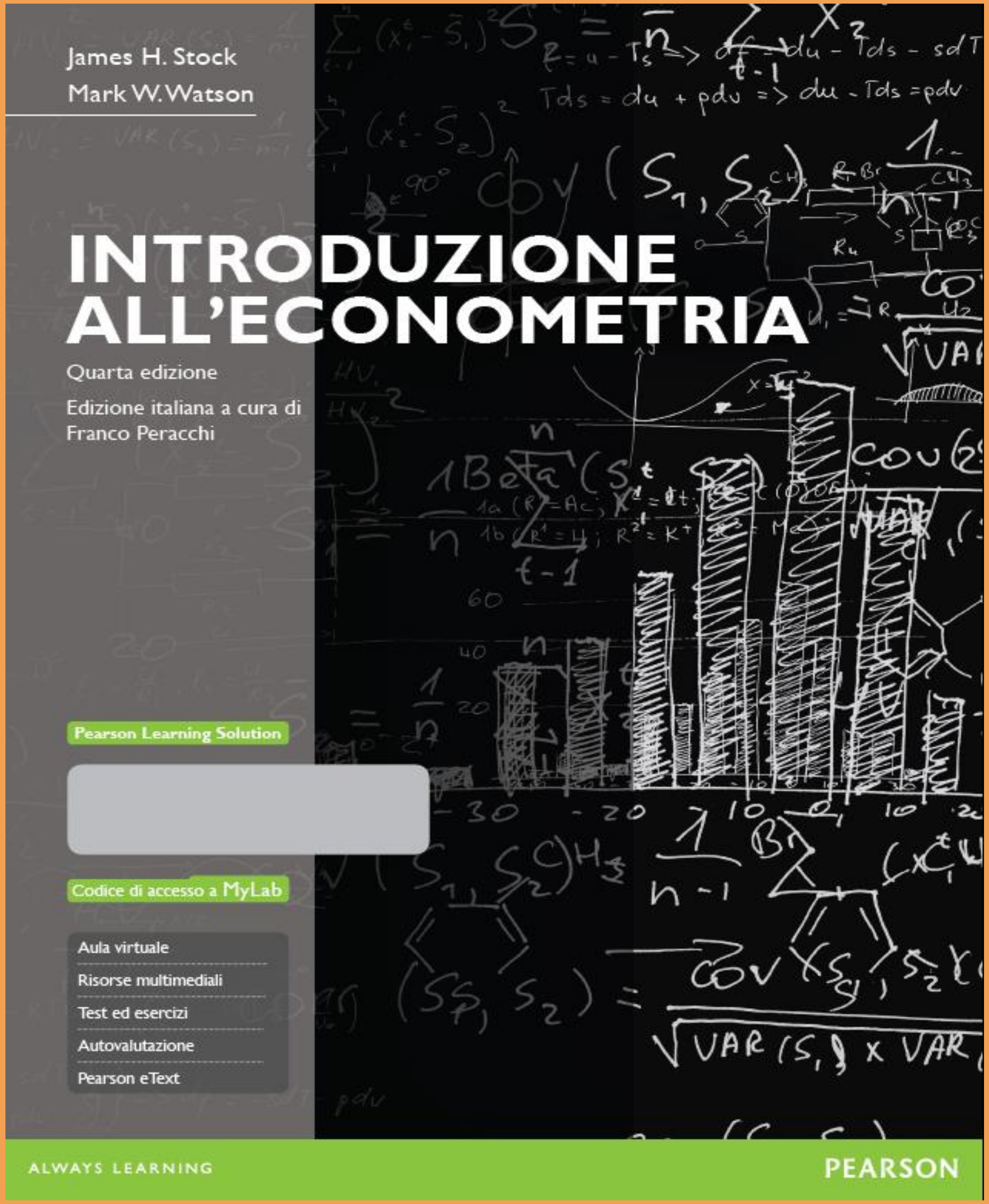
Capitolo 14

Introduzione a regressioni temporali e a previsioni



Sommario

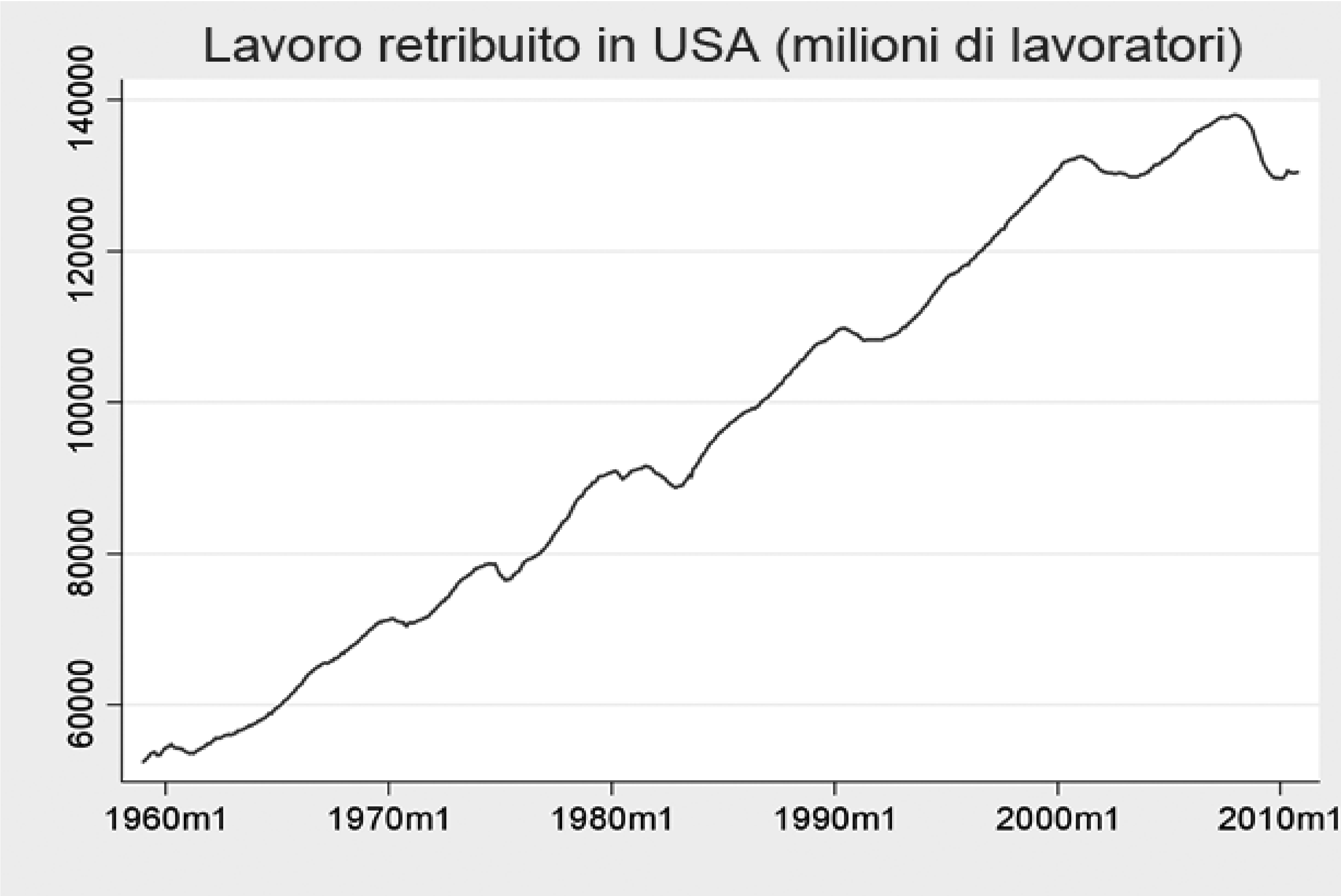
1. Serie temporali: quali peculiarità?
2. Uso di modelli di regressione per previsioni
3. Ritardi, differenze, autocorrelazione e stazionarietà
4. Autoregressioni
5. Il modello ADL (autoregressivo misto)
6. Incertezza e intervalli delle previsioni
7. Scelta della lunghezza dei ritardi: criteri di informazione
8. Non stazionarietà I: tendenze
9. Non stazionarietà II: rotture
10. Riepilogo

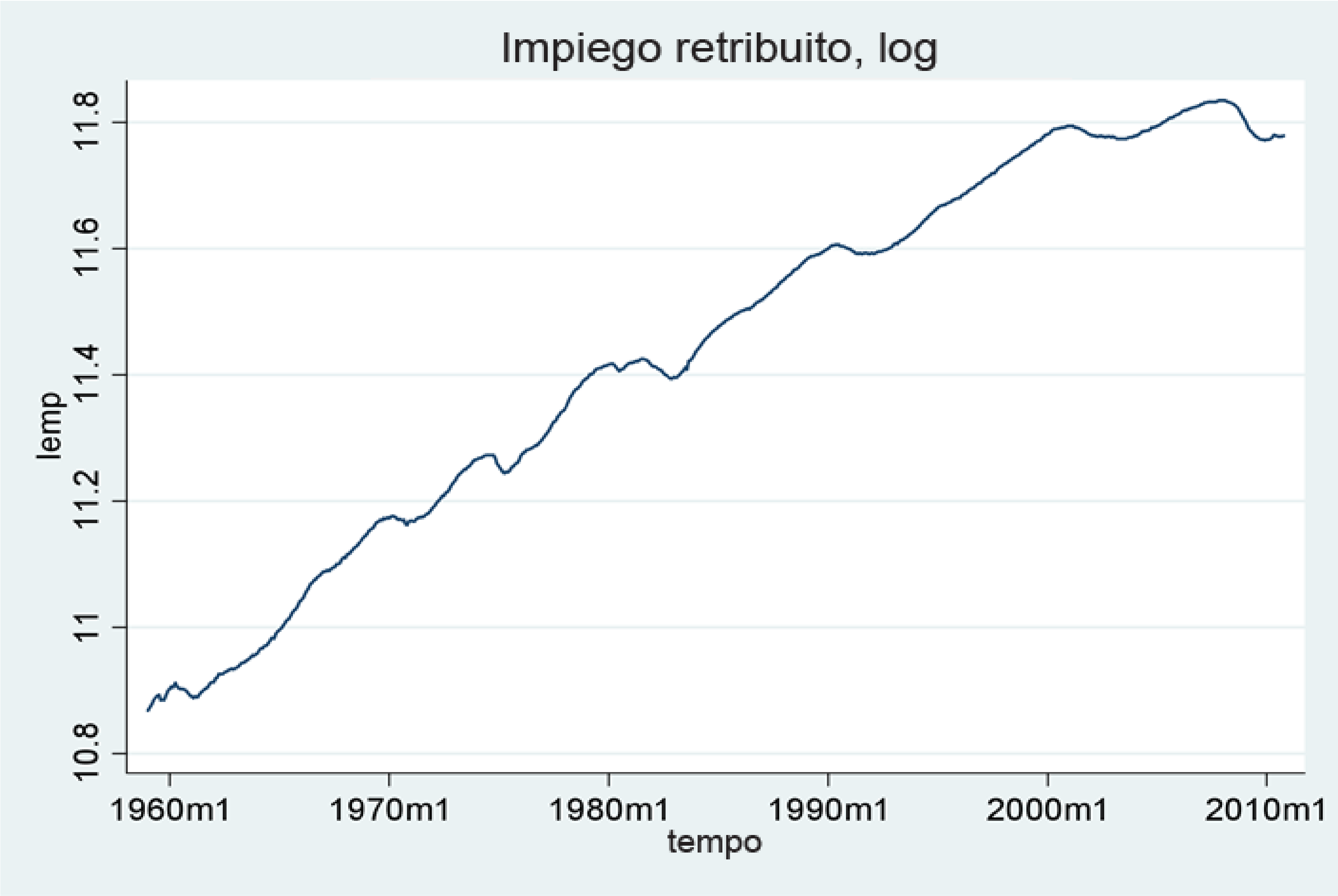
1. Serie temporali: quali peculiarità?

