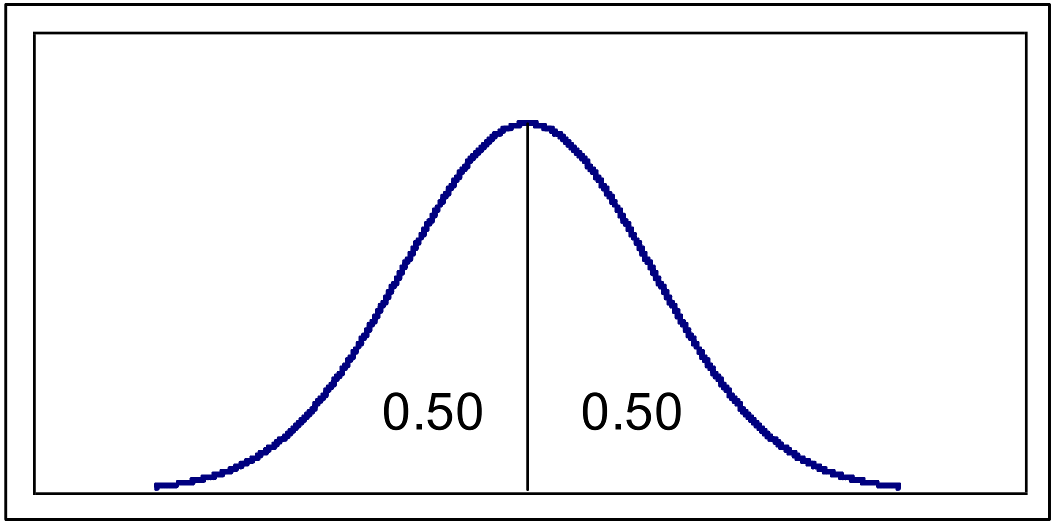
Rettangoli adiacenti!

Variabili casuali continue

- La più importante variabile aleatoria continua è la v.a. (v.c.) normale.
- La variabile aleatoria normale viene utilizzata
  1. per descrivere molti fenomeni in ambito economico e aziendale e calcolare probabilità che riguardano il fenomeno stesso
  2. per applicare la teoria dell'inferenza statistica
- È anche nota come variabile aleatoria Gaussiana, dal nome di Gauss, lo statistico tedesco che alla fine del 1700 la scoprì.

Variabile aleatoria normale

La variabile aleatoria normale può assumere tutti i valori compresi tra -∞ e +∞. La rappresentazione grafica è una curva campanulare e simmetrica. Si ha quindi:



Il valore atteso e la varianza sono, rispettivamente:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

La variabile aleatoria normale

Funzione di densità di probabilità

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

-∞ < X < ∞

e = costante pari a 2.71828

p = costante pari a 3.14.

μ = valore atteso della variabile *X*

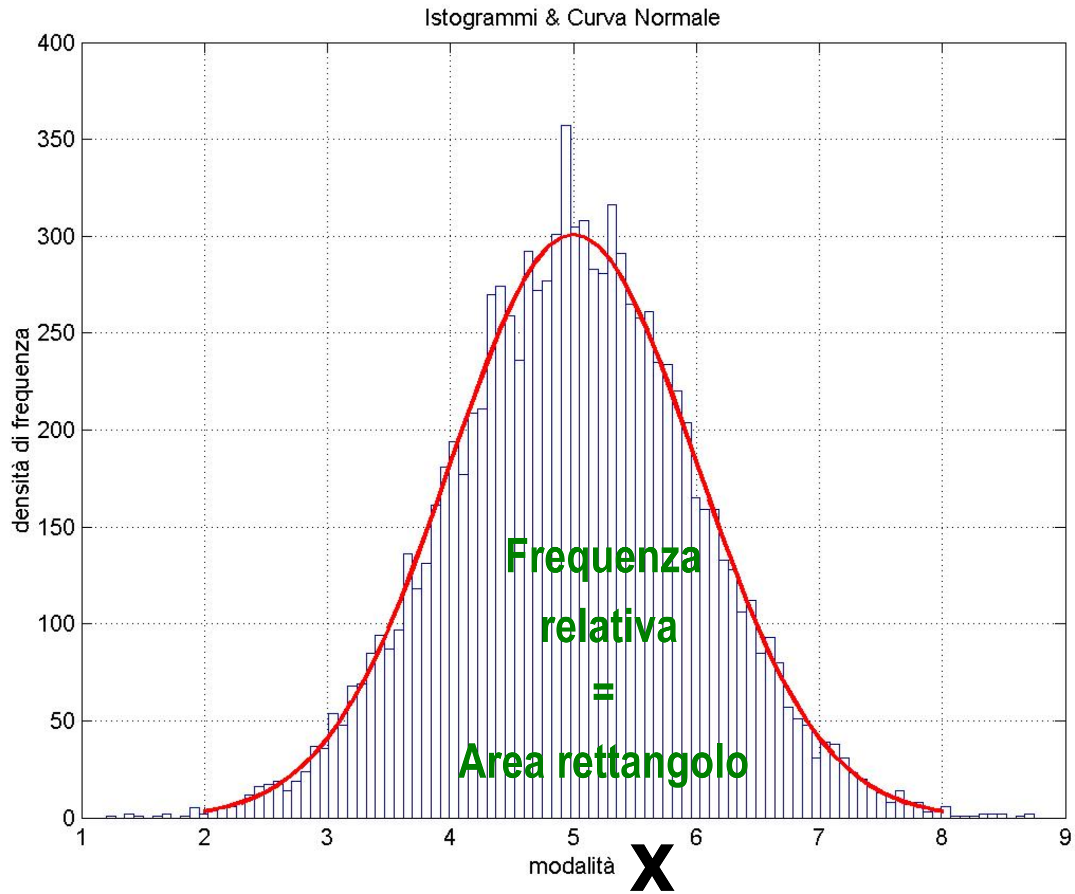
σ^2 = varianza della variabile *X*

Parametri del modello

Variabile aleatoria Normale

Se l'istogramma viene calcolato ponendo sull'asse delle ordinate i valori delle frequenze relative divisi per le corrispondenti ampiezze di classe (densità di frequenze relative) e se congiungendo i valori centrali delle classi (poligono) si ottiene la seguente curva…questa viene definita "curva NORMALE", con funzione di densità uguale a

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



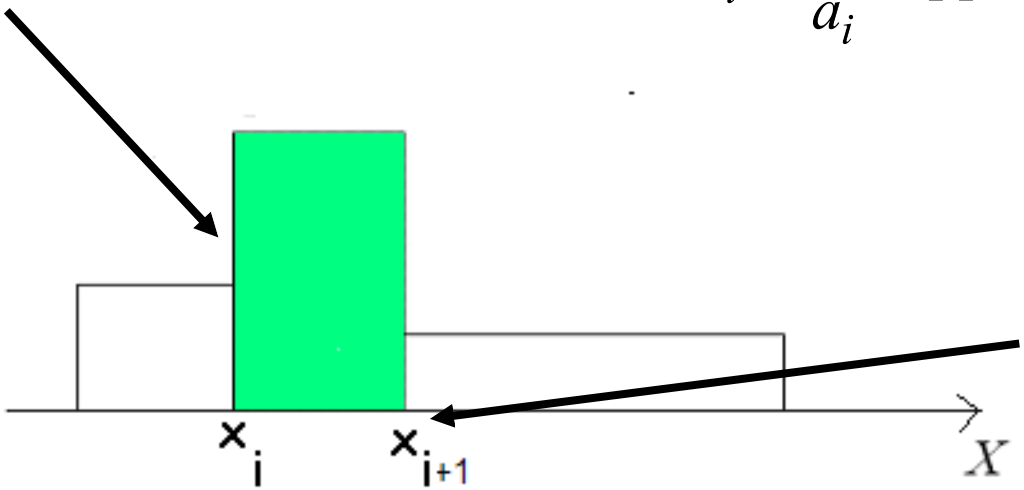
Ricorda!!!
Variabili Continue: Istogramma

- Si applica solo con distribuzioni in classi
- Si configura come un insieme di rettangoli contigui:
  - Un rettangolo per ogni classe
- Due elementi fondamentali:
  - Base rettangolo=ampiezza classi (a_i)
  - Altezza rettangolo = densità di frequenza (d_i) (può essere costruita con freq. assolute o relative)

Istogramma con densità di frequenza

Altezza rettangolo

$$d_i = \frac{n_i}{a_i} \quad oppure \quad f(x_i) = \frac{n_i / N}{a_i} = \frac{f_i}{a_i}$$

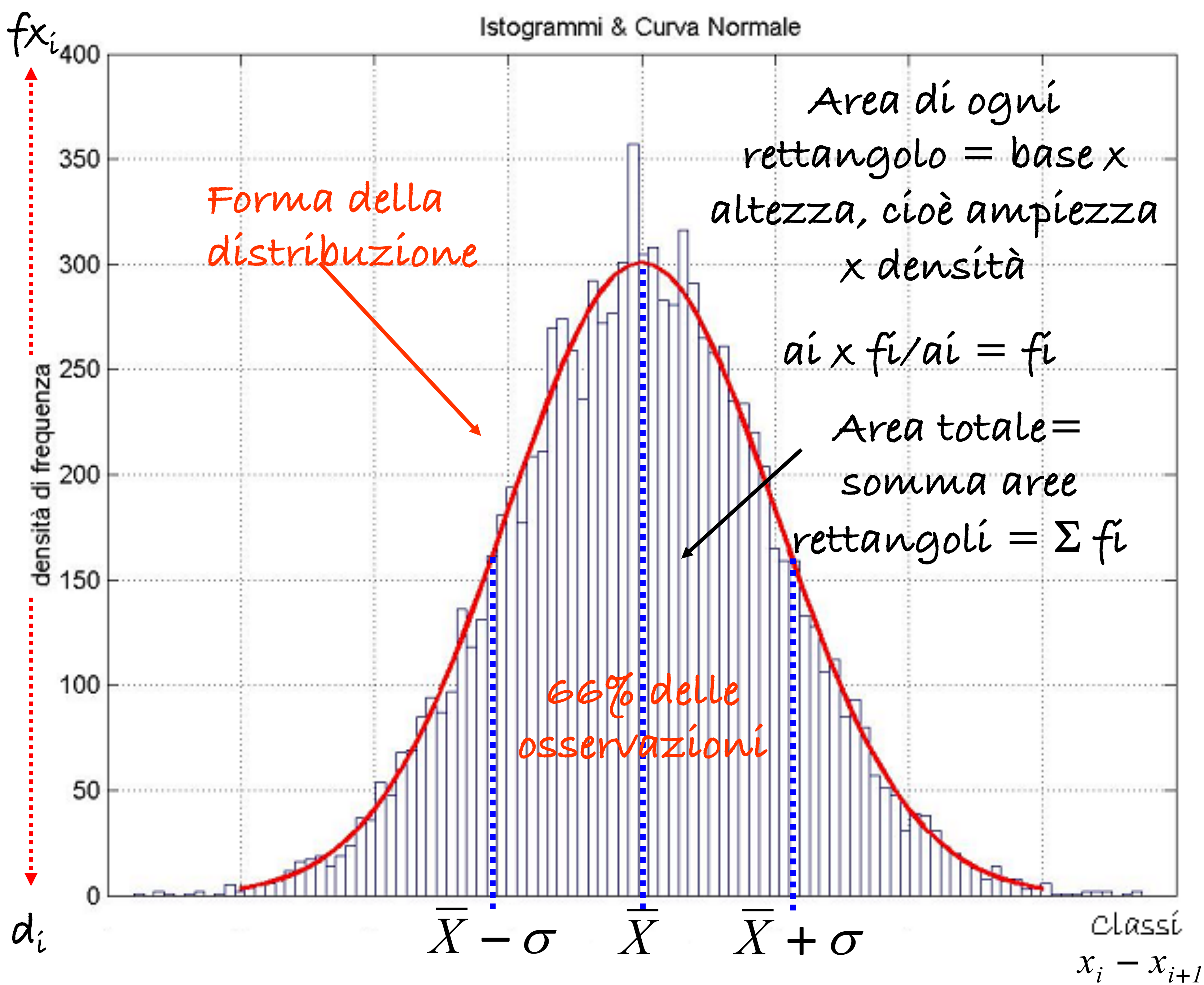


Base rettangolo

$$\mathrm{a_i = x_{i+1} - x_i}$$

Area rettangolo

$$\boxed{\begin{array}{l} a_i \times d_i = n_i \\ oppure \\ a_i \times f(x_i) = f_i \end{array}}$$


Istogrammi & Curva Normale
fx_i
densità di frequenza
400
350
300
250
200
150
100
50
0
d_i
Forma della distribuzione
Area di ogni rettangolo = base x altezza, cioè ampiezza x densità
ai x fi/ai = fi
Area totale= somma aree rettangoli = Σ fi
66% delle osservazioni
$\overline{X} - \sigma$
$\overline{X}$
$\overline{X} + \sigma$
Classi
$x_i - x_{i+1}$

Attenzione!