Le serie temporali sono costituite da dati raccolti sulla stessa unità in più periodi temporali

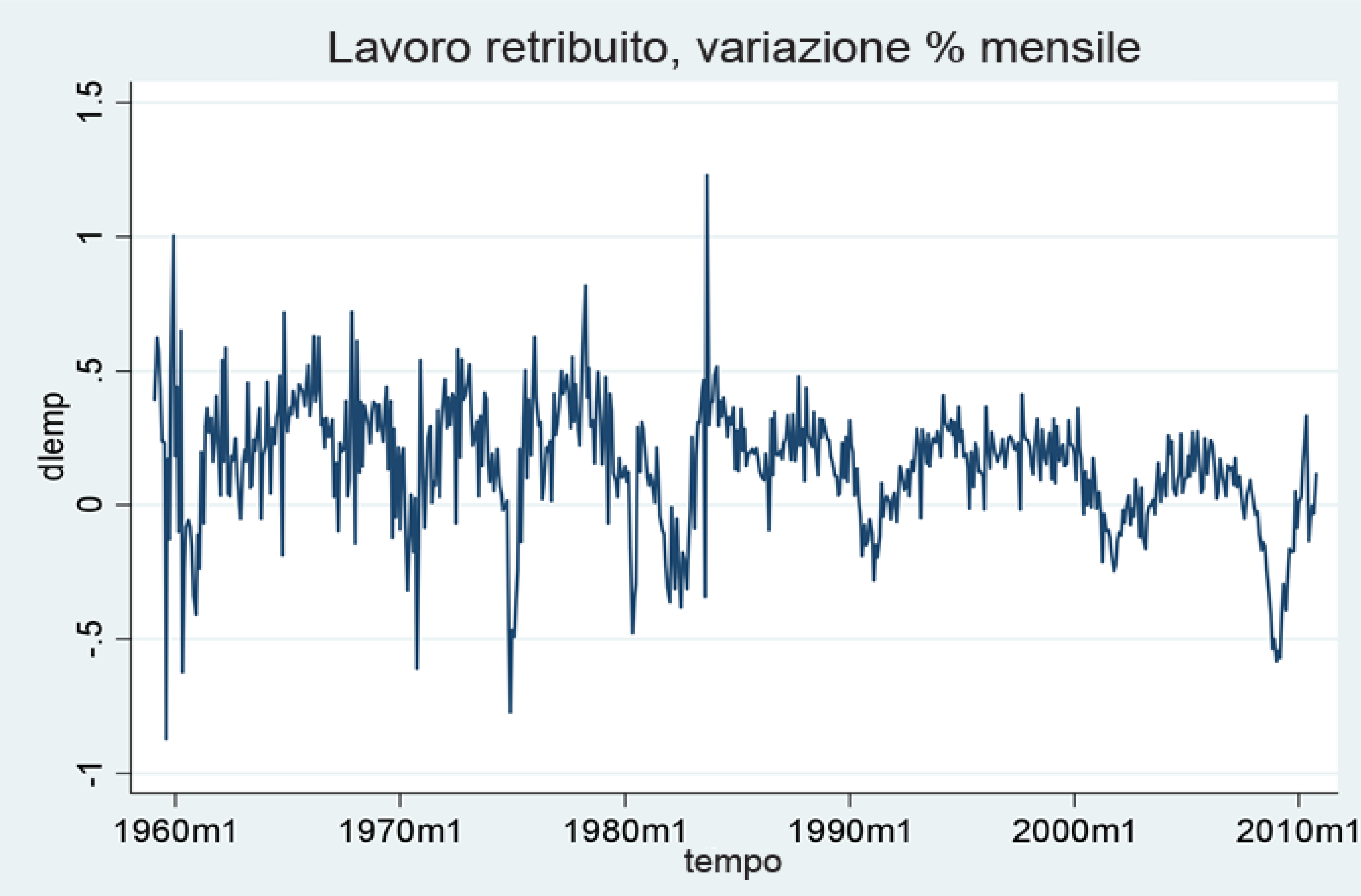
- Consumi aggregati e PIL per un paese (per esempio, 20 anni di osservazioni trimestrali = 80 osservazioni)
- Tassi di cambio yen/$, sterlina/$ ed euro/$ (dati giornalieri per 1 anno = 365 osservazioni)
- Consumo di sigarette pro capite in California, per anno (dati annuali)

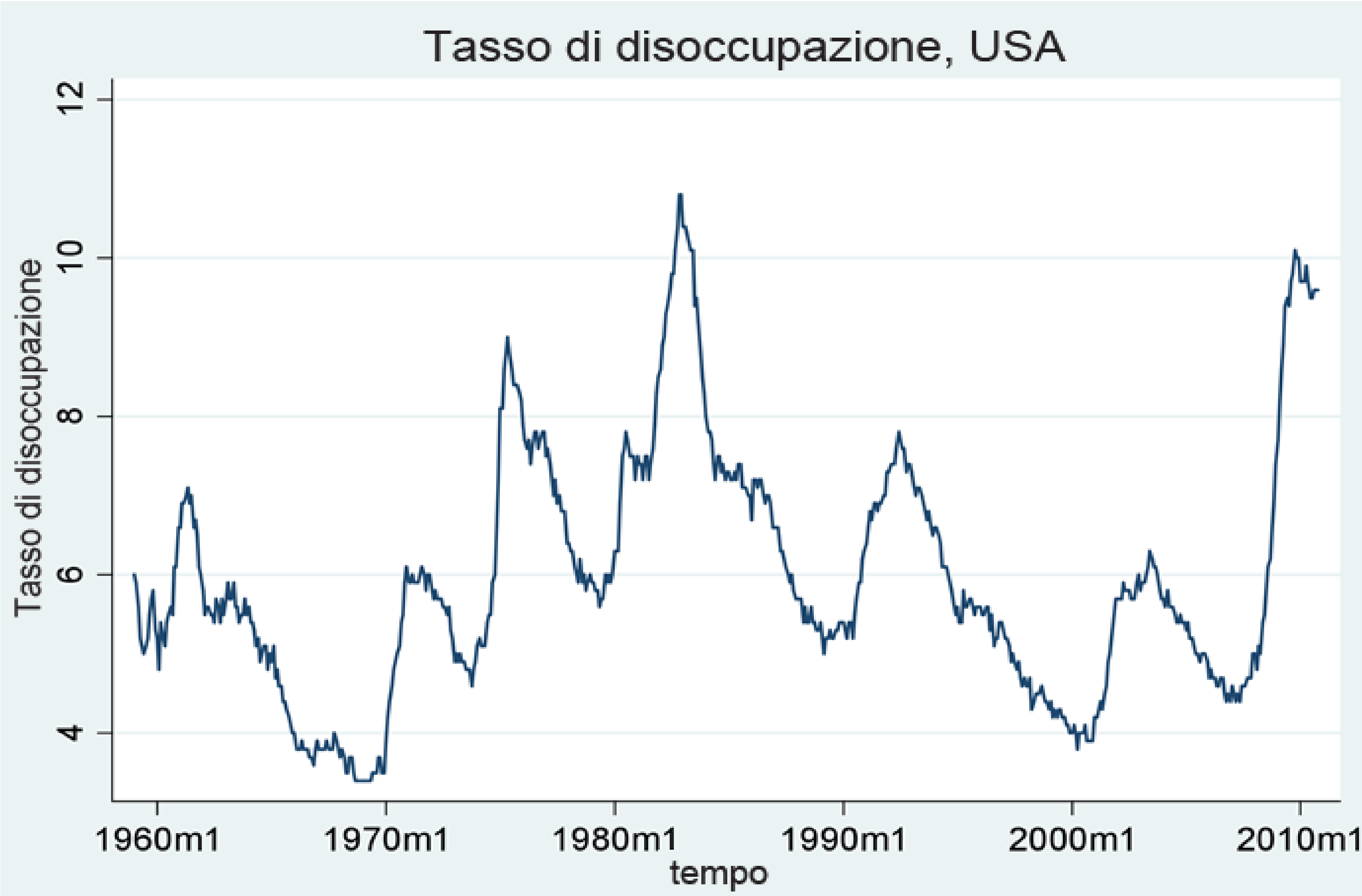
Alcune serie temporali per dati macro e finanziari

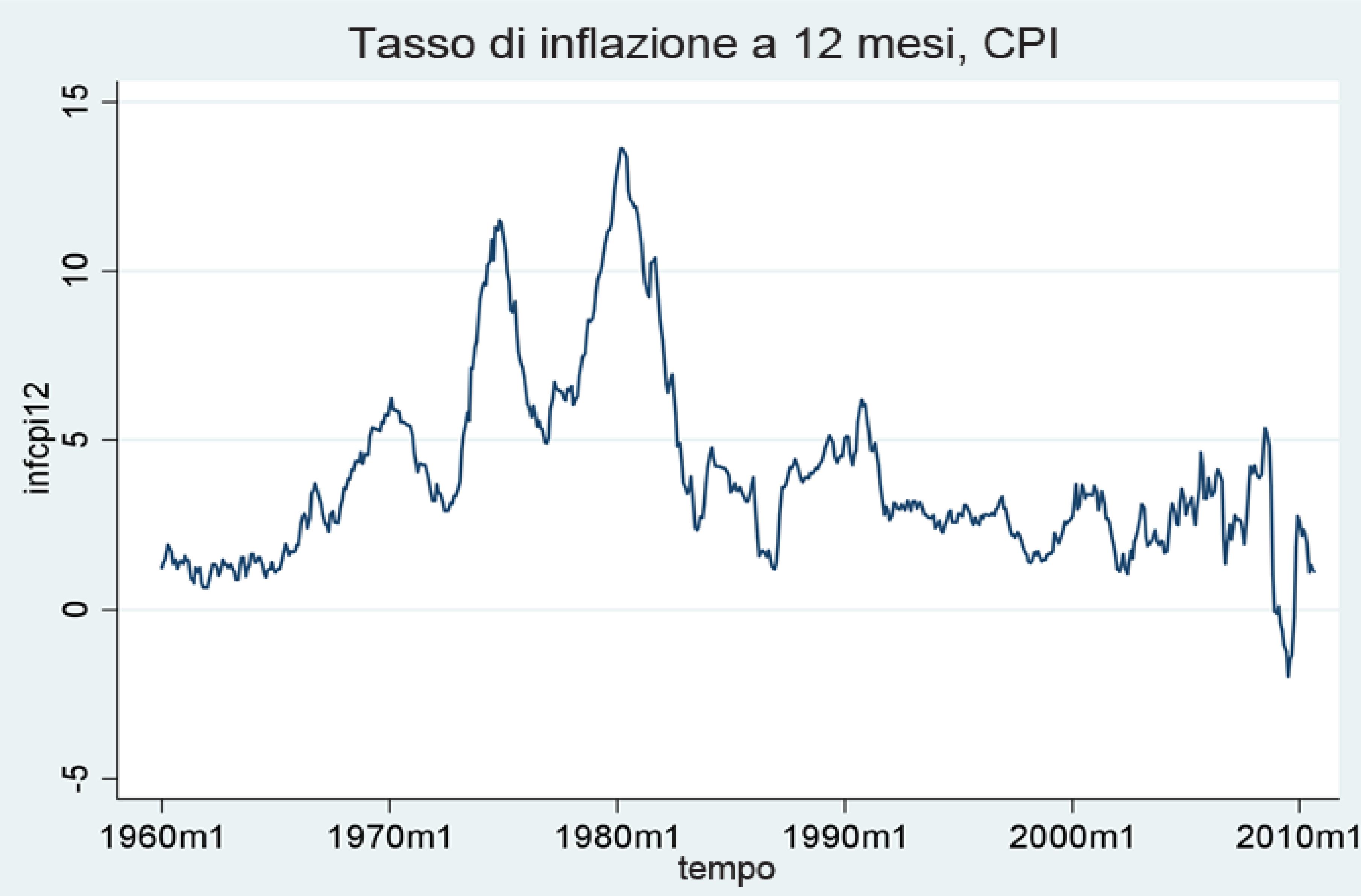




Impiego retribuito, log
lemp
10.8
11
11.2
11.4
11.6
11.8
1960m1
1970m1
1980m1
1990m1
2000m1
2010m1
tempo


Lavoro retribuito, variazione % mensile
dlemp
-1
-.5
0
.5
1
1.5
1960m1
1970m1
1980m1
1990m1
2000m1
2010m1
tempo

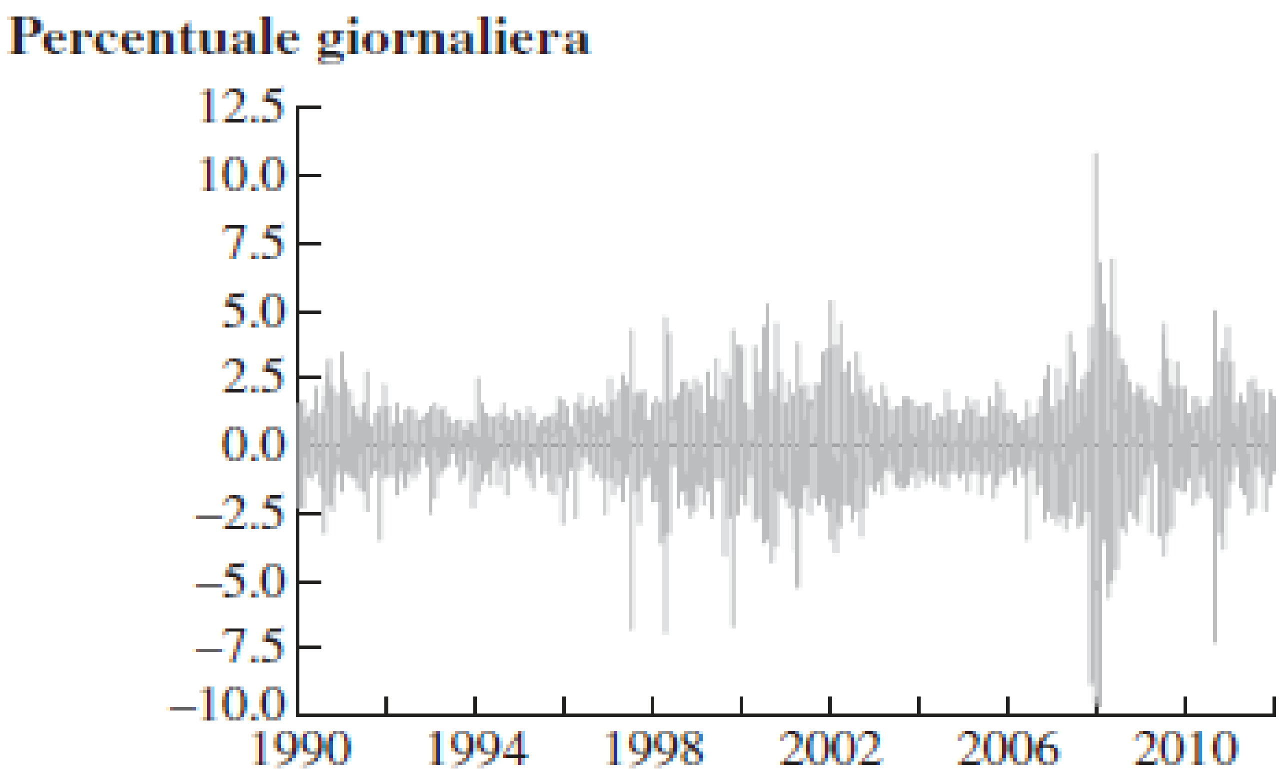

Tasso di disoccupazione, USA
Tasso di disoccupazione
12
10
8
6
4
1960m1
1970m1
1980m1
1990m1
2000m1
2010m1
tempo



Tasso di inflazione a 12 mesi, CPI
infcpi12
15
10
5
0
-5
1960m1
1970m1
1980m1
1990m1
2000m1
2010m1
tempo


Tasso di interesse su buoni del tesoro USA a 90 giorni
Buoni del tesoro a 3 mesi: tasso sul mercato secondario
0
5
10
15
20
1960m1
1970m1
1980m1
1990m1
2000m1
2010m1
tempo

Una serie temporale di dati finanziari giornalieri USA



(d) Variazione percentuale nei valori giornalieri dell'indice Wilshire 5000

Alcuni impieghi delle serie temporali

- Previsione (Capitolo 14)
- Stima di effetti causali dinamici (Capitolo 15)
  - Se la Fed aumenta il Federal Funds rate, quale sarà l'effetto sui tassi di inflazione e disoccupazione fra 3 mesi? E fra 12 mesi?
  - Qual è l'effetto nel tempo sul consumo di sigarette di un aumento dell'imposta sulle sigarette?
  - Modellazione di rischi, usata nei mercati finanziari (un aspetto, modellazione di varianze e "volatility clustering", è discusso nel Capitolo 16)

Alcuni impieghi delle serie temporali

- Tra le applicazioni al di là dell'economia vi sono la modellazione ambientale e climatica, ingegneristica (dinamiche di sistema), informatica (dinamica di rete),…

Le serie temporali sollevano nuove problematiche tecniche

- Ritardi temporali
- Correlazione nel tempo (*correlazione seriale*, o *autocorrelazione* – già incontrata con i dati panel)
- Calcolo di errori standard quando gli errori sono serialmente correlati

Un buon modo per apprendere riguardo le serie temporali è quello di fare ricerche! Un'ottima fonte di serie temporali macro USA, e alcune internazionali, è il FRED database della Federal Reserve Bank of St. Louis's

2. Uso di modelli di regressione per la previsione (Paragrafo 14.1)

- Previsione e stima di effetti causali sono obiettivi piuttosto diversi.
- Per la previsione,
  - $\bar{R}^2$ conta (molto!)
  - La distorsione da variabili omesse non è un problema!
  - Non ci preoccuperemo di interpretare i coefficienti nei modelli di previsione – non serve stimare effetti causali se si vogliono soltanto fare previsioni!
  - La validità esterna è fondamentale: il modello stimato usando dati storici deve valere nel (prossimo) futuro

3. Introduzione alle serie temporali e alla correlazione seriale (Paragrafo 14.2)

Basi per le serie temporali:

A. Notazione

B. Ritardi, differenze prime, tassi di crescita

C. Autocorrelazione (correlazione seriale)

D. Stazionarietà

A. Notazione

- Y_t = valore di Y nel periodo t.
- Data set: $\{Y_1,\dots,Y_T\}$ sono T osservazioni sulla variabile serie temporale Y
- Consideriamo soltanto osservazioni consecutive, a intervalli uniformi (per esempio mensili, dal 1960 al 1999, senza saltare mesi; dati mancanti e intervalli non uniformi introducono complicazioni tecniche)

B. Ritardi, differenze prime e tassi di crescita

CONCETTO CHIAVE 14.1 **Ritardi, differenze prime, logaritmi e tassi di crescita**

- Il primo ritardo di una serie temporale Y_t è Y_{t-1}; il suo j-esimo ritardo è Y_{t-j}.
- La differenza prima di una serie, ΔY_t, è la sua variazione tra il periodo $t - 1$ e il periodo t, cioè $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$.
- La differenza prima del logaritmo di Y_t è $\Delta \ln(Y_t) = \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1})$.
- La variazione percentuale di una serie temporale Y_t tra i periodi $t - 1$ e t è approssimativamente uguale a $100\Delta \ln(Y_t)$, dove l'approssimazione è più accurata quando la variazione percentuale è piccola.

Esempio: tasso trimestrale di crescita del PIL USA annualizzato

PIL = PIL reale negli USA (miliardi di $ del 1996)

- PIL nel primo trimestre del 2012 (2012:T1) = 15382
- PIL nel secondo trimestre del 2012 (2012:T2) = 15428
- Variazione percentuale nel PIL, dal 2012:T1 al 2012:T2:

$$=100\times\left(\frac{15428-15382}{15382}\right)=0,299\%$$

- Variazione percentuale nel PIL, dal 2012:T1 al 2012:T2, *tasso annualizzato* = $4\times0{,}299\%$ = **1,196**% ≈ **1,2**% (percentuale per anno)
- Usando l'approssimazione logaritmica alle variazioni percentuali si ottiene $4\times100\times$ [log(15428) – log(15382)] = **1,194**%

Esempio: PIL e sua variazione

Tabella 14.1 PIL negli Stati Uniti nel 2012 e nel primo trimestre del 2013.

Trimestre	PIL USA	Logaritmo del PIL, $\ln(GDP_t)$	Tasso di crescita del PIL annualizzato, $GDPGR_t = 400 \times \Delta\ln(GDP_t)$	Primo ritardo, $GDPGR_{t-1}$
2012:T1	15382	9,641	3,64	4,75
2012:T2	15428	9,644	1,20	3,64
2012:T3	15534	9,651	2,75	1,20
2012:T4	15540	9,651	0,15	2,75
2013:T1	15584	9,654	1,14	0,15

Nota: il tasso di crescita trimestrale del PIL è la prima differenza del logaritmo, viene convertito in punti percentuali annualizzati moltiplicando per 400. Il primo ritardo è il suo valore nel trimestre precedente. Tutti i valori sono arrotondati al decimale più vicino.

C. Autocorrelazione (correlazione seriale)

La correlazione di una serie con i suoi valori ritardati è detta ***autocorrelazione*** o ***correlazione seriale***.

- La prima ***autocovarianza*** di Y_t è $\text{cov}(Y_t, Y_{t-1})$
- La prima ***autocorrelazione*** di Y_t è $\text{corr}(Y_t, Y_{t-1})$
- Quindi

$$\text{corr}(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-1})}{\sqrt{\text{var}(Y_t)\,\text{var}(Y_{t-1})}} = \rho_1$$

- Queste sono correlazioni di popolazione, che descrivono la distribuzione congiunta di (Y_t, Y_{t-1})

CONCETTO CHIAVE 14.2 **Autocorrelazione (correlazione seriale) e autocovarianza**

La j-esima autocovarianza di una serie Y_t è la covarianza tra Y_t e il suo j-esimo ritardo Y_{t-j}, e il j-esimo coefficiente di autocorrelazione è la correlazione tra Y_t e Y_{t-j}. Cioè,

$$\text{autocovarianza}_j = \text{cov}\,(Y_t, Y_{t-j}) \tag{14.3}$$

$$\text{autocorrelazione}_j = p_j = \text{corr}(Y_t, Y_{t-j}) \quad \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})}{\sqrt{\text{var}(Y_t)\text{var}(Y_{t-j})}} \tag{14.4}$$

Il j-esimo coefficiente di autocorrelazione è talvolta chiamato j-esimo coefficiente di correlazione seriale.

Autocorrelazioni campionarie

La ***j*-esima *autocorrelazione campionaria*** è una stima della *j*-esima autocorrelazione di popolazione:

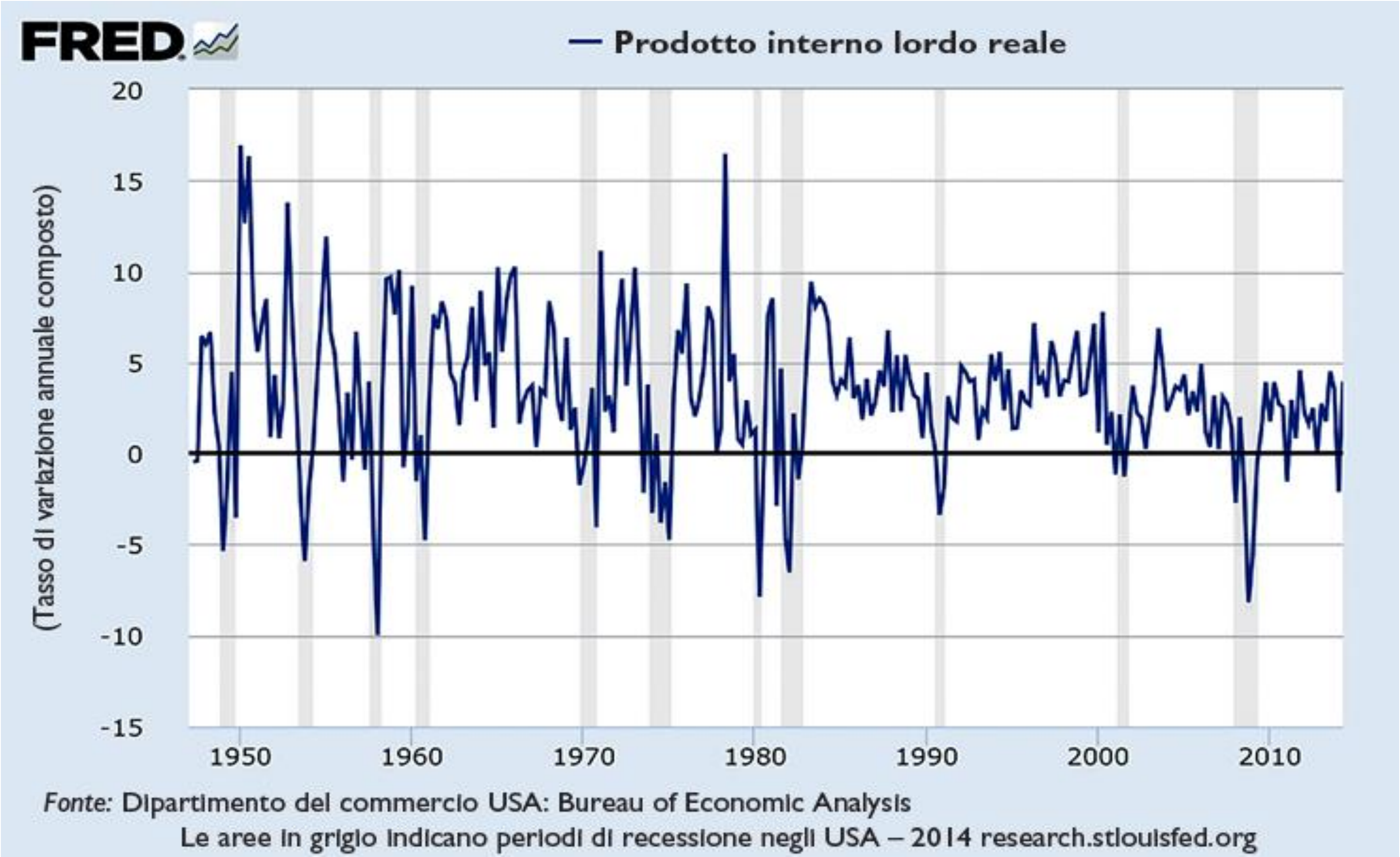
$$\hat{\rho}_j = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})}{\text{var}(Y_t)}$$

dove

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = \frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}(Y_t - \bar{Y}_{j+1,T})(Y_{t-j} - \bar{Y}_{1,T-j})$$

Dove $\bar{Y}_{j+1,T}$ è la media campionaria di Y_t calcolata su osservazioni $t = j+1,\ldots,T$. *NOTA*:

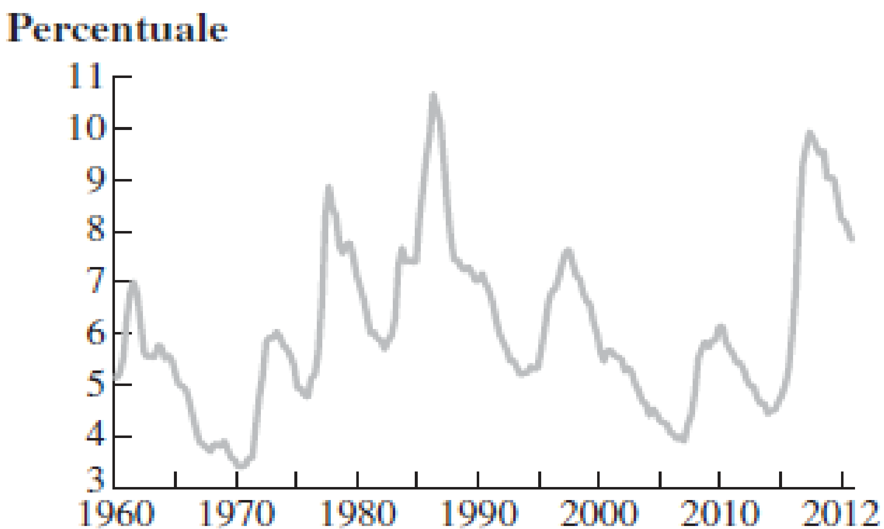
- La sommatoria è su $t=j+1$ a T (*perché?*)
- Il divisore è T, non $T - j$ (questa è la definizione convenzionale usata per le serie temporali)



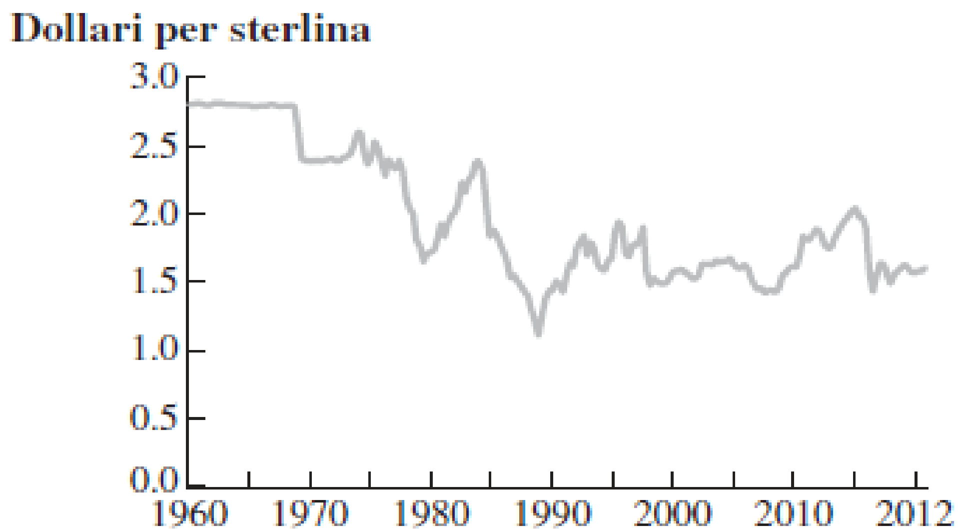
Le prime quattro autocorrelazioni sono:

$$\hat{\rho}_1 = 0,34,\ \hat{\rho}_2 = 0,27,\ \hat{\rho}_3 = 0,13 \text{ e } \hat{\rho}_4 = 0,14$$

Altre serie temporali economiche: queste serie sembrano serialmente correlate (Y_t è fortemente correlata a Y_{t+1}?)

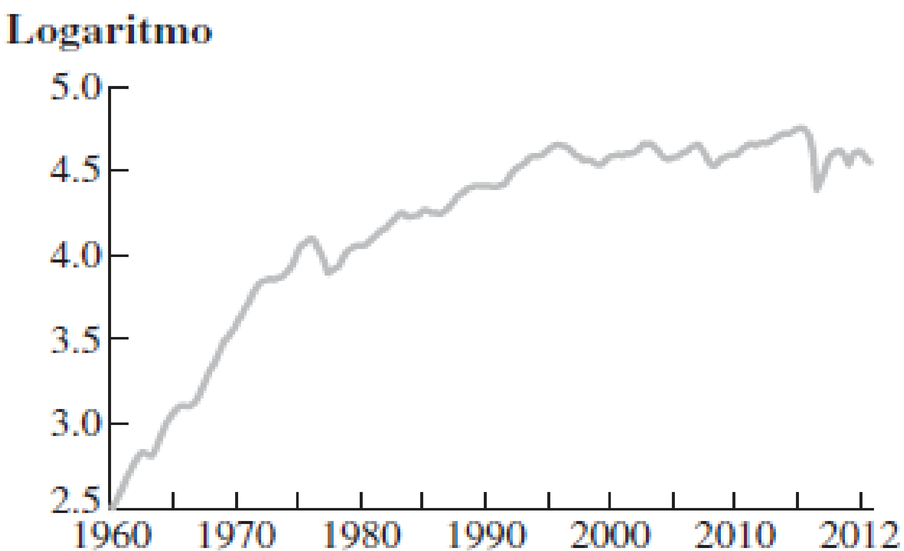


(a) Tasso di disoccupazione USA

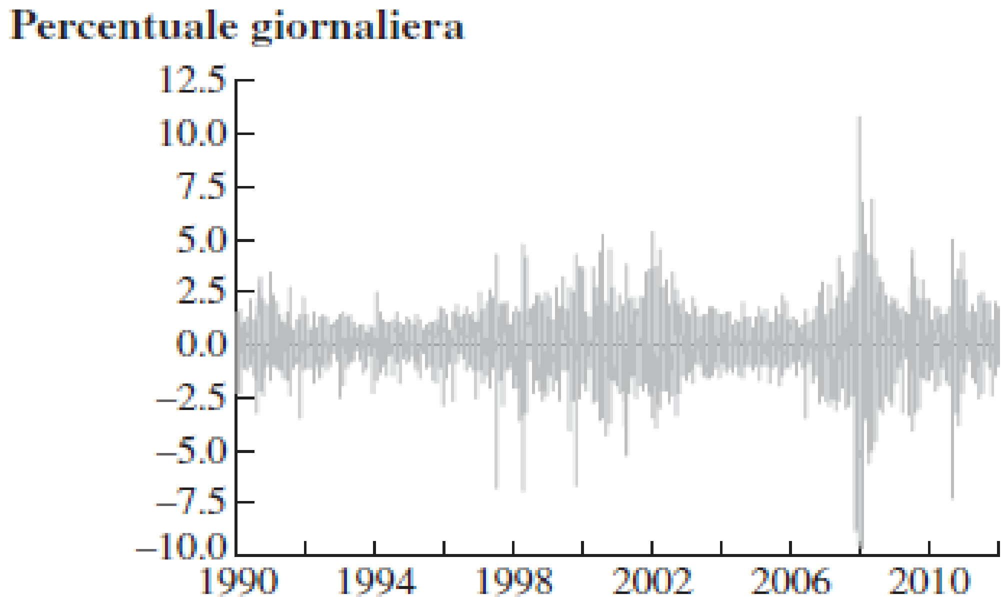


(b) Tasso di cambio dollaro USA/sterlina inglese

Altre serie temporali economiche (continua)



(c) Logaritmo dell'indice della produzione industriale in Giappone



(d) Variazione percentuale nei valori giornalieri dell'indice Wilshire 5000

D. stazionarietà

La stazionarietà indica che la storia è rilevante. Si tratta di un requisito chiave per la validità esterna della regressione di serie temporali.

CONCETTO CHIAVE 14.5 **Stazionarietà**

Una serie temporale Y_t è **stazionaria** se la sua distribuzione di probabilità non cambia nel corso del tempo, cioè se la distribuzione congiunta di $(Y_{s+1}, Y_{s+2},\ldots,Y_{s+T})$ non dipende da s indipendentemente dal valore di T; altrimenti, la serie Y_t viene detta **non stazionaria**. Due serie temporali X_t e Y_t, sono dette **congiuntamente stazionarie** se la distribuzione congiunta di $(X_{s+1}, Y_{s+1}, X_{s+2}, Y_{s+2},\ldots,X_{s+T}, Y_{s+T})$ non dipende da s indipendentemente dal valore di T. La stazionarietà impone che il futuro sia come il passato, almeno in senso probabilistico.

Per ora assumiamo che Y_t sia stazionaria (ci torneremo più avanti).

4. Autoregressioni (Paragrafo 14.3)

- Un punto di partenza naturale per un modello di previsione è quello di usare valori passati di Y (cioè Y_{t-1}, Y_{t-2},…) per la previsione di Y_t.
- Un'***autoregressione*** è un modello di regressione in cui si esegue la regressione di Y_t rispetto ai suoi valori passati.
- Il numero di ritardi usati come regressori è detto ***ordine*** dell'autoregressione.
  - In una ***autoregressione del primo ordine***, si esegue la regressione di Y_t rispetto a Y_{t-1}
  - In una ***autoregressione del p-esimo ordine***, si esegue la regressione di Y_t rispetto a $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-p}$.

Il modello autoregressivo del primo ordine (AR(1))

Il modello di popolazione AR(1) è

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$$

- β_0 e β_1 *non* hanno interpretazioni causali
- se $\beta_1 = 0$, Y_{t-1} non è utile per prevedere Y_t
- Il modello AR(1) può essere stimato da una regressione di Y_t rispetto a Y_{t-1} (come la eseguireste, in pratica??)
- La verifica di $\beta_1 = 0$ v. $\beta_1 \neq 0$ fornisce un test dell'ipotesi che Y_{t-1} non sia utile per prevedere Y_t

Esempio: modello AR(1) per il tasso di crescita del PIL

Stimato usando dati dal 1962:T1 al 2012:T4:

$$\widehat{GDPGR}_t = \underset{(0{,}349)}{1{,}991} + \underset{(0{,}075)}{0{,}344}\,GDPGR_{t-1} \quad \bar{R}^2 = 0{,}11$$

La variazione ritardata nel tasso di crescita del PIL è un predittore utile del tasso di crescita del PIL attuale?

- t = 0,344/0,075 = 4,59 > 1,96 (in valore assoluto)
- Respinge H_0: $\beta_1 = 0$ al livello di significatività del 5%
- Sì, la variazione ritardata nel tasso di crescita del PIL è un predittore utile del tasso di crescita del PIL attuale, ma l' $\bar{R}^2$ è piuttosto basso!

Previsioni: terminologia e notazione

- *I valori predetti* sono "dentro il campione" (definizione consueta)
- *Le previsioni* sono "fuori campione" – nel futuro
- *Notazione*:
  - $Y_{T+1|T}$ = previsione di Y_{T+1} basata su $Y_T, Y_{T-1}, \ldots$, usando i coefficienti di popolazione (ignoti)
  - $\hat{Y}_{T+1|T}$ = previsione di Y_{T+1} basata su $Y_T, Y_{T-1}, \ldots$, usando i coefficienti stimati, che sono stimati con i dati al periodo T.
  - Per un AR(1):
    - $Y_{T+1|T} = \beta_0 + \beta_1 Y_T$
    - $\hat{Y}_{T+1|T} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Y_T$, dove $\hat{b}_0$ e $\hat{\beta}_1$ sono stimati con dati al periodo T.

Errori di previsione

L'errore di previsione futura a un periodo è

$$\text{errore previsione} = Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1|T}$$

La distinzione tra errore di previsione e residuo è la stessa che esiste tra previsione e valore predetto:

- un *residuo* è "dentro il campione"
- un *errore di previsione* è "fuori campione" – il valore di Y_{T+1} non è usato nella stima dei coefficienti di regressione

Esempio: previsione della crescita del PIL usando un AR(1)

AR(1) stimato usando dati dal 1962:T1 al 2012:T4:

$$\widehat{GDPGR}_t = 1{,}991 + 0{,}344 GDPGR_{t-1}$$

$GDPGR_{2012:T4} = 0{,}15$ (le unità sono percentuali annualizzate)
La previsione di $GDPGR_{2013:T1}$ è:

$$\widehat{GDPGR}_{2013:T1|2012:T4} = 1{,}9917 + 0{,}344 \times 0{,}15 = 2{,}0\%$$

Il modello AR(p): uso di ritardi multipli per la previsione

Il modello autoregressivo del p-esimo ordine (AR(p)) è

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \ldots + \beta_p Y_{t-p} + u_t$$

- Il modello AR(p) usa p ritardi di Y come regressori
- Il modello AR(1) è un caso particolare
- I coefficienti non hanno un'interpretazione causale
- Per verificare l'ipotesi che $Y_{t-2},\ldots,Y_{t-p}$ non siano utili a prevedere Y_t, oltre a Y_{t-1}, si usa un test F
- Si usano test t o F per determinare p
- Oppure, meglio, si determina p usando un "criterio di informazione" (*ne parleremo più avanti…*)

Esempio: modello AR(2) per il tasso di crescita del PIL

$$\widehat{GDPGR_t} = \underset{(0,40)}{1,63} + \underset{(0,08)}{0,28}GDPGR_{t-1} + \underset{(0,08)}{0,17}GDPGR_{t-2}$$

$\bar{R}^2$ = 0,14

- **la statistica *t* del ritardo 2 è 2,27 (valore-*p* = 0,02)**
- $\bar{R}^2$ **aumentato da 0,11 a 0,14 passando a 2 ritardi**
- **Quindi, il secondo ritardo è utile a prevedere la crescita del PIL.**

5. Regressioni temporali con predittori aggiuntivi e modello autoregressivo misto
(Paragrafo 14.4)

- Finora abbiamo considerato modelli di previsione che usano solo valori passati di Y
- Ha senso aggiungere altre variabili (X) che potrebbero essere predittori utili di Y, oltre ai valori predittivi dei valori ritardati di Y:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \ldots + \beta_p Y_{t-p} + \delta_1 X_{t-1} + \ldots + \delta_r X_{t-r} + u_t$$

- Questo è un ***modello autoregressivo misto*** con p ritardi di Y e r ritardi di X … ***ADL(p,r)***.