L'area di ogni rettangolo è pari al prodotto della base (ampiezza della classe) per l' altezza (densità di frequenza relativa ($f(xi) = f_i/a_i$)

Nel nostro caso l'area di un rettangolo è, pertanto, pari a:

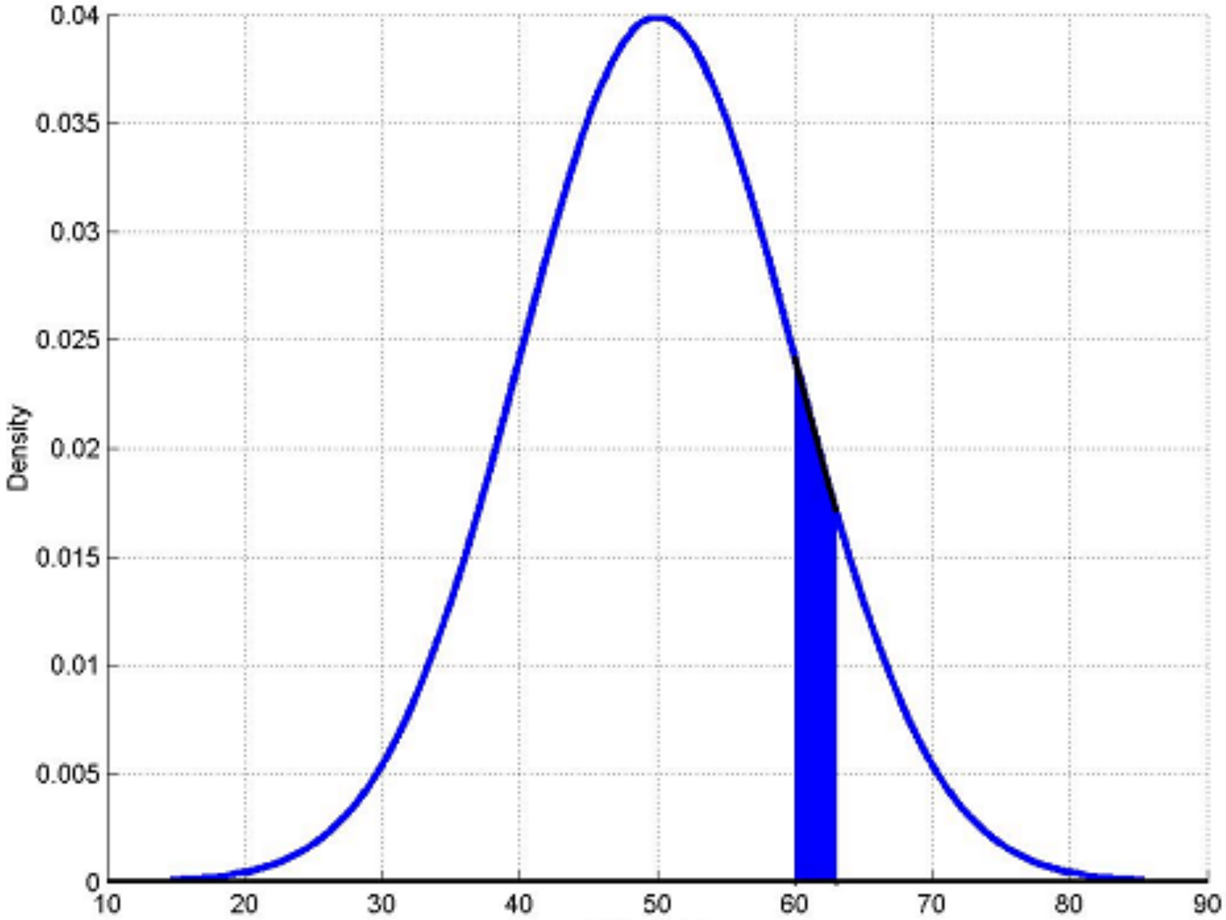
$$a_i * f_i/a_i = f_i$$

Se siamo interessati a quantificare la probabilità (frequenza relativa) degli acquisti effettuati in una particolare classe di X (ad es. tra i 60 e i 63 euro) l'area del rettangolo (posta al di sotto della curva normale) con base di ampiezza pari a 3 (63 – 60) **è la risposta**

Se siamo interessati al numero di acquisti (inteso come frequenza assoluta) effettuati in un intervallo compreso tra i 60 e i 63 euro, è necessario moltiplicare la frequenza relativa per quella totale:

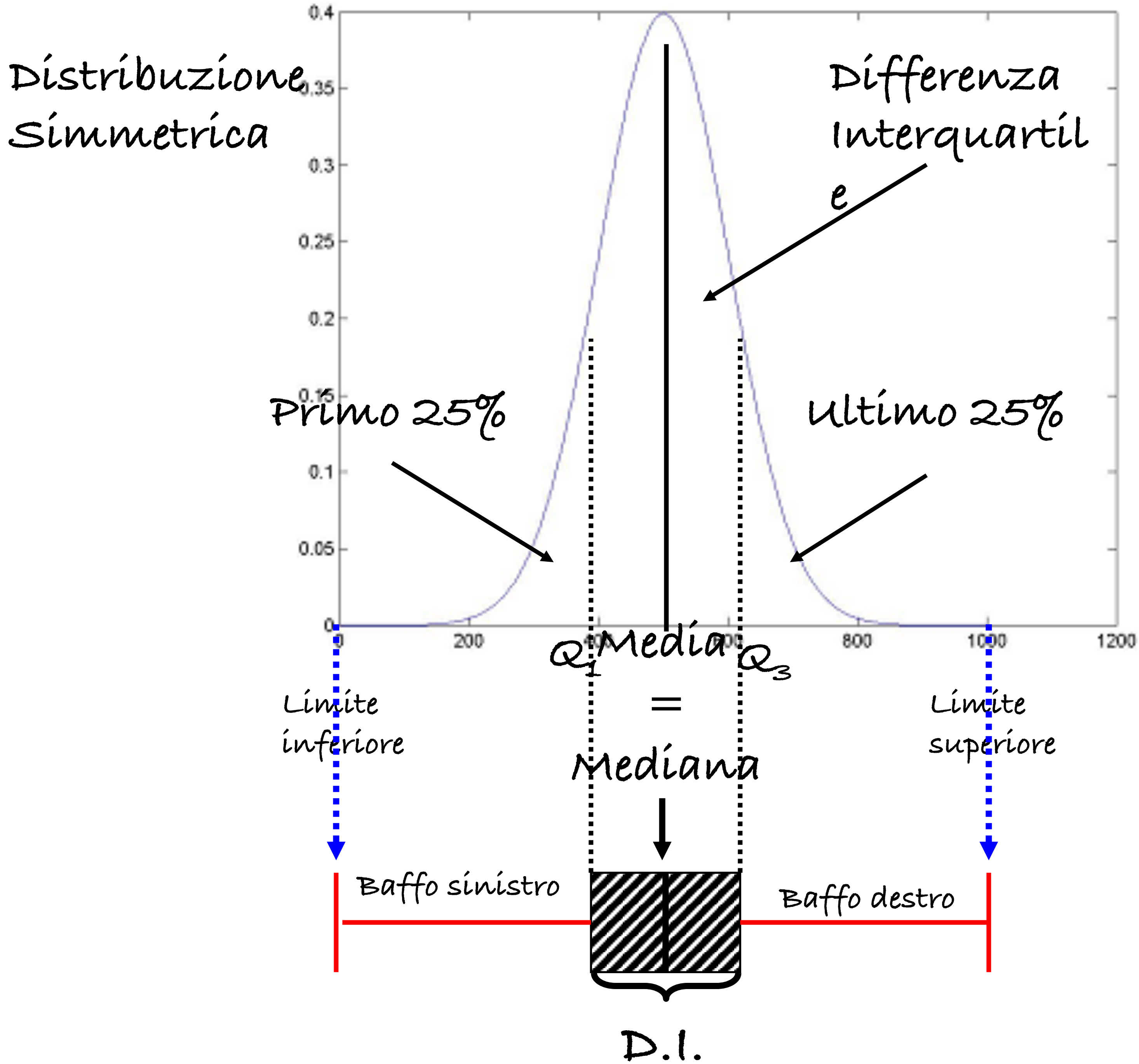
$$f_i*N=(n_i/N)*N=n_i$$

Distribuzione Normale



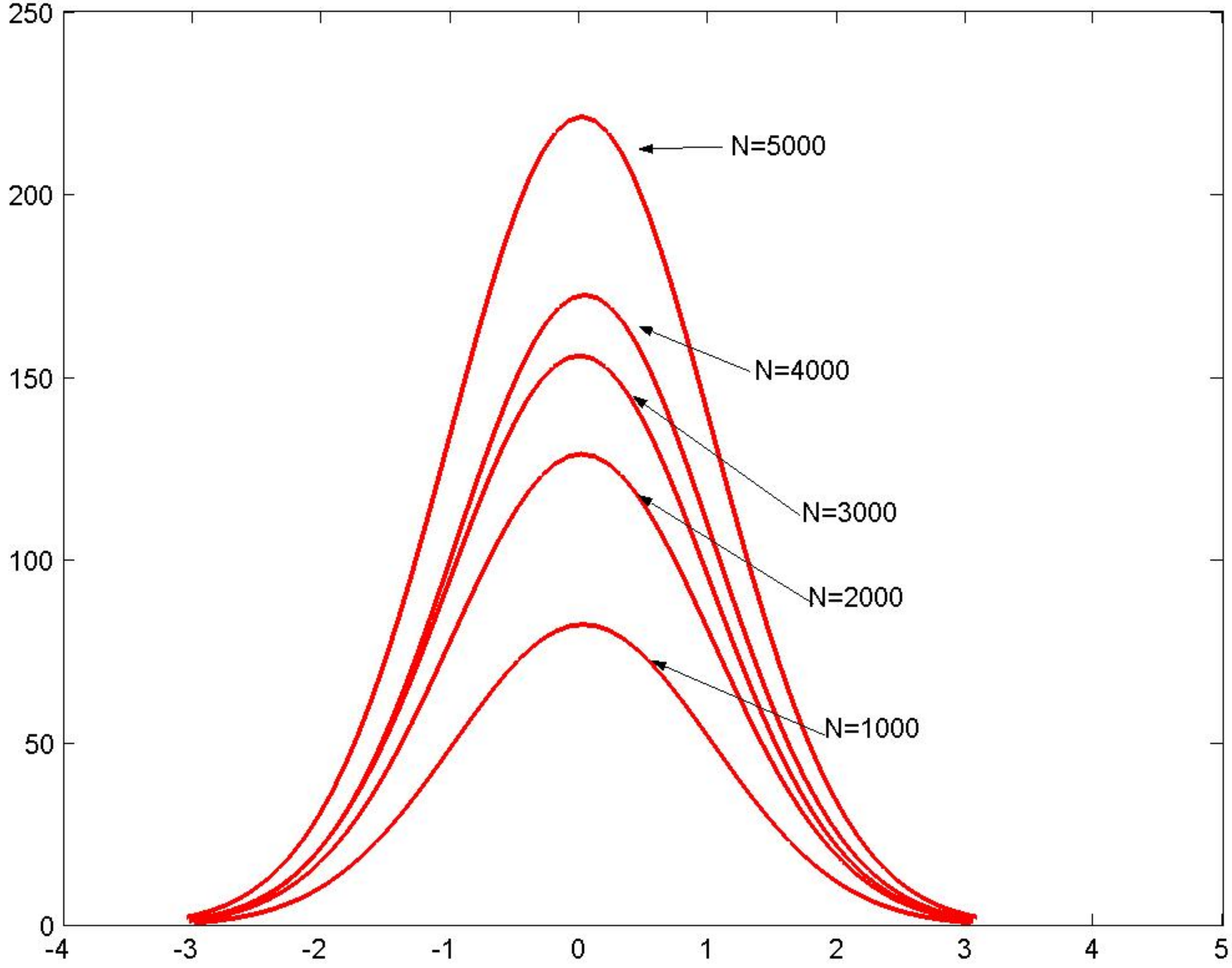
Caratteristiche Curva normale

- Varia al variare di:
  - N
  - μ
  - σ
    - o Platicurtica con σ elevato
    - o Leptocurtica con σ basso
- Simmetrica rispetto al valore medio
  Media=Mediana=Moda
- Asintotica rispetto l'asse delle ascisse
- È crescente nell'intervallo $]-\infty, Media]$ e decrescente nell'intervallo $[Media, +\infty[$