Esempio: tassi di interesse a lungo e a breve termine e relativo differenziale

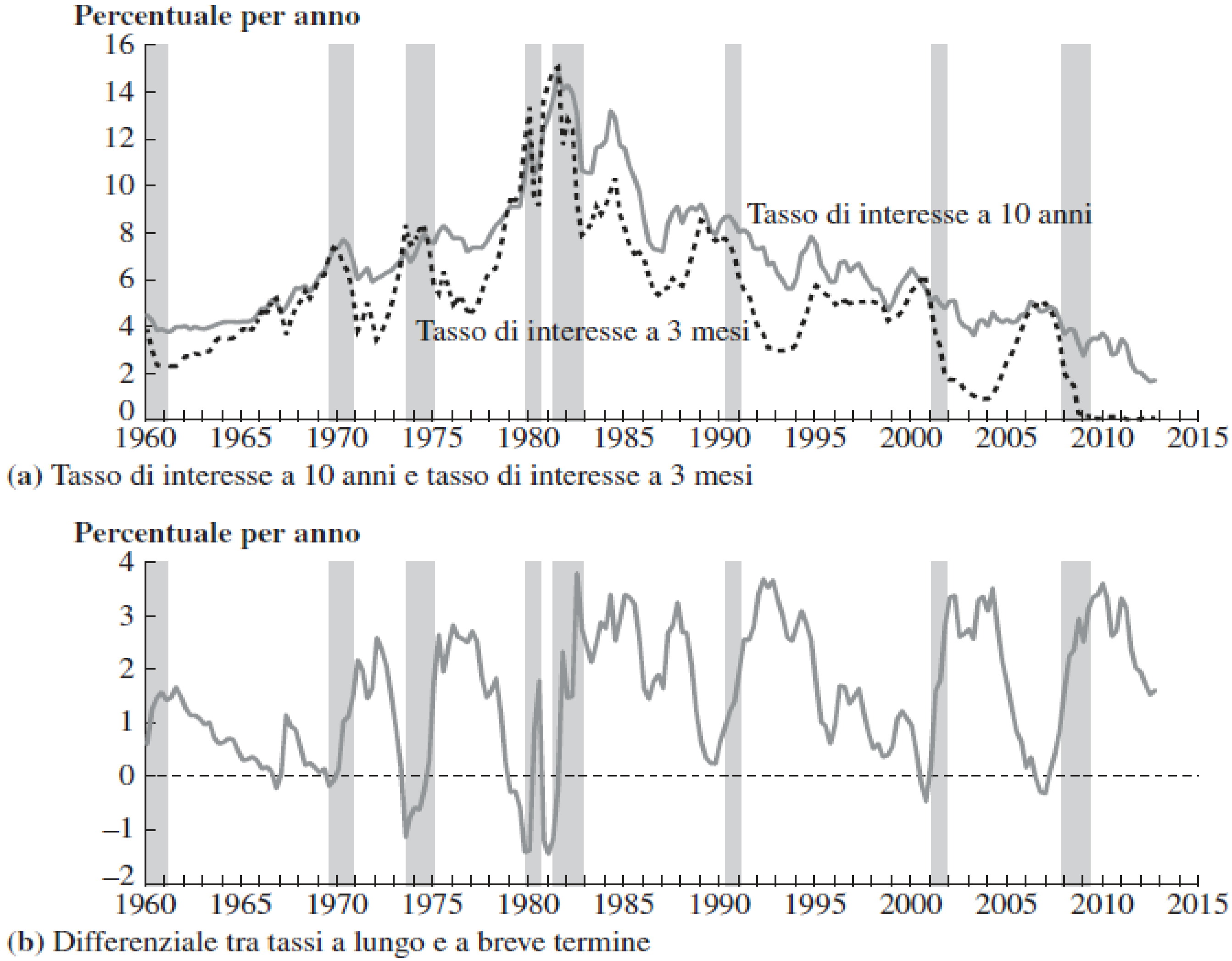


Figura 14.3

Tassi di interesse a lungo e a breve termine e relativo differenziale, 1960–2012.

I tassi di interesse a lungo e a breve si muovono insieme, ma non accopiati. Il loro differenziale è diminuito fortemente prima dei periodi di recessione, evidenziati dalle barre in grigio.

Modello ADL(2,2) (1962-2012):

$$GDPGR_t = \underset{(0,48)}{0,97} + \underset{(0,08)}{0,24}\,GDPGR_{t-1} + \underset{(0,08)}{0,18}\,GDPGR_{t-2}$$

$$- \underset{(0,42)}{0,14}\,TSpread_{t-1} + \underset{(0,43)}{0,66}\,TSpread_{t-2}$$

$$\bar{R}^2 = 0,17$$

Statistica F per coefficienti sui ritardi di TSpread:

F = 4,43 (valore-p = 0,01)

Il test dell'ipotesi congiunta che nessuna delle X sia un predittore utile, oltre ai valori pasasti di *Y*, si chiama *test di causalità di Granger*

CONCETTO CHIAVE 14.7 **Test di causalità di Granger**

La statistica per il test di causalità di Granger è la statistica F per la verifica dell'ipotesi nulla che i coefficienti su tutti i valori di una delle variabili dell'equazione (14.20) (per esempio, i coefficienti di $X_{1t-1}, X_{1t-2},\ldots,X_{1t-q_1}$) siano pari a zero. Questa ipotesi nulla implica che i regressori non abbiano ulteriore potere predittivo per Y_t rispetto a quello già posseduto dagli altri regressori; il test di questa ipotesi nulla viene detto test di causalità di Granger.

"Causalità" è un termine sfortunato in questo caso: la causalità di Granger si riferisce semplicemente al contenuto predittivo (marginale).

6. Incertezza e intervalli di previsione

Perché serve una misura dell'incertezza di previsione?

- Per costruire intervalli di previsione
- Per consentire agli utenti della previsione (inclusi voi) di sapere quale grado di precisione attendersi

Si consideri la previsione

$$\hat{Y}_{T+1|T} = \hat{b}_0 + \hat{\beta}_1 Y_T + \hat{\beta}_2 X_T$$

L'errore di previsione è:

$$Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1|T} = u_{T+1} - [(\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)Y_T + (\hat{\beta}_2 - \beta_2)X_T]$$

L'errore di previsione quadratico medio (*MSFE*)è

$$E(Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1|T})^2 = E(u_{T+1})^2 +$$

$$+ E[(\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)Y_T + (\hat{\beta}_1 - \beta_2)X_T]^2$$

- MSFE = var(u_{T+1}) + incertezza dovuta a errore di stima
- Se la dimensione del campione è grande, la parte dovuta all'errore di stima è (molto) più piccola di var(u_{T+1}), nel qual caso

$$\text{MSFE} \approx \text{var}(u_{T+1})$$

- La ***radice quadrata dell'errore di previsione quadratico medio (RMSFE)*** :

$$\text{RMSFE} = \sqrt{E[(Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1|T})^2]}$$

La radice quadrata dell'errore di previsione quadratico medio (RMSFE)

$$\text{RMSFE} = \sqrt{E[(Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1|T})^2]}$$

- L'RMSFE è una misura della dispersione della distribuzione dell'errore di previsione.
- L'RMSFE è simile alla deviazione standard di u_t, ma si focalizza esplicitamente sull'errore di previsione usando coefficienti stimati, non usando la retta di regressione della popolazione.
- L'RMSFE è una misura dell'ampiezza di un tipico "sbaglio" di previsione

Tre modi per stimare l'RMSFE

1. Usare l'approssimazione RMSFE ≈ σ_u, così da stimare l'RMSFE mediante il SER.
2. Usare un'effettiva cronologia di previsione per $t = t_1,\ldots, T$, quindi stimare mediante

$$MSFE \quad \frac{1}{T-t_1+1}\sum_{t=t_1-1}^{T-1}(Y_{t+1}-\hat{Y}_{t+1|t})^2$$

   Solitamente non è pratico – richiede la disponibilità di una registrazione storica di previsioni effettive dal modello

3. Usare una cronologia di previsione <u>simulata</u>, cioè che simuli le previsioni che si sarebbero fatte usando il modello in tempo reale... quindi usare il metodo 2, con queste ***pseudo previsioni fuori campione***…

Il metodo delle *pseudo previsioni fuori campione*

- Ri-stimare il modello ogni periodo, $t = t_1 - 1, \ldots, T - 1$
- Calcolare la "previsione" per la data $t+1$ usando la stima tramite t
- Calcolare la pseudo previsione fuori campione alla data t, usando la stima tramite t–1. Questa è $\hat{Y}_{t+1|t}$.
- Calcolare l'errore della pseudo previsione fuori campione,

$$Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1|t}$$

- Inserire questo errore di previsione nella formula MSFE,

$$MSFE = \frac{1}{T - t_1 + 1} \sum_{t=t_1-1}^{T-1} (Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1|t})^2$$

Perché si usa il termine "pseudo previsioni fuori campione"?

Usare l'RMSFE per costruire intervalli di previsione

Se u_{T+1} ha distribuzione normale, allora un intervallo di previsione al 95% può essere costruito come

$$\hat{Y}_{T|T-1} \pm 1{,}96 \times RMSFE$$

Note:

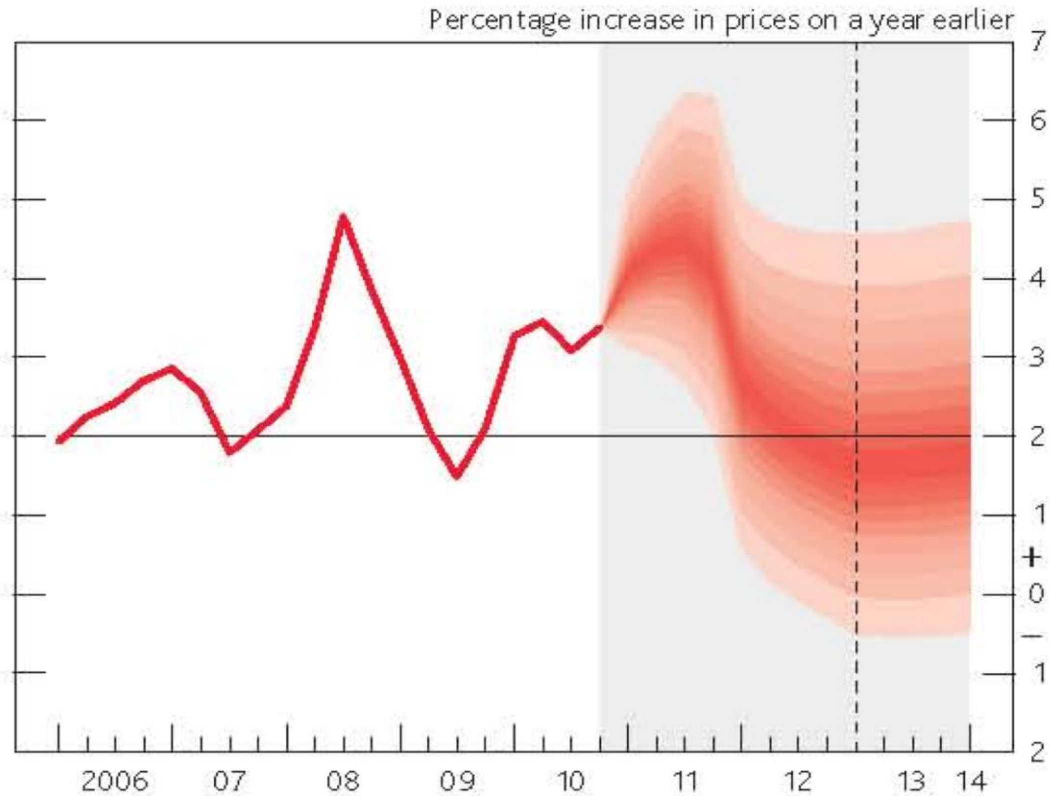
•Un intervallo di previsione al 95% non è un intervallo di confidenza (Y_{T+1} non è un coefficiente non casuale, è casuale!)