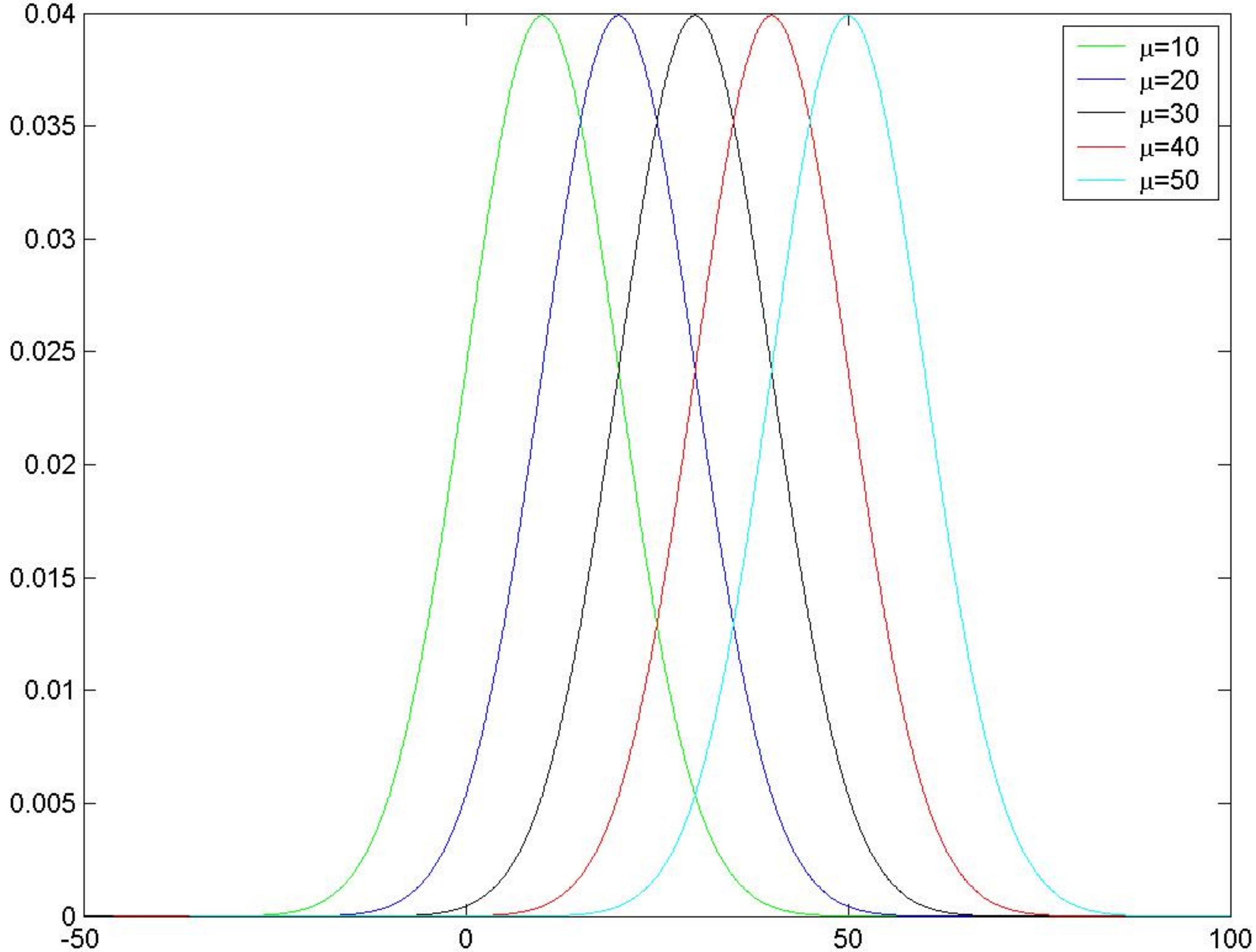


Distribuzione
Simmetrica
Differenza
Interquartil
e
Primo 25%
Ultimo 25%
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
200
400
600
800
1000
1200
Q_1
Media
=
Mediana
Q_3
Limite
inferiore
Limite
superiore
Baffo sinistro
Baffo destro
D.I.

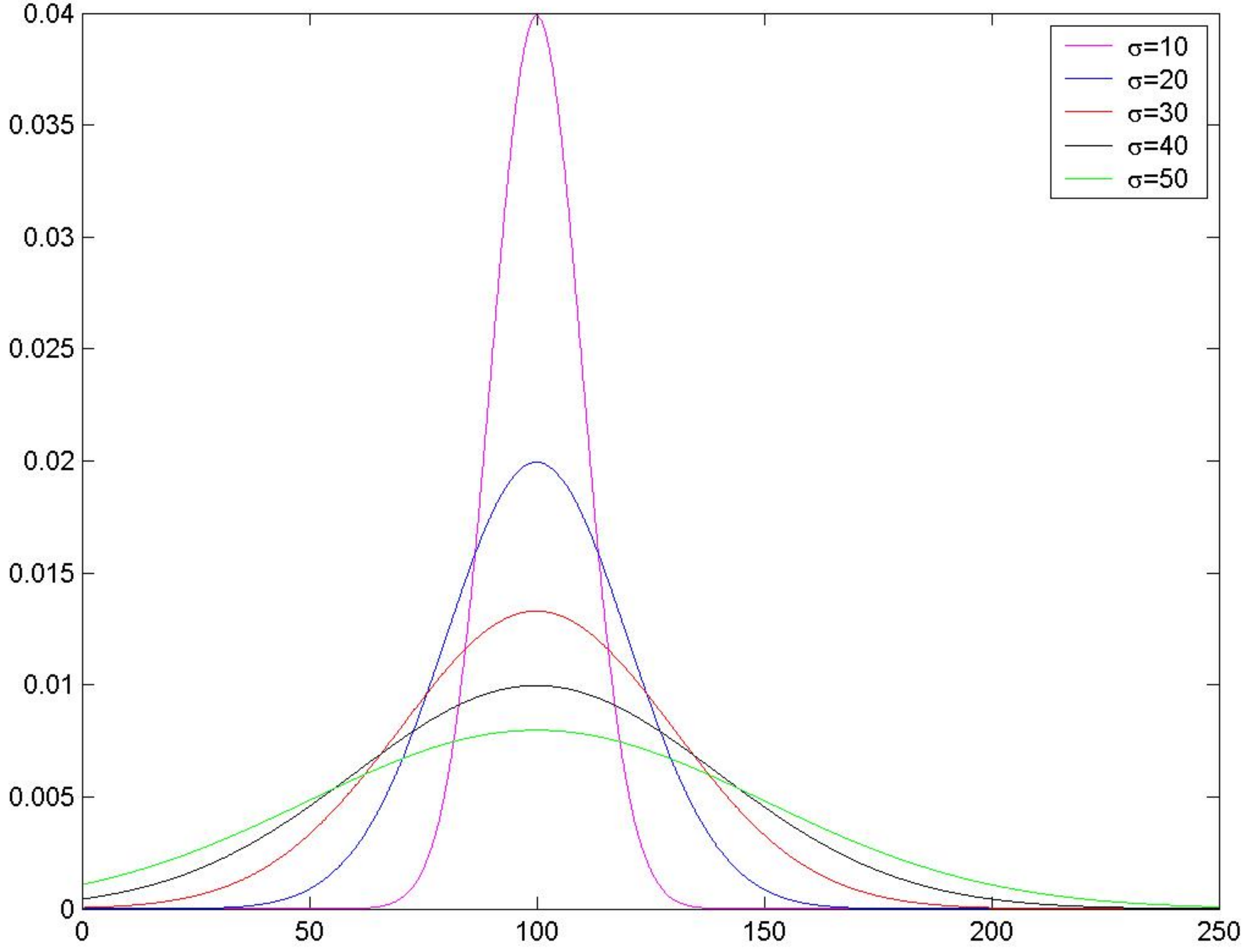
Curva Normale e N



Curva Normale e μ



Curva Normale e σ



La variabile aleatoria normale standard

Si definisce variabile aleatoria normale standard la v.a. normale con $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

La funzione di densità di probabilità è

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

con $-\infty < Z < \infty$

Essa riveste un ruolo fondamentale per la risoluzione di tutti i problemi relativi alle v.a. normali.

Variabile aleatoria normale standardizzata (Z)

La variabile standardizzata viene ottenuta semplicemente dividendo gli scarti dalla media di ogni modalità per lo scarto quadratico medio:

$$\boxed{z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}}$$

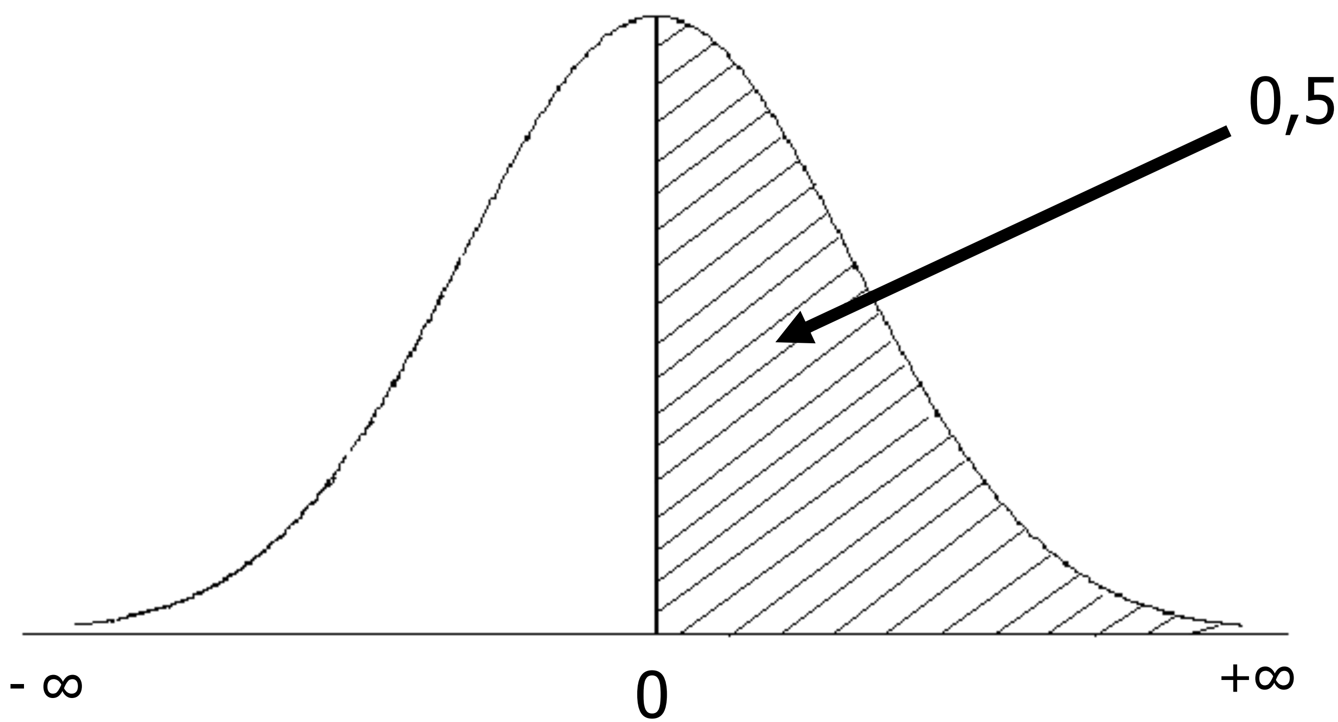
Variabile aleatoria normale standardizzata (Z)

La probabilità che una v.a. normale standard Z assuma un valore compreso tra z_1 e z_2 potrebbe essere calcolata come

$$P(z_1 < Z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(Z)dZ = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

Questo integrale non si risolve, perché si utilizzano le tavole statistiche della normale standard!

Curva Normale Standardizzata (Z)



$P(Z>0)=0,5$ $P(Z<0)=0,5$

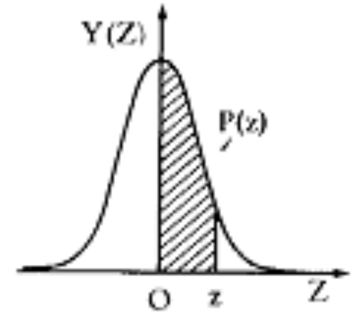
Curva Normale Standardizzata (Z)

Per questa distribuzione sono state calcolate le tavole statistiche che consentono di calcolare l'area sottesa alla curva e quindi di conoscere

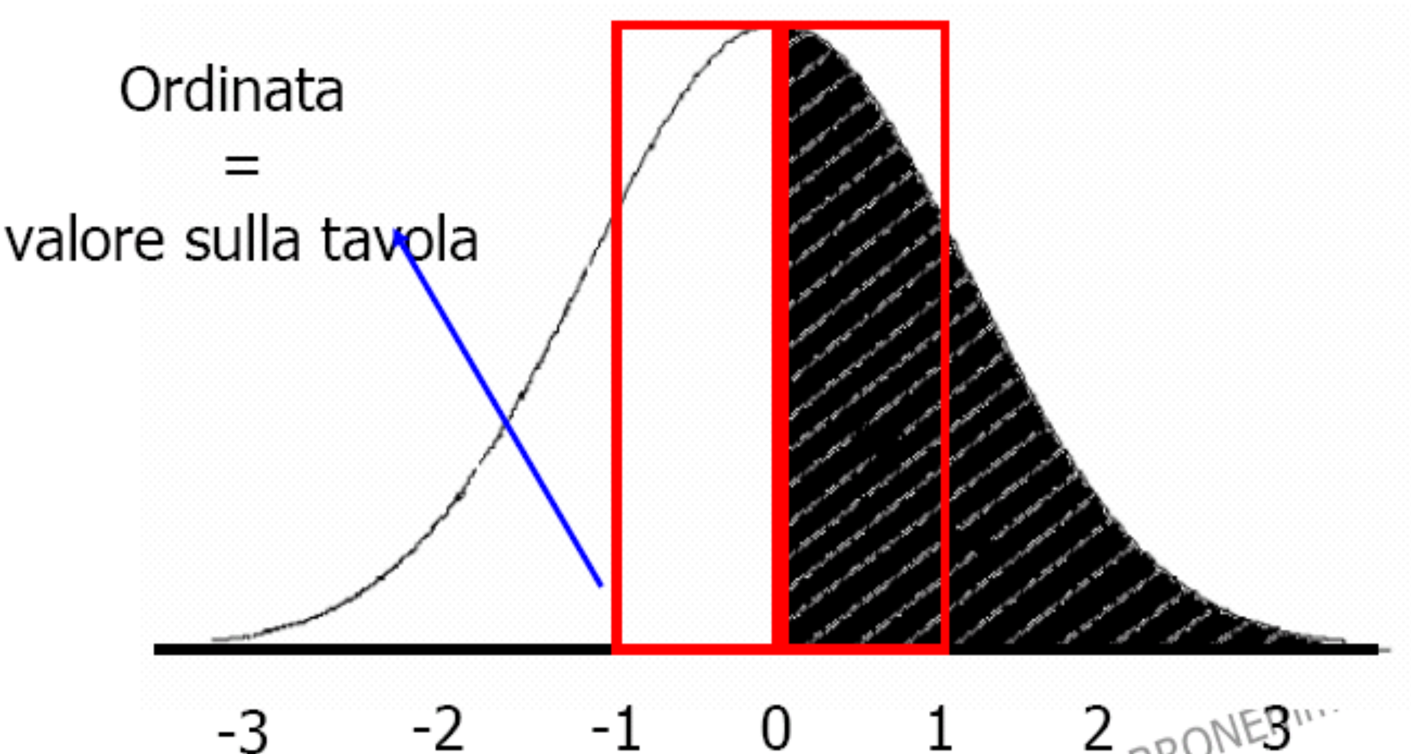
LA PROBABILITA' CON CUI SI VERIFICA UN DATO FENOMENO ENTRO UN INTERVALLO DI VALORI

Tavola

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997



Tutta l’area sottesa alla curva è pari a 1
La curva è simmetrica intorno allo zero (Z)
In ognuna delle due metà l’area vale 0.5
Quindi il valore della metà nera sarà: 1-0.5=0.5



Inoltre essendo SIMMETRICA avremmo che :

La simmetria implica che…

la probabilità (o freq relativa, quindi l'area) stimata per un valore di z negativo è uguale a quella ricavata per il corrispondente valore positivo (area compresa tra 0 e 1,8 è uguale all'area compresa tra 0 e -1,8)

Esistono due tipi di tavola: completa o dimezzata.

Noi lavoreremo sulla **tavola dimezzata (poiché la distribuzione è simmetrica)** ovvero la tavola che riporta solo metà della distribuzione della z. La tavola sulla quale lavoreremo comprende i valori di z che vanno da 0 (media) fino a 3.

Esempi di tavole

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0	0.0039	0.0079	0,0119	0.01595	0.0199	0.0239	0.0279	0.0318	0.0358
0.1	0.0398									
0.2	0.0792									
0.3	0.1179									
0.4	0.1554		Valore dell'area							
0.5	0,1914									
0.6										
0.7										
0.8										
0.9										
1	0.3413									
1.1										
1.2										
1.3										
1.4										
1.5										
1.6										
1.7										
1.8										
1.9										
2										
2.1										
2.2										
2.3										
2.4										
2.5										
2.6										
2.7										
2.8										
2.9										
3	0.4986									
3.1										
3.2										
3.3										
3.4										0.4999

Il valore di z si trova per riga e per colonna. Per riga, vengono letti i valori delle unità e del primo decimale di z e per colonna viene letto il secondo decimale di z. Il valore dell'area (freq. Relativa) viene letto all'interno della tavola

Ad es. L'area, quindi la probabilità, per z=0.42 si trova in corrispondenza dell'incrocio tra il valore di riga pari a 0.4 e quello di colonna pari a 0.02

Esempio: Curva Normale standardizzata

Data una popolazione di N=400 acquisti, la variabile **X= valore degli acquisti (€)** si distribuisce normalmente con media 50 €(m) e s.q.m. (s) pari a 10€.

Determinare:

1. Probabilità che gli acquisti abbiano un importo inferiore o uguale a 30 euro
2. Probabilità che gli acquisti abbiano un importo compreso tra 30 e 60 euro
3. Importo massimo speso dal primo 3% della popolazione

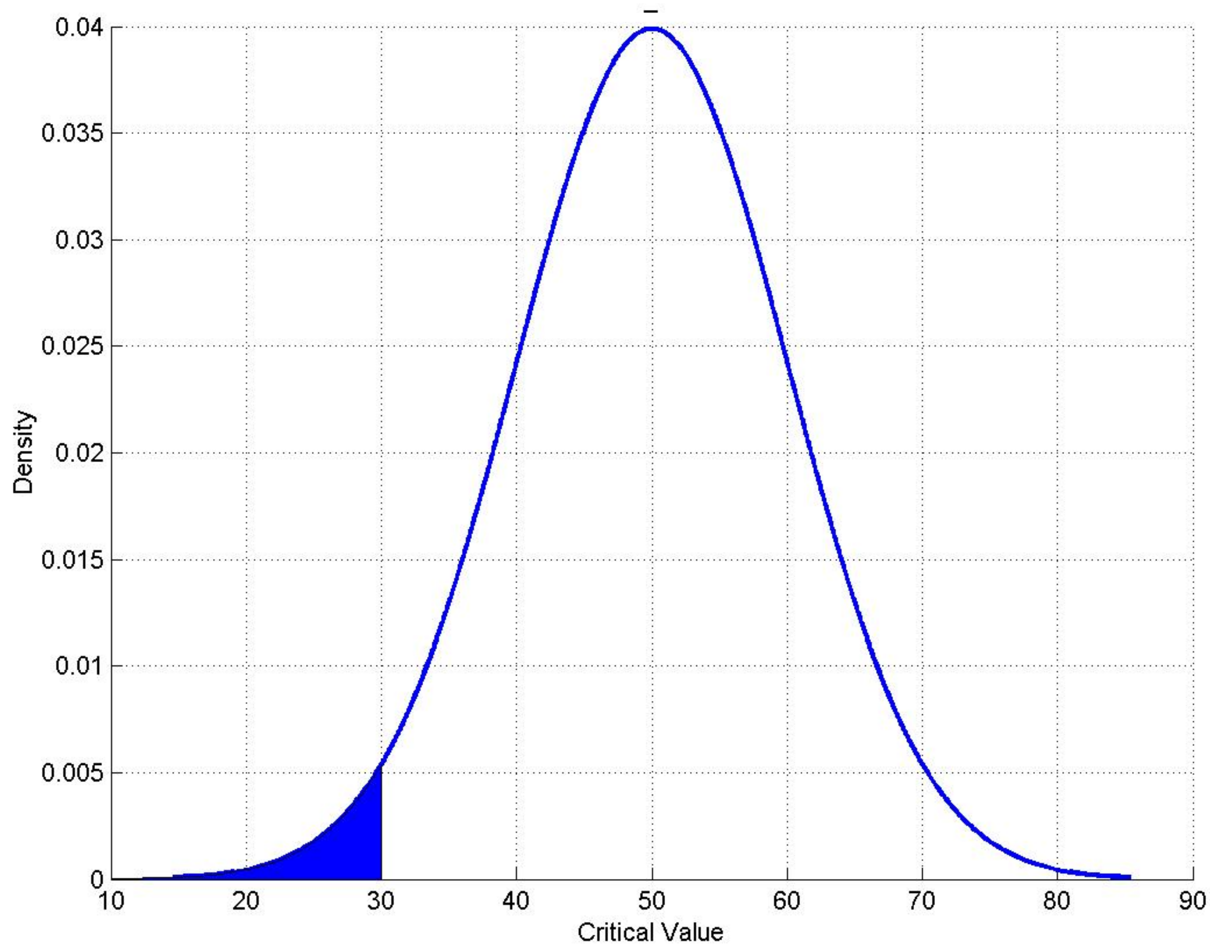
Probabilità che gli acquisti abbiano un importo inferiore o uguale a 30 euro

Step:

1. Standardizzo l'estremo (calcolo z_{30})

2. Trovo il valore dell'ordinata sulle tavole (P_{z30}), ottenendo quindi la probabilità che vengano effettuati acquisti per un importo inferiore o uguale a 30 €

Probabilità di acquisti con importo inferiore o uguale a 30 euro



Probabilità acquisti con importo inferiore o uguale a 30 euro

x_i=30 € di acquisti

Importo standardizzato:

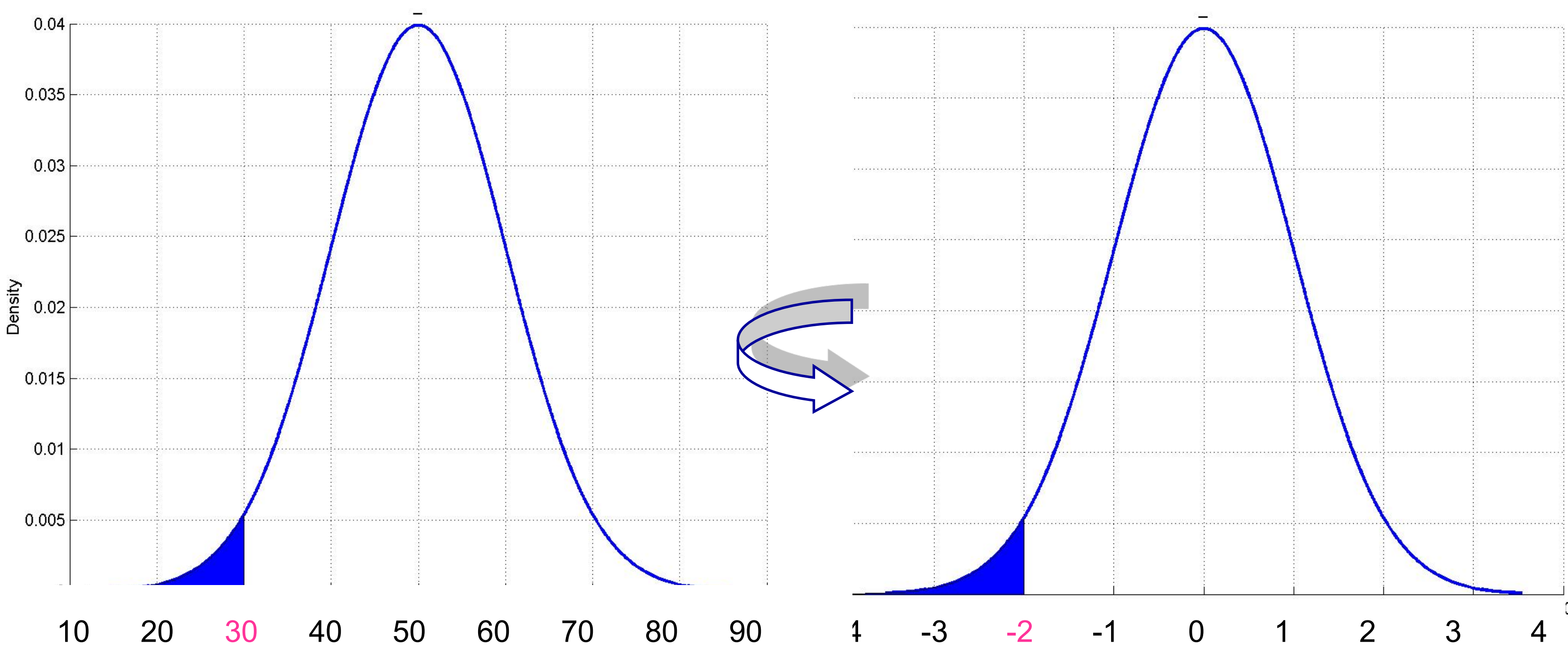
$$\boxed{Z_i = (30-50)/10 = -2}$$

30 euro di x equivalgono a -2 di Z

Probabilità che gli acquisti abbiano un importo inferiore o uguale a 30 euro

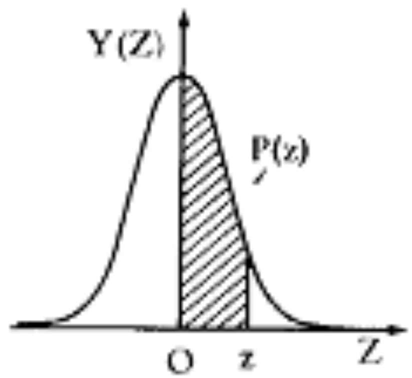
Distribuzione di X

Distribuzione di Z



Probabilità acquisti con importo inferiore o uguale a 30 euro

Se lavoro sulla tavola che evidenzia in grigio l'area che va 0 a z.

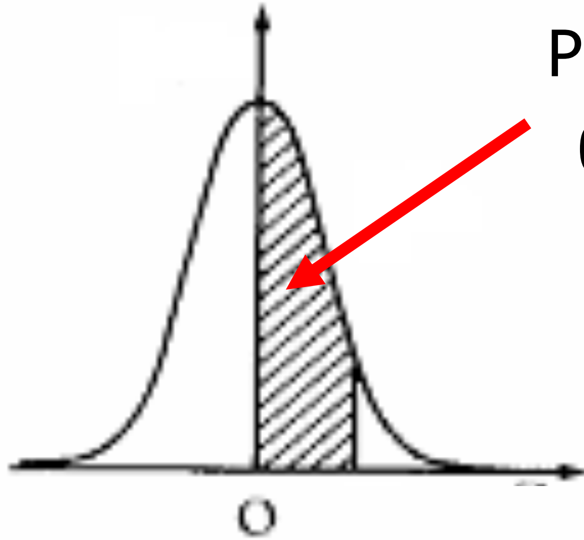


Trovo sulle tavole il valore di P(0<= z <= +2) perché nella tavola sono riportati solo i valori positivi e la distribuzione è simmetrica! Poiché sono interessata ai valori di P(z<=-2) dovrò fare la seguente sottrazione:

$$\boxed{0.5 - P(z \le 2)}$$

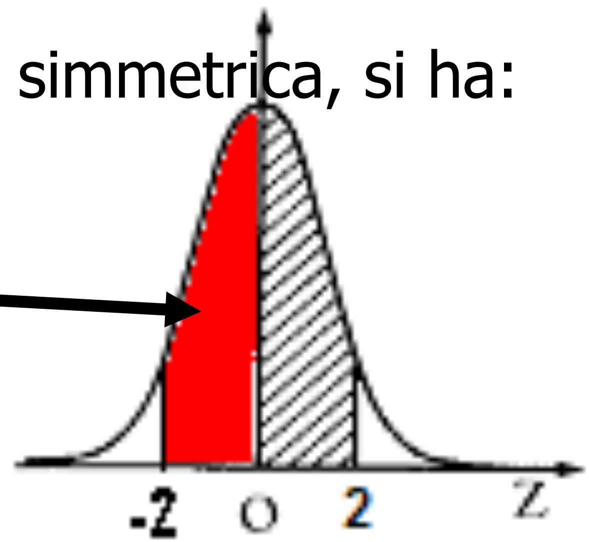
L’area tratteggiata indica l’area riportata nella tavola in corrispondenza dei valori di z

P(z=2)
0.477



Poiché la distribuzione di Z è simmetrica, si ha:

P(z=-2)
0.477



$z = -2$

$P(z=-2) = 0.477$

$P(z<=-2) = 0.5 - P(z=2)= 0.5-0.477= 0.023$

Probabilità acquisti con importo inferiore o uguale a 30 euro

Se lavoro con le tavole che riportano come area grigia quella tra $-\infty$ e $-z$.

Trovo sulle tavole il valore di $P(z<=-2)$ perché nella tavola sono riportati solo i valori negativi e ottengo LA PROBABILITA' CUMULATA RELATIVA A -2:

$$P(z<=-2)=0.0228$$

Probabilità acquisti con importo inferiore o uguale a 30 euro

Se lavoro con le tavole che riportano come area grigia quella tra $-\infty$ e $+z$.

Trovo sulle tavole il valore di $P(z<=+2)$ perché nella tavola sono riportati solo i valori positivi e perché la distribuzione z è simmetrica e ottengo LA PROBABILITA' CUMULATA RELATIVA A 2:

$$P(z<=+2)=0.9772$$

$$P(z<=-2)=1- P(z<=+2)=1- 0.9772=0.0228$$

RITORNANDO ALL'ESEMPIO PRECEDENTE…

Data una popolazione di 400 (N) acquisti, distribuita normalmente con media (μ) 50 e s.q.m. (σ) pari a 10, determinare:

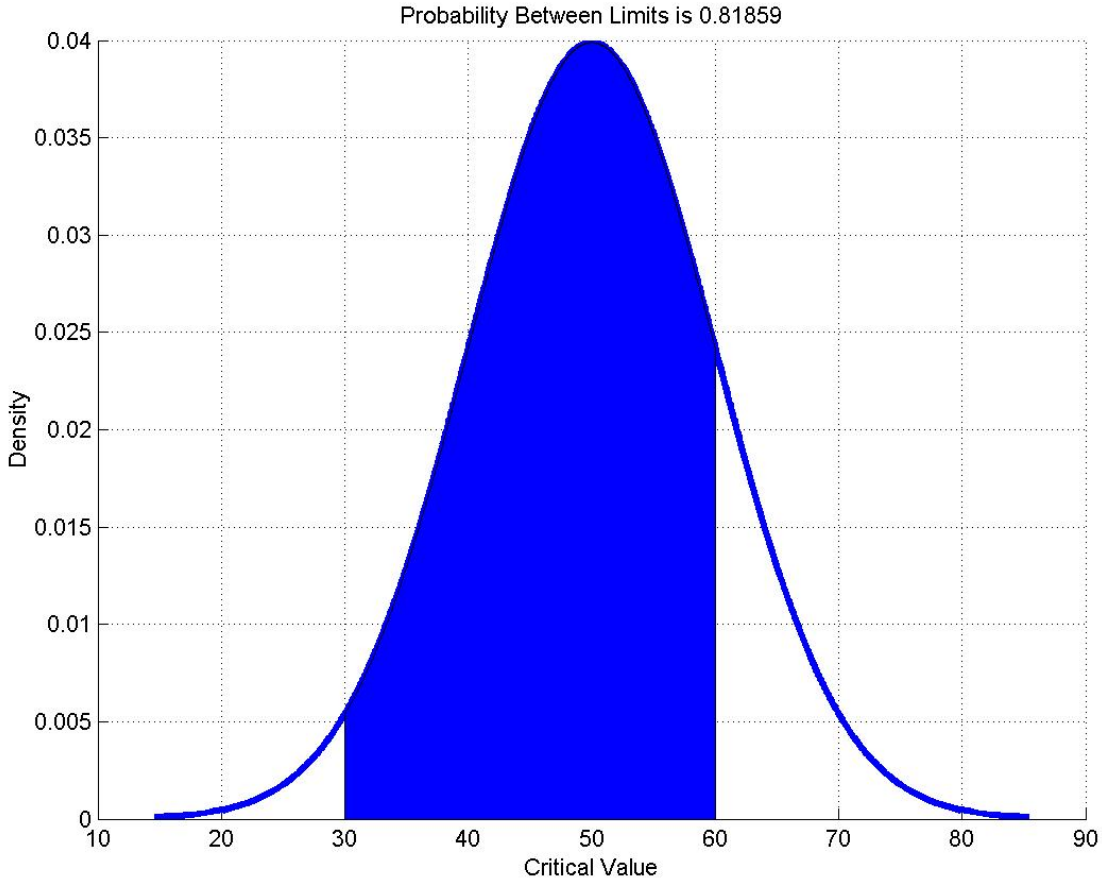
1. Probabilità che gli acquisti abbiano un importo compreso tra 30 e 60 euro
2. Importo massimo speso dal primo 3% della popolazione (o anche l'intervallo cui appartiene il 3% degli acquisti)