•Questo intervallo è valido solo se u_{T+1} è normale – ma potrebbe comunque fornire un'approssimazione ragionevole ed è una misura comunemente usata di incertezza della previsione

•Spesso si usano intervalli di previsione "67%" : $\pm\ RMSFE$

Esempio 1: "grafico a ventaglio" di Bank of England, febbraio 2011

Chart 3 CPI inflation projection based on market interest rate expectations and £200 billion asset purchases



- http://www.bankofengland.co.uk/publications/inflationreport/ir11feb.pdf

Esempio 2: bollettino mensile della banca centrale europea, marzo 2011, proiezioni macroeconomiche

Table A Macroeconomic projections for the euro area

(average annual percentage changes)[1), 2)]

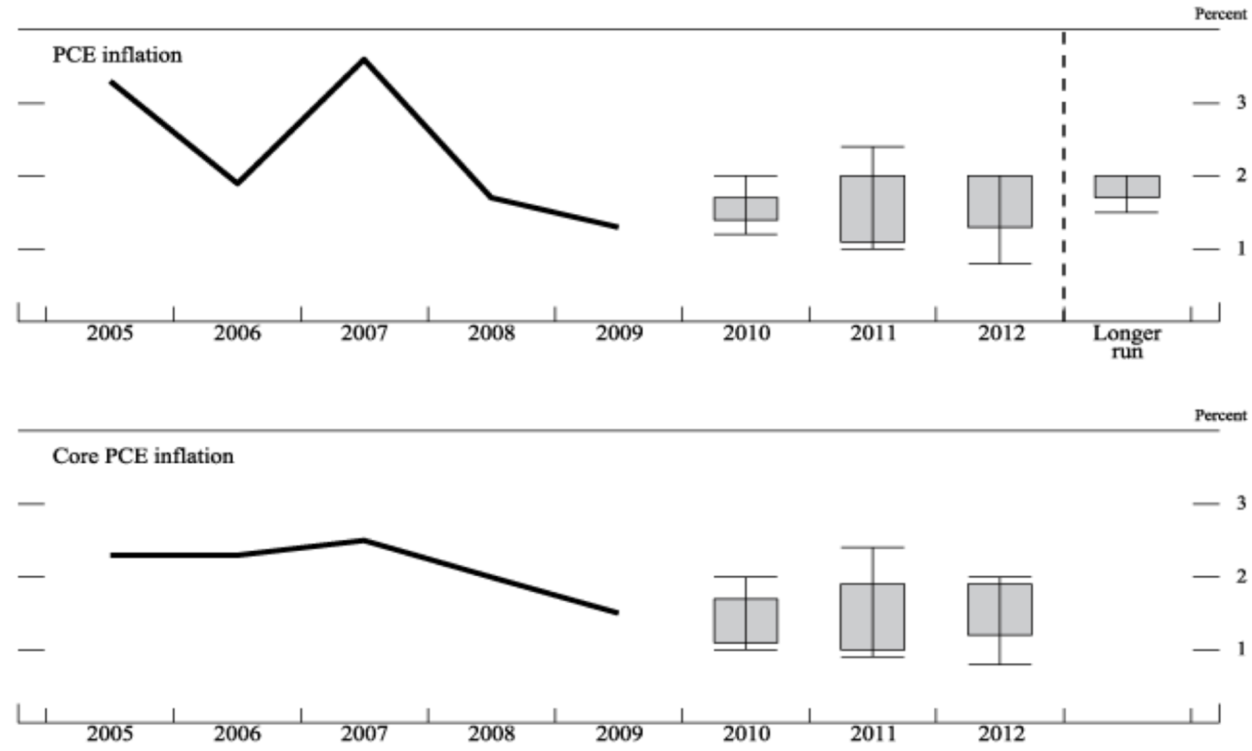
	2010	2011	2012
HICP	1.6	2.0 - 2.6	1.0 - 2.4
Real GDP	1.7	1.3 - 2.1	0.8 - 2.8
Private consumption	0.7	0.6 - 1.4	0.4 - 2.2
Government consumption	0.8	-0.3 - 0.5	-0.5 - 0.9
Gross fixed capital formation	-0.8	0.4 - 3.4	0.7 - 5.5
Exports (goods and services)	10.9	4.9 - 9.5	3.0 - 9.2
Imports (goods and services)	9.0	3.5 - 7.7	2.8 - 8.4

1) The projections for real GDP and its components are based on working day-adjusted data. The projections for imports and exports include intra-euro area trade.
2) The data refer to the euro area including Estonia, except for the HICP data in 2010. The average annual percentage change for the HICP in 2011 is based on a euro area composition in 2010 that already includes Estonia.

Come hanno calcolato questi intervalli?

http://www.ecb.int/pub/mb/html/index.en.html

Esempio 3: Fed, report semestrale al Congresso, febbraio 2010: Figura 1. Tendenze centrali e intervalli di proiezioni economiche, 2010-12 e sul lungo termine



Come hanno calcolato questi intervalli?

http://www.federalreserve.gov/boarddocs/rptcongress/annual09/default.htm

7. Scelta della lunghezza dei ritardi usando criteri d'informazione (Paragrafo 14.5)

Come scegliere il numero di intervalli *p* in un AR(*p*)?

- La distorsione da variabili omesse è irrilevante per la previsione!
- Si possono usare sequenze di test *t* o *F*; ma i modelli scelti tendono a essere "troppo grandi" (perché?)
- Un altro modo – migliore – per determinare la lunghezza dei ritardi è quello di usare un *criterio di informazione*
- I criteri di informazione bilanciano distorsione (troppo pochi ritardi) e varianza (troppi ritardi)
- Due *criteri informativi* sono quello di Bayes (BIC) e quello di Akaike (AIC)…

Il Bayes Information Criterion (BIC)

$$\text{BIC}(p) = \ln\left(\frac{SSR(p)}{T}\right) + (p+1)\frac{\ln T}{T}$$

- *Primo termine*: sempre decrescente in *p* (più grande è *p*, migliore è l'adattamento)
- *Secondo terme*: sempre crescente in *p*.
  - La varianza della previsione dovuta all'errore di stima aumenta con *p* – perciò non si vuole un modello di previsione con troppi coefficienti – ma quando sono "troppi"?
  - Questo termine è una "penalità" per l'uso di più parametri – che aumenta la varianza della previsione.
- *Minimizzando il BIC*(*p*) si bilanciano distorsione e varianza per determinare un valore "migliore" di *p* per la previsione.
  - Il risultato è che $\hat{p}^{BIC} \xrightarrow{p} p$! (*Appendice 14.5*)

Un altro criterio di informazione: *Akaike Information Criterion (AIC)*

$$\text{AIC}(p) = \ln\left(\frac{SSR(p)}{T}\right) + (p+1)\frac{2}{T}$$

$$\text{BIC}(p) = \ln\left(\frac{SSR(p)}{T}\right) + (p+1)\frac{\ln T}{T}$$

Il termine di penalità è più piccolo per l'*AIC* rispetto al *BIC* ($2 < \ln T$)

- *AIC* stima più intervalli (p più grande) del *BIC*
- Questo potrebbe essere utile se si pensa che sia importante avere una maggiore lunghezza degli intervalli.
- Tuttavia, lo stimatore AIC di p non è consistente – può sovrastimare p – la penalità non è abbastanza grande

Esempio: modello AR della crescita del PIL, ritardi 0 – 6:

# ritardi	BIC	AIC	R^2
0	2,442	2,426	0,000
1	2,341	2,309	0,119
2	**2,334**	**2,286**	0,148
3	2,360	2,295	0,148
4	2,382	2,301	0,151
5	2,394	2,296	0,164
6	2,419	2,305	**0,164**

- BIC sceglie 2 intervalli, AIC 3.
- Se si usasse l'R^2 con num. cifre sufficiente, si sceglierebbe (sempre) il massimo numero possibile di ritardi.

Generalizzazione del BIC a modelli multivariati (ADL)

Sia K = numero totale di coefficienti nel modello (intercetta, ritardi di Y, ritardi di X). Il BIC è

$$\text{BIC}(K) = \ln\left(\frac{SSR(K)}{T}\right) + K\frac{\ln T}{T}$$

- Lo si può calcolare su tutte le possibili combinazioni di ritardi di Y e di X (ma sono tante)!
- In pratica si potrebbero scegliere ritardi di Y con il BIC, e decidere se includere o meno X usando un test di causalità di Granger con un numero fisso di ritardi (dipendente da dati e applicazione)

8. Non stazionarietà I: i trend (Paragrafo 14.6)

Finora abbiamo assunto che i dati fossero stazionari, cioè che la distribuzione di $(Y_{s+1},\ldots, Y_{s+T})$ non dipendesse da s.

Se non c'è stazionarietà, le serie si dicono ***non stazionarie***.

Due importanti tipi di non stazionarietà:

- Trend (Paragrafo 14.6)
- Rotture strutturali (instabilità del modello) (Paragrafo 14.7)

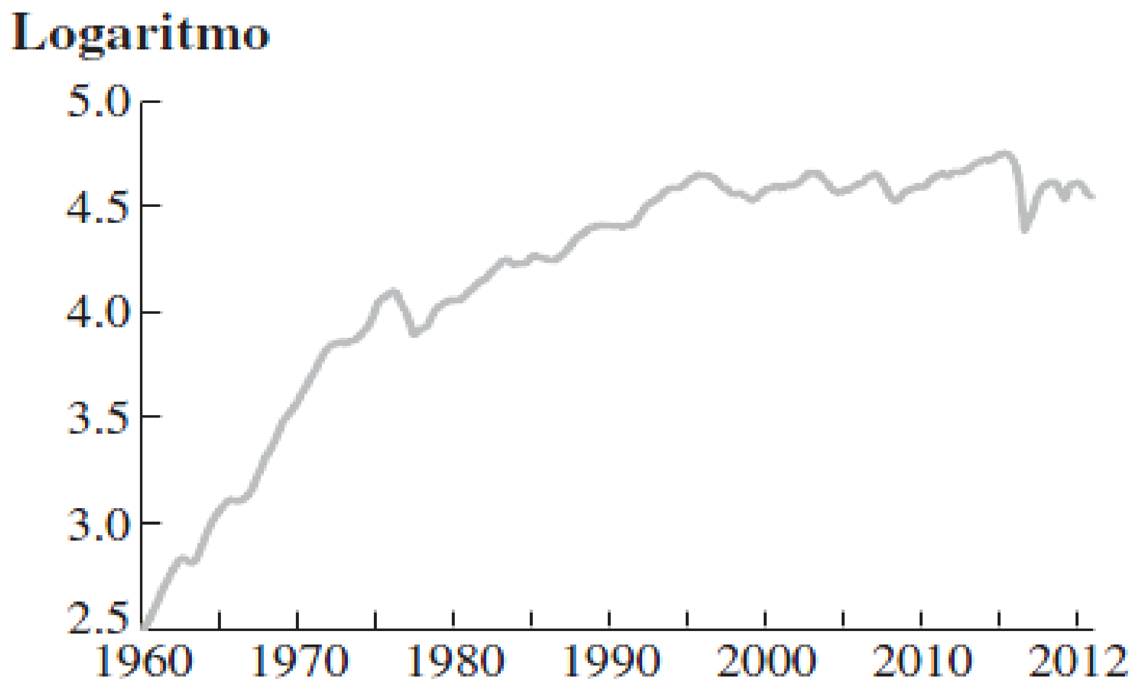
Sommario della discussione dei trend nei dati temporali:

A. Che cos'è un trend?
B. Trend deterministici e stocastici (casuali)
C. Quali problemi sono causati dai trend?
D. Come si rilevano trend stocastici (test statistici)?
E. Come si risolvono/mitigano i problemi posti dai trend

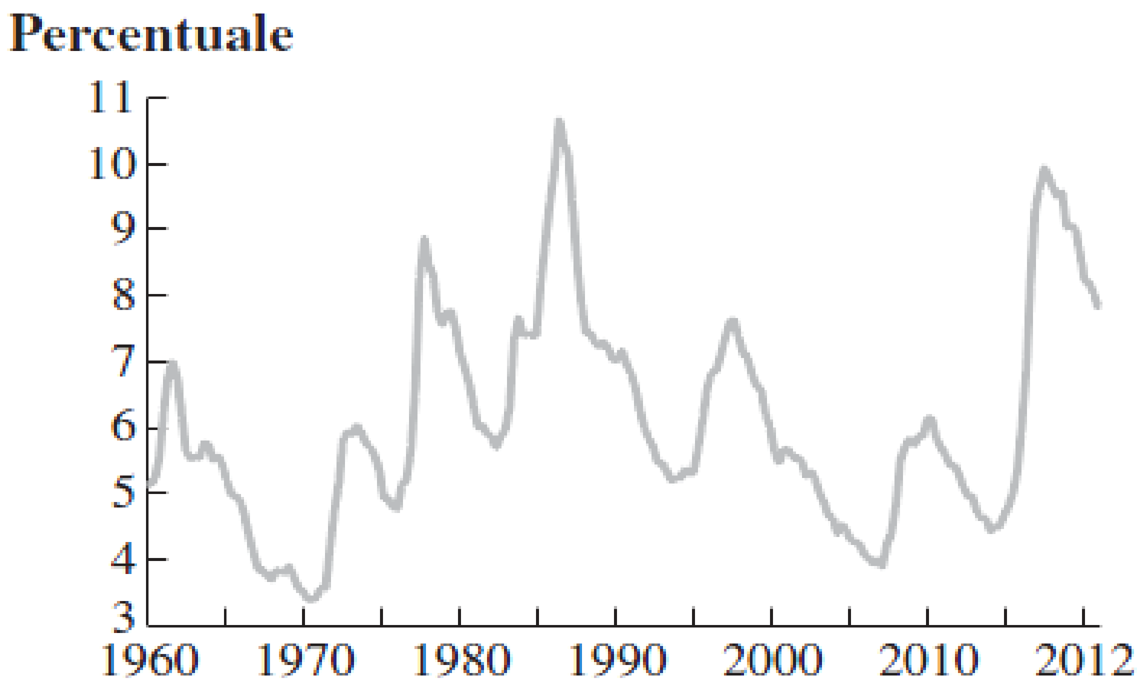
A. Che cos’è un trend?