Probabilità che gli acquisti abbiano un importo compreso tra 30 e 60 euro

<u>Step</u>:

- Standardizzo gli estremi dell'intervallo (calcolo z_{30} e z_{60})
- Trovo i valori sulle tavole
- Sommo i valori→ottengo la probabilità ($P(Z_{30} < Z < Z_{60})$

Probabilità di acquisti di importo compreso tra 30 e 60 euro



Probabilità di acquisti di importo compreso tra 30 e 60 euro

$x_1=30 \quad x_2=60$

$z_1=(30-50)/10=-2 \quad z_2=(60-50)/10=1$

Trovo sulle tavole i valori di $P(z=2)$ e di $P(z=1)$

$P(z=2)= 0.477$ e $P(z=1) = 0.341$

La probabilità è data da:

$P(z=1) + P(z=2)= 0.477+0.341= 0.818$ (81.8%)

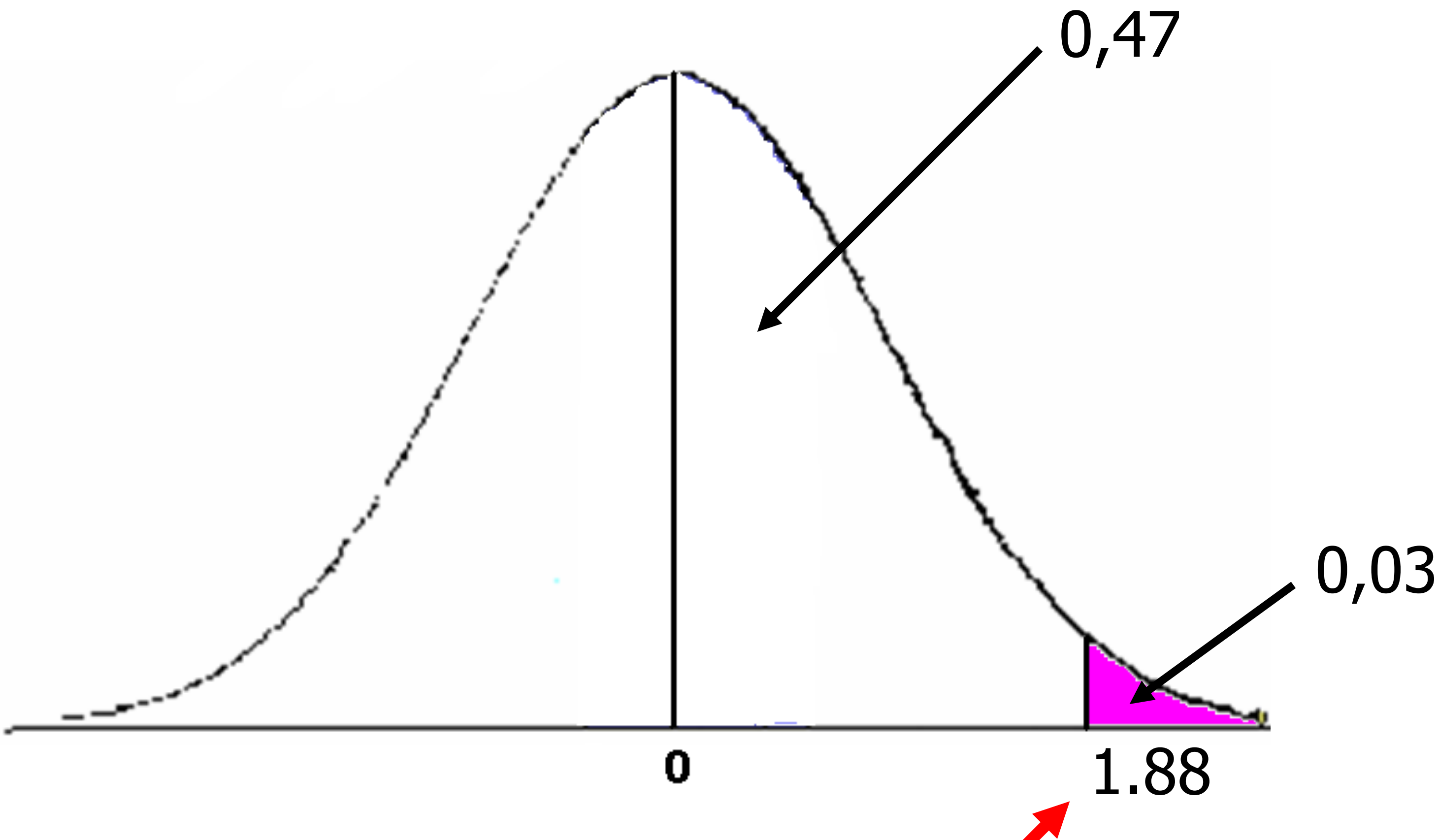
Qual è l'importo massimo speso dal primo 3% della popolazione?

Step:

1) Cerco, all'interno della tavola, il valore della probabilità cumulata associata a z pari a $P(Z \geq z) = P(Z <= z) = 0.03 = 3\%$

ATTENZIONE: se la tavola riporta i valori da 0 a +Z,dovrò fare la seguente sottrazione:

$0.5 - 0.03 = 0.47$

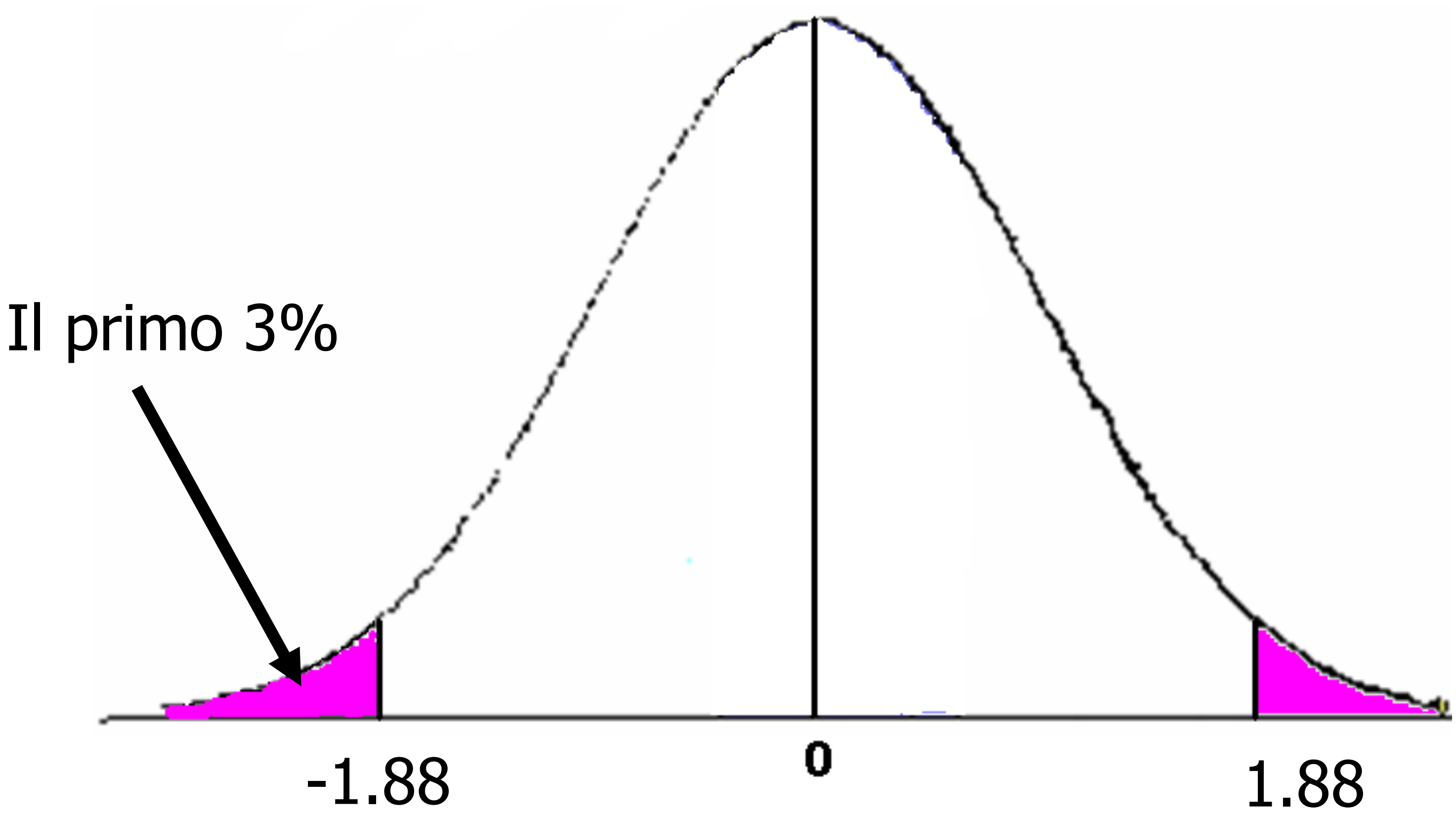


z fornito dalla tavola in corrispondenza dell’area pari a 0.47

Qual è l'importo massimo speso dal primo 3% della popolazione?

1. Leggo il valore z corrispondente a 0.47 ossia $z=1.88$
2. Poiché sono interessato al primo 3% considero semplicemente il corrispondente valore negativo ovvero $z = -1.88$

Qual è l'importo massimo speso dal primo 3% della popolazione?



Qual è l'importo massimo speso dal primo 3% della popolazione?

3. Devo fare l'operazione inversa alla standardizzazione per ottenere x_i dato z_i

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mu + z\sigma = X$$

$$-1.88 = \frac{x_i - 50}{10} \quad \Rightarrow \quad -1.88 \times 10 = x_i - 50 \quad \Rightarrow \quad x_i = (-1.88 \times 10) + 50$$

$$x_i = 31.2$$

31 euro rappresenta l'importo speso dal primo 3% degli acquirenti…cioè dai 12 acquisti più contenuti!

ESERCIZIO:

In una banca il tempo X (in minuti) necessario a un impiegato di cassa per fornire al cliente il servizio richiesto si distribuisce come una normale con media (μ) 4.5 e (σ) s.q.m. pari a 1.1

Qual è la probabilità che un servizio bancario richieda:

a)più di 6 minuti
b)fra i 3.5 e i 6 minuti

a) Più di 6 minuti

1) X=6

   Standardizzo $z = (6 - 4.5)/1.1 = 1.36$

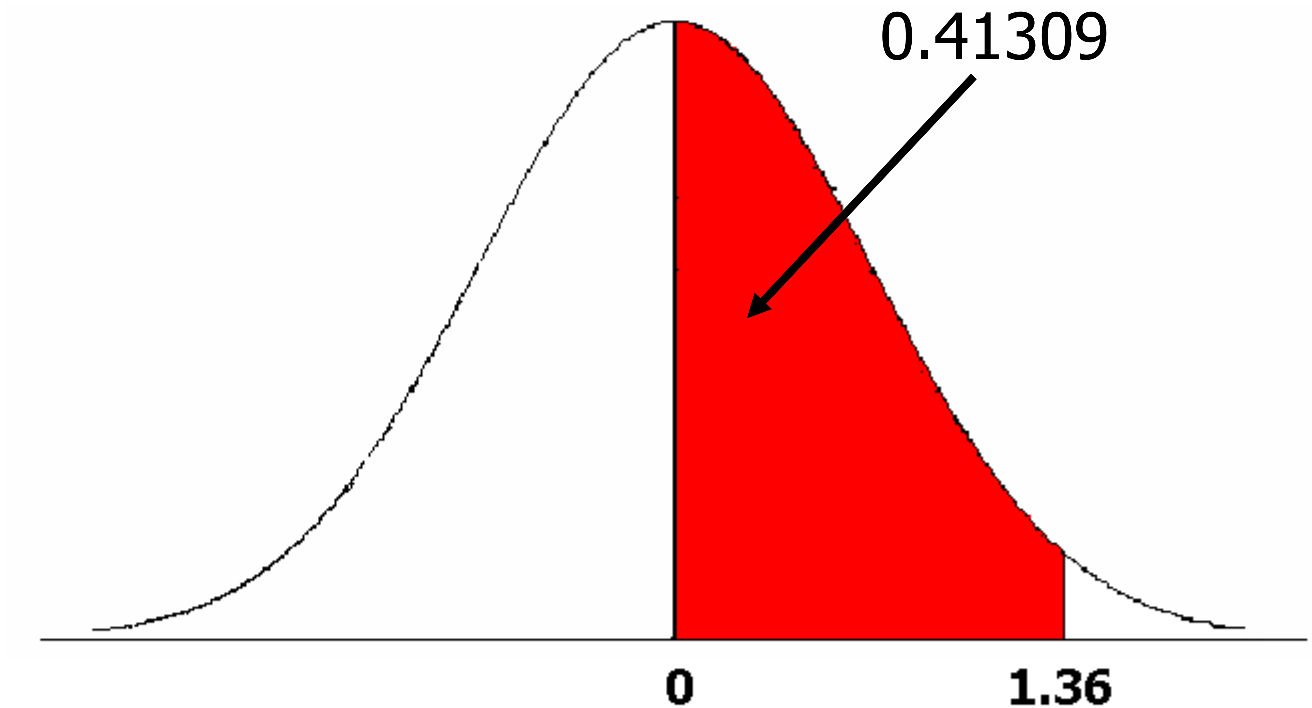
2) Cerco il valore di z sulla tavola

   $P(z = 1.36) = 0.41309$

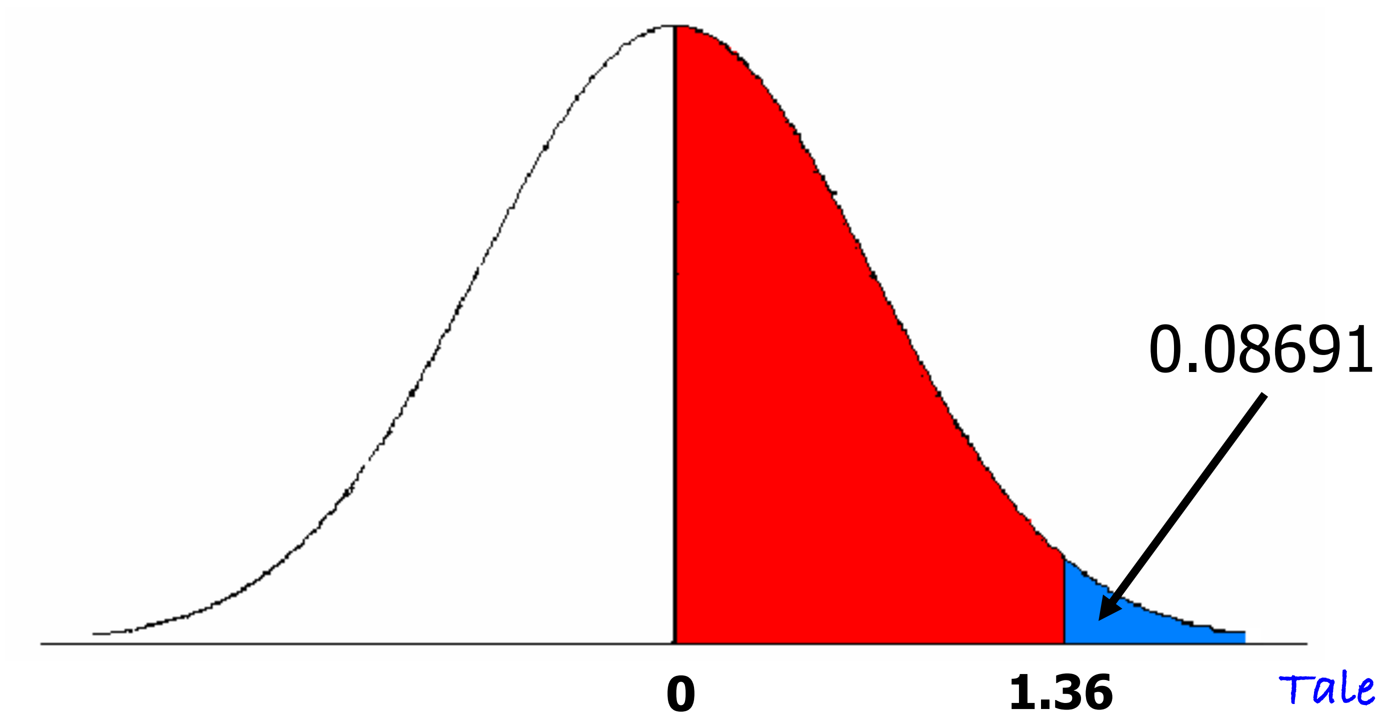
Tavola

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	$\boxed{0,41309}$	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670

L’area colorata di rosso corrisponde all’area ottenuta dalla tavola:



Tuttavia noi siamo interessati all'area colorata di azzurro in quanto l'esercizio chiede la probabilità di avere un servizio svolto in più di 6 minuti



Tale probabilità è anche = alla Frequenza relativa

3) $P(z > 1.36) = 0.5 - 0.41309 = 0.08691$

b) fra i 3.5 e i 6 minuti

$x_1 = 3.5$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 6$

1) Standardizzo gli estremi dell'intervallo

   $z_1 = (3.5 - 4.5)/1.1 = -0.91$

   $z_2 = (6 - 4.5)/1.1 = 1.36$

2) Cerco i valori di z_1 e z_2 sulla tavola:

   $P(z_1 = -0.91) = P(z_1 = 0.91) = 0.31859$

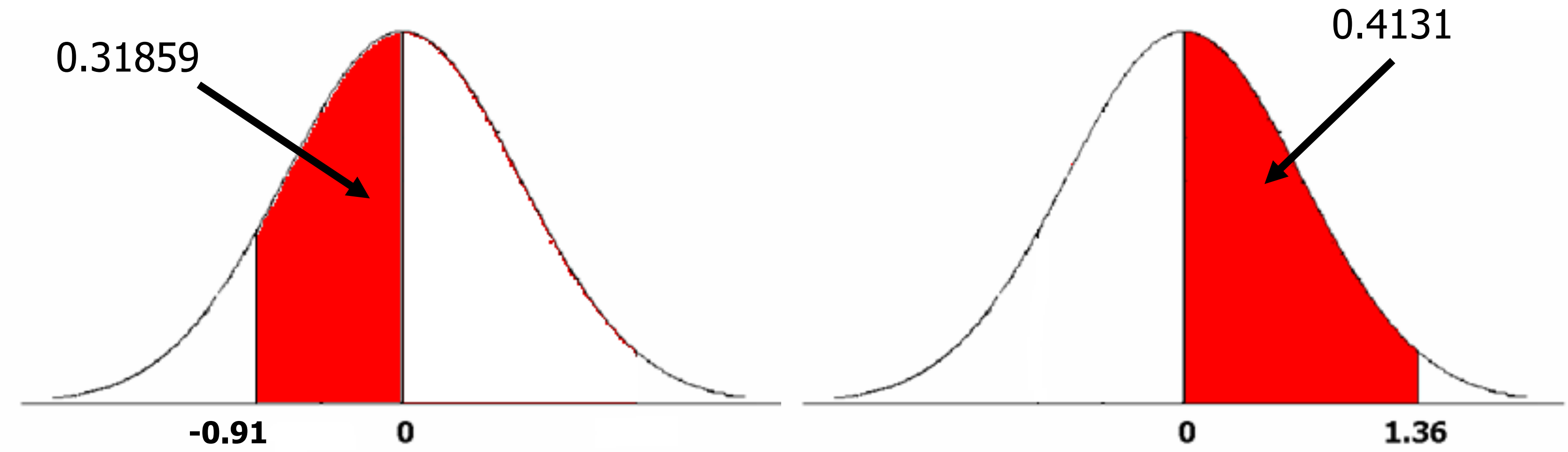
   $P(z_2 = 1.36) = 0.41309$

la curva è simmetrica

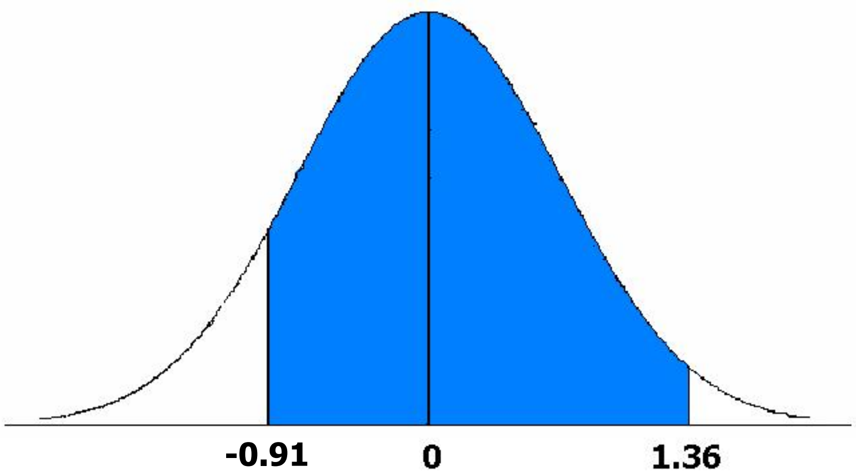
Tavola

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	$\boxed{0,31859}$	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670

L’area colorata di rosso corrisponde all’area ottenuta dalla tavola:



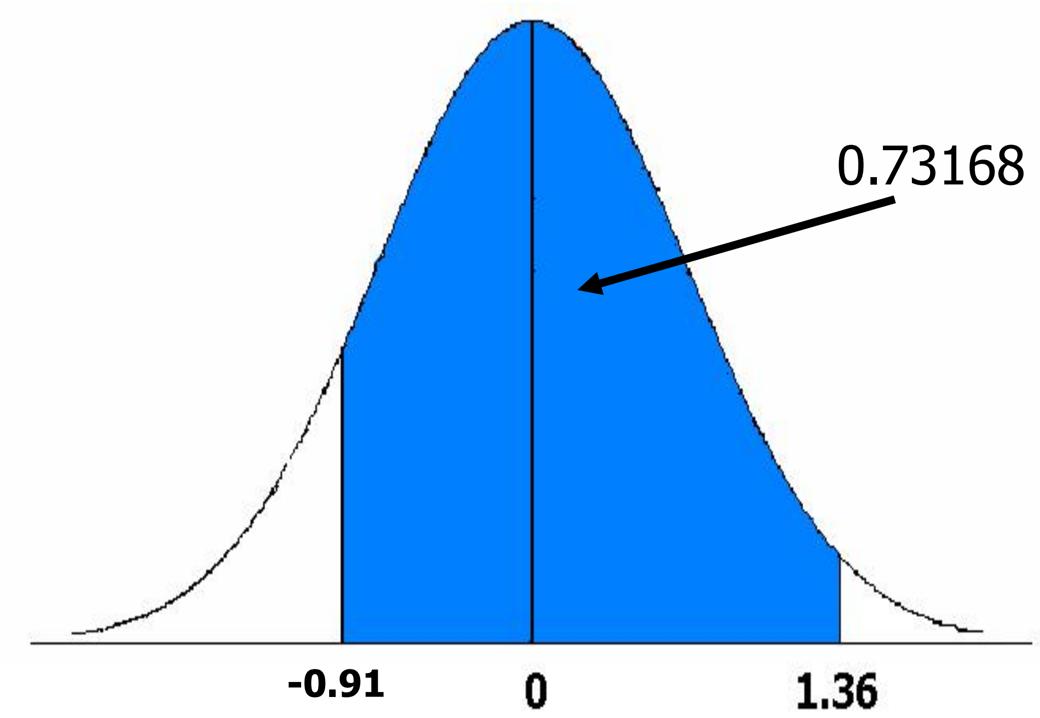
Noi siamo interessati all’area colorata di azzurro cioè alla frequenza relativa dei servizi bancari svolti fra i 3.5 e i 6 minuti