Un trend è un movimento o tendenza persistente, di lungo termine, nei dati. Non è semplicemente una retta!

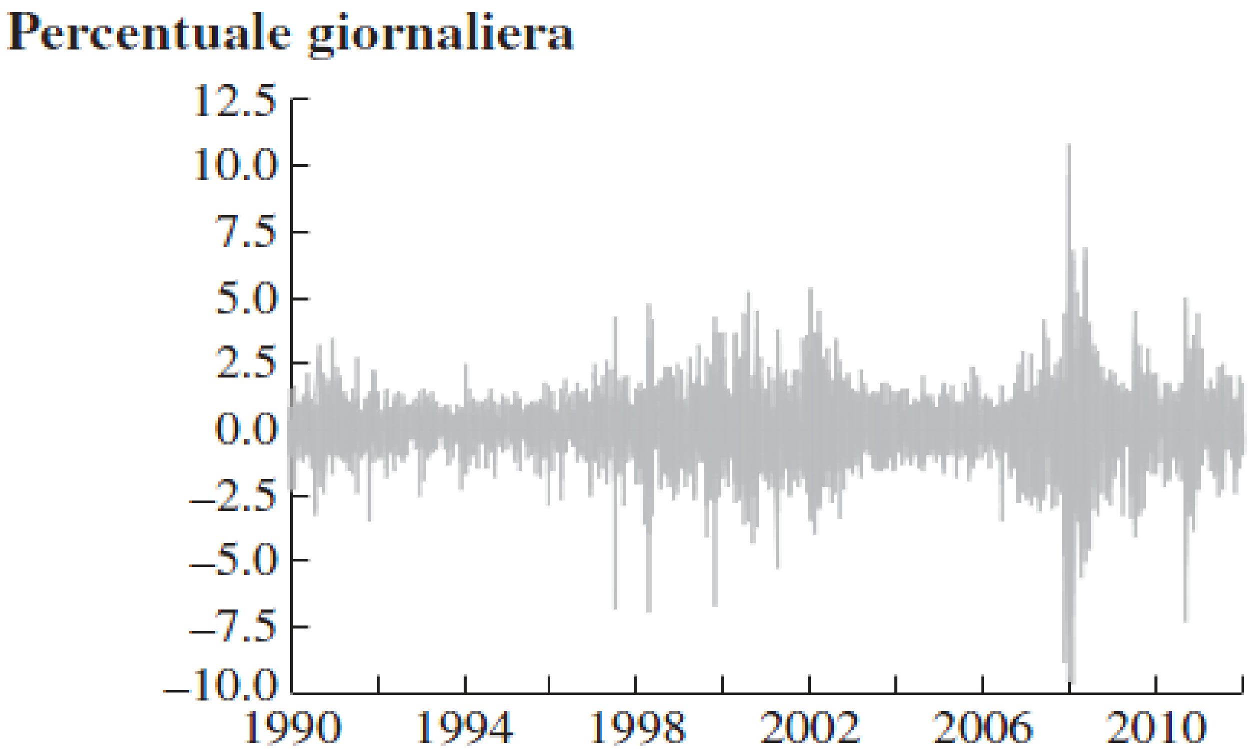
Quale di queste serie ha un trend?



(c) Logaritmo dell’indice della produzione industriale in Giappone



(a) Tasso di disoccupazione USA



(d) Variazione percentuale nei valori giornalieri dell'indice Wilshire 5000

Che cos'è un trend (continua)

Le tre serie:

- Il logaritmo della produzione industriale giapponese ha chiaramente un trend di lungo termine – non una retta, ma un trend lentamente decrescente – con crescita rapida durante gli anni '60 e '70, più lenta durante gli anni '80, stagnante durante gli anni '90/2000.
- Il tasso di disoccupazione ha un andamento altalenante nel lungo termine, con un aumento dal 1970 al 1990 e poi una diminuzione dal 1990 al 2007. Ma queste fluttuazioni nel lungo termine sono interrotte da forti aumenti nei periodi di recessione e forti riduzioni nei periodi di espansione economica. Forse ha un trend – difficile dirlo.
- Le variazioni giornaliere dei prezzi delle azioni non hanno un trend evidente. Ci sono periodi di volatilità persistentemente alta, ma questo non è un trend.

B. Trend deterministici e stocastici

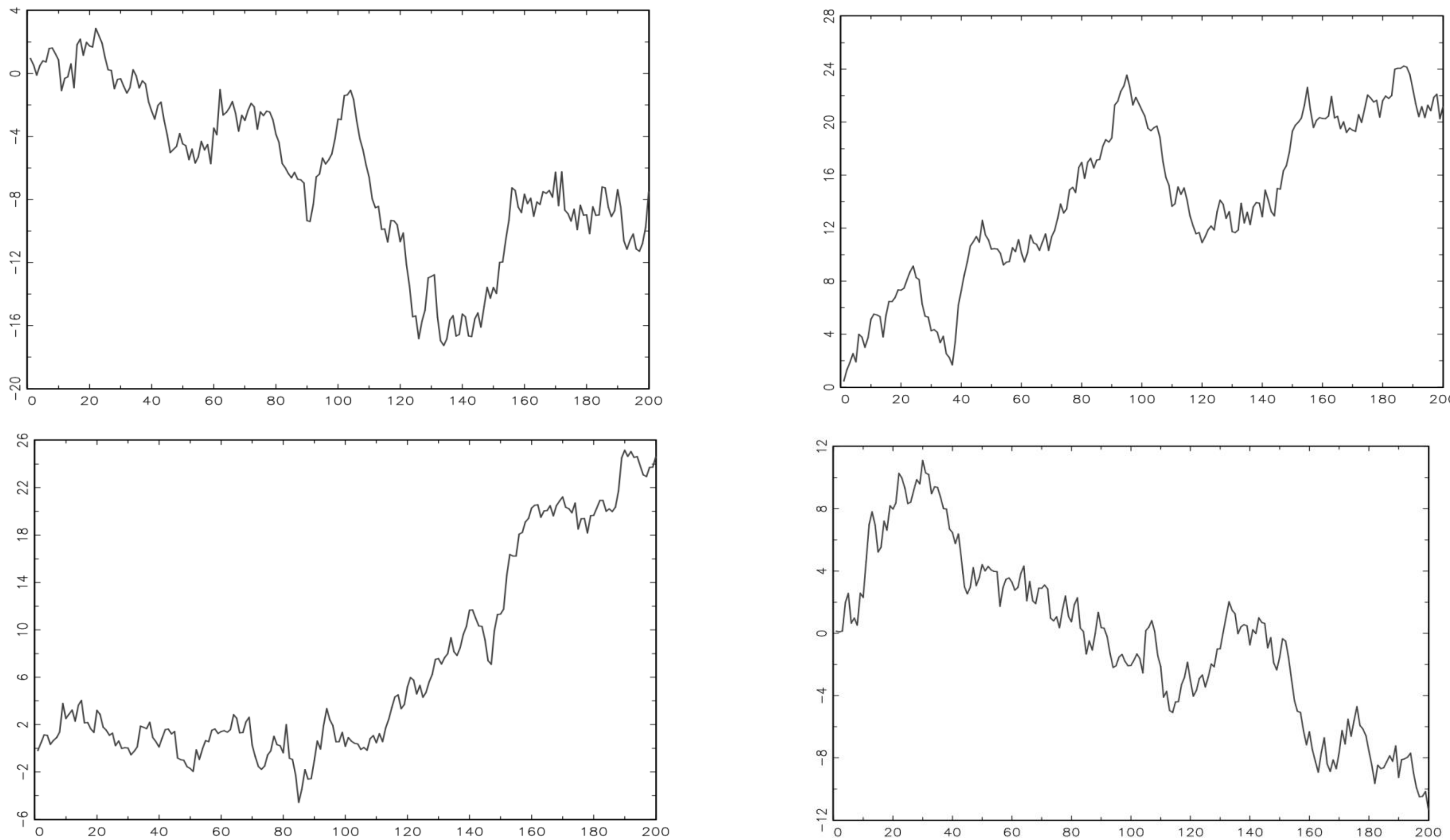
Un trend è un movimento o tendenza di lungo termine nei dati.

- Un **trend deterministico** è una funzione non casuale del tempo (per es. $y_t = t$, o $y_t = t^2$).
- Un **trend stocastico** è casuale e varia nel tempo
- Un importante esempio di trend stocastico è una **passeggiata aleatoria**:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t, \text{ dove } u_t \text{ è serialmente incorrelato}$$

Se Y_t segue una passeggiata aleatoria, allora il valore di Y domani è il valore di Y oggi più un disturbo impredicibile.

Quattro passeggiate aleatorie generate artificialmente, *T* = 200:



Come produrreste una passaggiata aleatoria al computer?

Trend deterministici e stocastici (continua)

Due caratteristiche chiave di una passeggiata aleatoria:

(i) $Y_{T+h|T} = Y_T$

- La miglior previsione del valore di *Y* nel futuro è il valore di *Y* oggi
- In una prima approssimazione, i logaritmi dei prezzi azionari seguono una passeggiata aleatoria (più precisamente, i rendimenti azionari sono impredicibili)

(ii) Supponiamo $Y_0 = 0$. Allora $\text{var}(Y_t) = t\sigma_u^2$.

- Questa varianza dipende da *t* (aumenta linearmente con *t*), perciò Y_t non è stazionaria (si ricordi la definizione di stazionarietà).

Trend deterministici e stocastici (continua)

Una **passeggiata aleatoria con deriva** è

$$Y_t = \beta_0 + Y_{t-1} + u_t, \text{ dove } u_t \text{ è serialmente incorrelato}$$

La "deriva" è β_0: se $\beta_0 \neq 0$, allora Y_t segue una passeggiata aleatoria attorno a un trend lineare. Potete vederlo considerando la previsione con passo h:

$$Y_{T+h|T} = \beta_0 h + Y_T$$

Il modello della passeggiata aleatoria (con o senza deriva) offre una buona descrizione di trend stocastici in molte serie temporali economiche.

Trend deterministici e stocastici (continua)

Ecco un consiglio pratico:

Se Y_t ha un trend di passeggiata aleatoria, allora ΔY_t è stazionaria e l'analisi di regressione dovrebbe essere svolta usando ΔY_t anziché Y_t.

Fattori che portano a questo consiglio:

- Relazione tra modello della passeggiata aleatoria e AR(1), AR(2), AR(*p*) ("radice autoregressiva unitaria")
- Il test di Dickey-Fuller per verificare se Y_t ha un trend di passeggiata aleatoria

Trend stocastici e radici autoregressive unitarie

Passeggiata aleatoria (con deriva): $Y_t = \beta_0 + Y_{t-1} + u_t$

AR(1): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$

- La passeggiata aleatoria è un AR(1) con $\beta_1 = 1$.
- Il caso speciale di $\beta_1 = 1$ è detto radice unitaria*.
- Quando $\beta_1 = 1$, il modello AR(1) diventa

$$\Delta Y_t = \beta_0 + u_t$$

*Questa terminologia deriva dal considerare l'equazione $1 - \beta_1 z = 0$ – la "radice" di questa equazione è $z = 1/\beta_1$, che è uguale a uno (unità) se $\beta_1 = 1$.

Radici unitarie in un AR(2)

AR(2): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_t$

Usiamo il trucco di "riscrivere la regressione" dal Paragrafo 7.3:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_t \\ &= \beta_0 + (\beta_1+\beta_2) Y_{t-1} - \beta_2 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_t \\ &= \beta_0 + (\beta_1+\beta_2) Y_{t-1} - \beta_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + u_t \end{aligned}$$

Sottraiamo Y_{t-1} da entrambi i membri:

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta_0 + (\beta_1+\beta_2-1) Y_{t-1} - \beta_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + u_t$$

ovvero

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + u_t,$$

dove $\delta = \beta_1 + \beta_2 - 1$ e $\gamma_1 = -\beta_{2.}$.