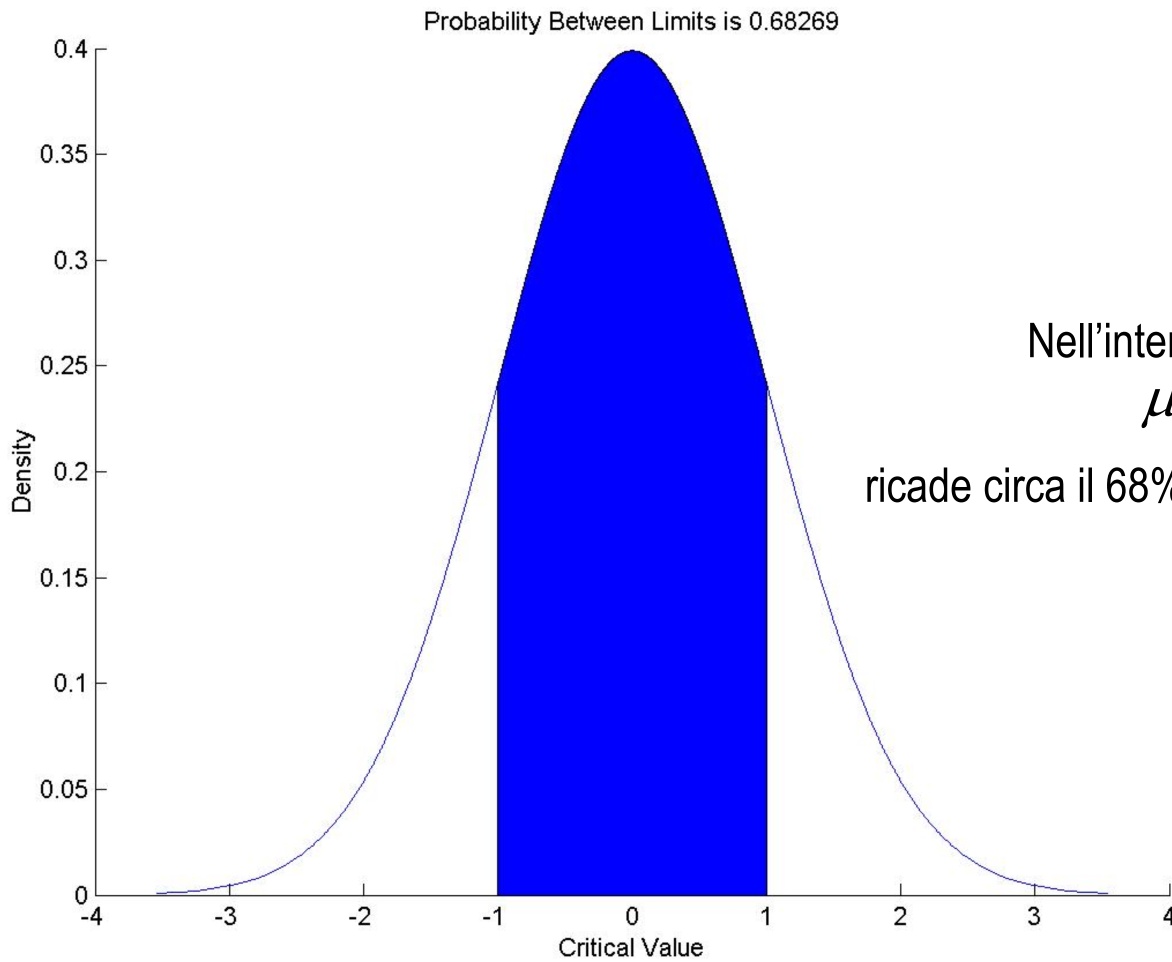
3) $P(-0.91 < Z < 1.36) =$

$= 0.31859 + 0.41309 = 0.73168$

La Probabilità di avere un servizio che richieda tra i 3.5 e i 6 minuti è di 0.73, è quindi alta!



Intervalli tipici

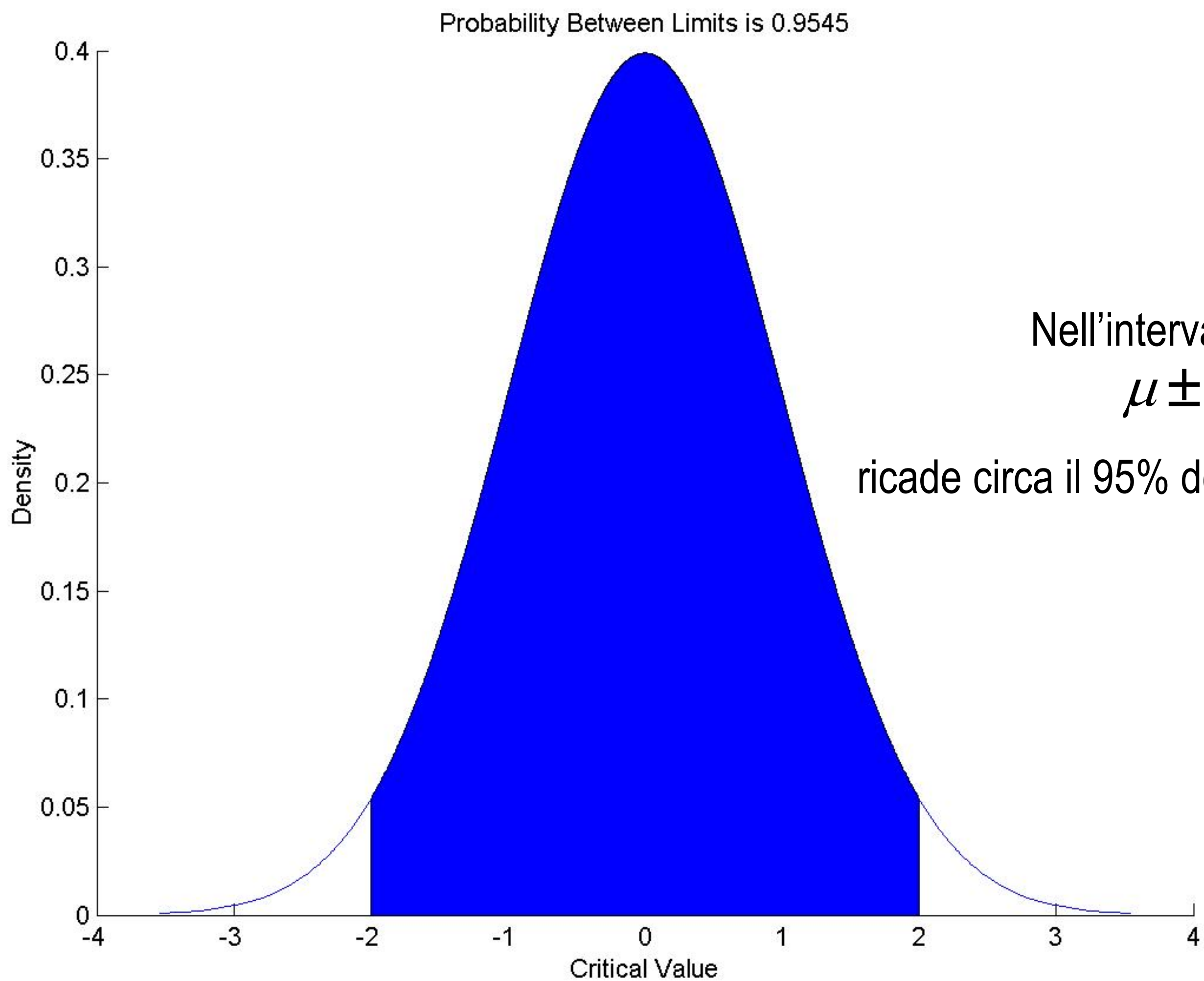


Nell’intervallo

$$\mu \pm \sigma$$

ricade circa il 68% delle osservazioni

Intervalli tipici

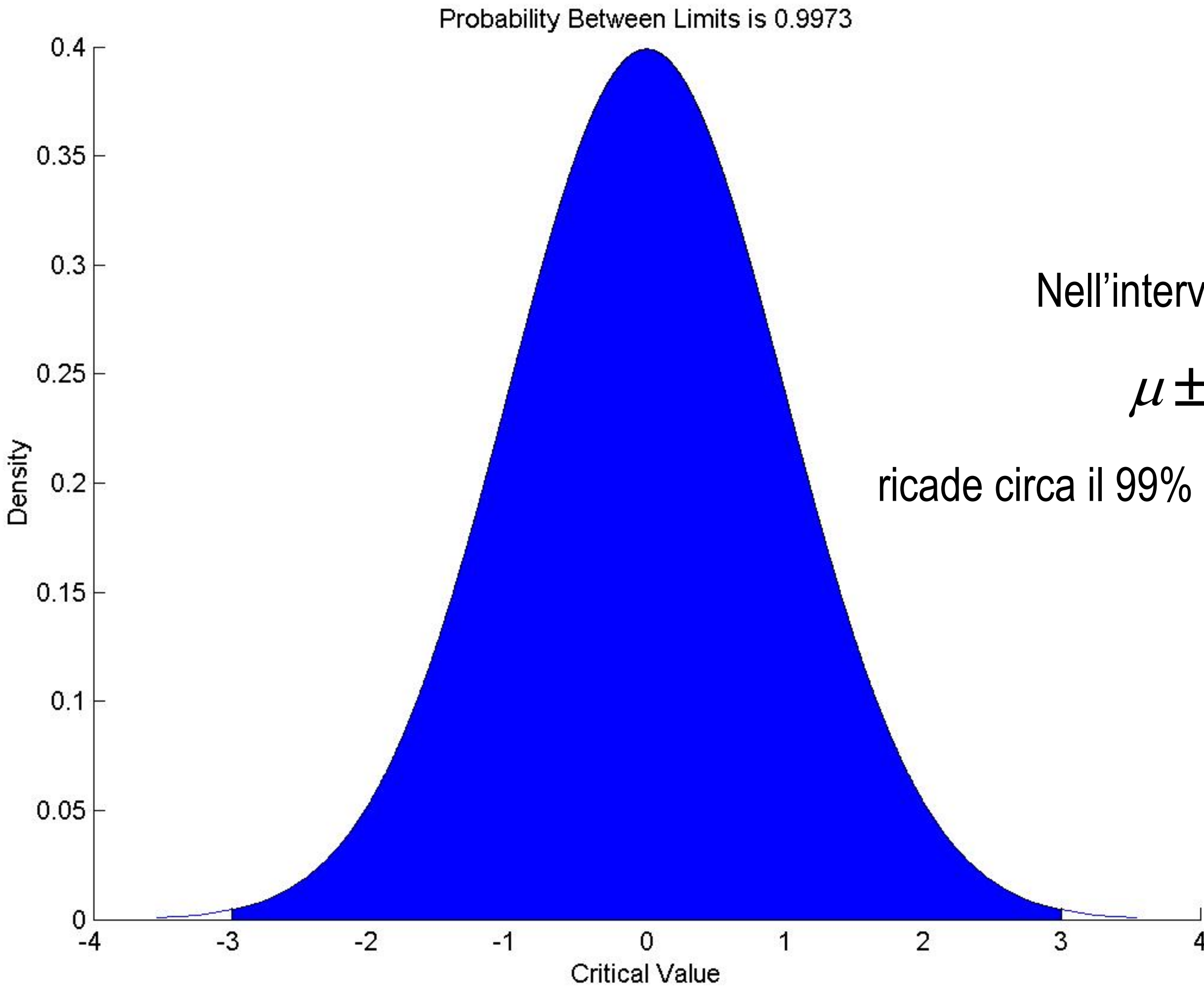


Nell'intervallo

$$\mu \pm 2\sigma$$

ricade circa il 95% delle osservazioni

Intervalli tipici



Nell'intervallo

$$\mu \pm 3\sigma$$

ricade circa il 99% delle osservazioni