Radici unitarie in un AR(2) (continua)

Allora il modello AR(2) può essere riscritto come

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

dove $\delta = \beta_1 + \beta_2 - 1$ e $\gamma_1 = -\beta_{2.}$

Nota: se $1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 = 0$ ha una radice unitaria, allora $\beta_1 + \beta_2 = 1$ (*verificatelo da soli, trovate le radici!*)

Se c'è una radice unitaria, allora $\delta = 0$ e il modello AR(2) diventa

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

Se un modello AR(2) ha una radice unitaria, allora può essere scritto come un AR(1) in differenze prime.

Radici unitarie nel modello AR(p)

AR(p): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \ldots + \beta_p Y_{t-p} + u_t$

Questa regressione può essere riscritta come

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \ldots + \gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t$$

dove

$\delta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p - 1$

$\gamma_1 = -(\beta_2 + \ldots + \beta_p)$

$\gamma_2 = -(\beta_3 + \ldots + \beta_p)$

…

$\gamma_{p-1} = -\beta_p$

Radici unitarie nel modello AR(p) (continua)

Il modello AR(p) può essere scritto come

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \ldots + \gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t$$

dove $\delta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p - 1$.

Nota: **se c'è una radice unitaria nel modello AR(p), allora $\delta = 0$ e il modello AR(p) diventa un modello AR(p–1) in differenze prime:**

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \ldots + \gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t$$

C. Quali problemi sono causati dai trend?

1. I coefficienti AR sono fortemente distorti verso zero. Questo porta a previsioni scadenti.

2. Alcune statistiche *t* non hanno una distribuzione normale standard, anche in grandi campioni (ci torneremo più avanti).

3. Se *Y* e *X* hanno entrambe trend di passeggiata aleatoria, allora possono apparire correlate anche se non lo sono – si possono ottenere "regressioni spurie". Di seguito un esempio…

Tasso di disoccupazione USA e logaritmo della produzione industriale giapponese (IP)

1965-1981:

$$\widehat{TassoDisUSA} = \underset{(1,19)}{-2,37} + \underset{\mathbf{(0,32)}}{\mathbf{2,22}} \times \ln(\textit{IP giapponese}), \quad \bar{R}^2 = 0,34$$

1986-2012:

$$\widehat{TassoDisUSA} = \underset{(1,19)}{41,78} - \underset{\mathbf{(1,75)}}{\mathbf{7,78}} \times \ln(\textit{IP giapponese}), \quad \bar{R}^2 = 0,15$$

D. Come si individuano trend stocastici?

1. Si traccia il grafico dei dati – ci sono movimenti persistenti di lungo termine?
2. Si usa un test di regressione per una passeggiata aleatoria: il test di Dickey-Fuller per una radice unitaria.

<u>Il test di Dickey-Fuller in un AR(1)</u>

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$$

ovvero

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + u_t$$

H_0: $\delta = 0$ (cioè $\beta_1 = 1$) v. H_1: $\delta < 0$

(nota: è monolaterale: $\delta < 0$ significa che Y_t è stazionaria)

Test DF in AR(1) (continua)

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + u_t$$
$$H_0: \delta = 0 \text{ (cioè } \beta_1 = 1) \text{ v. } H_1: \delta < 0$$

Test DF: calcolare la statistica t che verifica $\delta = 0$

- Sotto H_0, questa statistica t **non** ha una distribuzione normale! (la nostra teoria della distribuzione si applica a variabili stazionarie, e Y_t non è stazionaria!)
- Occorre usare la tabella dei valori critici di Dickey-Fuller. Ci sono due casi, che hanno valori critici diversi:

(a) $\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + u_t$ (sola intercetta)

(b) $\Delta Y_t = \beta_0 + \mu t + \delta Y_{t-1} + u_t$ (intercetta e trend temporale)

Tabella di valori critici DF

(a) $\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + u_t$ (sola intercetta)

(b) $\Delta Y_t = \beta_0 + \mu t + \delta Y_{t-1} + u_t$ (intercetta e trend temporale)

Tabella 14.4 Valori critici per grandi campioni della statistica di Dickey-Fuller aumentata.

Regressore deterministico	10%	5%	1%
Intercetta	–2,57	–2,86	–3,43
Intercetta e trend temporale	–3,12	–3,41	–3,96

Respingere se la statistica t DF (la statistica t che verifica $\delta = 0$) è minore del valore critico specificato. Questo è un test monolaterale dell'ipotesi nulla di una radice unitaria (passeggiata aleatoria) rispetto all'alternativa che l'autoregressione sia stazionaria.

Il test di Dickey-Fuller in un AR(p)

In un AR(p), il test DF si basa sul modello riscritto,

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \ldots + \gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t \quad (*)$$

dove $\delta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p - 1$. Se c'è una radice unitaria (passeggiata aleatoria), $\delta = 0$; se l'AR è stazionario, $\delta < 1$.

<u>Il test DF in un AR(p) (sola intercetta):</u>

1. Si stima (*), ottenendo la statistica t che verifica $\delta = 0$
2. Si respinge l'ipotesi nulla di una radice unitaria se la statistica t è minore del valore critico DF nella Tabella 14.5

<u>Modifica per trend temporali</u>: includere t come regressore in (*)

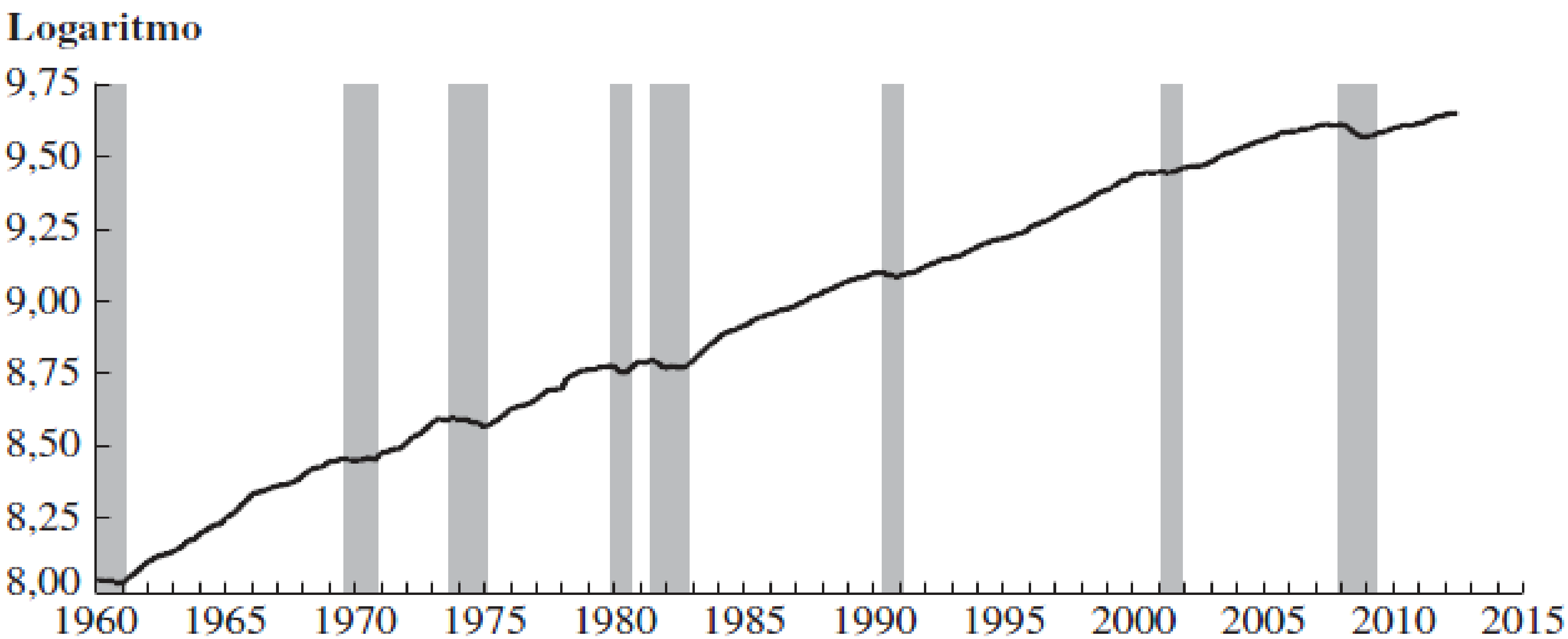
Quando si dovrebbe includere un trend temporale nel test DF?

La decisione di usare il test DF con sola intercetta o quallo con intercetta e trend dipende da quale sia l'alternativa e da come appaiano i dati.

- Nella specifica con sola intercetta, l'alternativa è che *Y* è stazionaria attorno a una costante – no crescita di lungo termine nella serie
- Nella specifica con intercetta e trend, l'alternativa è che *Y* è stazionaria attorno a un trend temporale lineare – la serie presenta crescita di lungo termine.

Esempio: il PIL USA ha un trend stocastico?

L'alternativa è che il logaritmo del PIL sia stazionario attorno a un trend temporale lineare



(a) PIL USA ($1996, miliardi)

$$\widehat{\Delta \ln(GDP_t)} = 0{,}244 + 0{,}0002t - \mathbf{0{,}030}\ln(GDP_{t-1})$$
$$(0{,}109) \quad (0{,}0001) \quad \mathbf{(0{,}014)}$$

$$+ 0{,}269\Delta\ln(GDP_{t-1}) + 0{,}178\Delta\ln(GDP_{t-2})$$
$$(0{,}069) \qquad\qquad (0{,}070)$$

Statistica t DF = **–2,18**

Da non confrontare con –1,645 – usare la tabella di Dickey-Fuller**!**

Statistica t DF = –2,18 (intercetta e trend temporale):

Tabella 14.4 Valori critici per grandi campioni della statistica di Dickey-Fuller aumentata.

Regressore deterministico	10%	5%	1%
Intercetta	–2,57	–2,86	–3,43
Intercetta e trend temporale	–3,12	–3,41	–3,96

t = –2,18 non respinge una radice unitaria al livello del 10%.

Nota: potete scegliere la lunghezza di ritardi nella regressione DF con BIC o AIC. (Per il PIL si scelgono due ritardi come nella regressione ADF mostrata)

E. Come risolvere/mitigare i problemi generati dai trend

Se Y_t ha una radice unitaria (ha un trend stocastico di passeggiata aleatoria), il modo più facile per evitare i problemi posti da ciò è quello di modellare Y_t in differenze prime.

- Nel caso di AR, questo significa specificare l'AR usando differenze prime di Y_t (ΔY_t)

Riepilogo: come rilevare e affrontare trend stocastici

1. Il modello della passeggiata aleatoria è quello più utilizzato per trend in dati temporali economici

2. Per determinare se Y_t ha un trend stocastico, prima si traccia il grafico di Y_t. Se appare plausibile un trend, si calcola il test DF (decidere quale versione, con sola intercetta o con intercetta + trend)

3. Se il test DF non rifiuta, si conclude che Y_t ha una radice unitaria (trend stocastico di passeggiata aleatoria)

4. Se Y_t ha una radice unitaria, si usa ΔY_t per analisi di regressione e previsione. Se non c'è radice unitaria, si usa Y_t.

9. Non stazionarietà II: rotture (Paragrafo 14.7)

Il secondo tipo di non stazionarietà che consideriamo è che i coefficienti del modello potrebbero non essere costanti sull'intero campione. Chiaramente è un problema per la previsione se il modello che descrive i dati storici è diverso dal modello attuale – per le previsioni si vuole il modello attuale (questo è un problema di validità esterna)

perciò:

- vedremo due modi per rilevare variazioni nei coefficienti: test per rottura e pseudo previsioni fuori campione
- esamineremo un esempio: la previsione del PIL mediante il differenziale dei tassi di interesse a lungo e a breve termine

A. Test per una rottura nei coefficienti di regressione

Caso I: la data della rottura è nota

Si supponga che sia noto che la rottura si è verificata nella data τ. La stabilità dei coefficienti può essere verificata stimando un <u>modello di regressione a integrazione totale</u>. Nel caso dell'ADL(1,1):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \delta_1 X_{t-1}$$
$$+ \gamma_0 D_t(\tau) + \gamma_1[D_t(\tau) \times Y_{t-1}] + \gamma_2[D_t(\tau) \times X_{t-1}] + u_t$$

dove $D_t(\tau) = 1$ se $t \geq \tau$, e $= 0$ altrimenti.

Se $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, allora i coefficienti sono costanti sull'intero campione.

Se almeno uno dei γ_0, γ_1 o γ_2 è diverso da zero, la funzione di regressione cambia nella data τ.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \delta_1 X_{t-1}$$
$$+ \gamma_0 D_t(\tau) + \gamma_1[D_t(\tau) \times Y_{t-1}] + \gamma_2[D_t(\tau) \times X_{t-1}] + u_t$$

dove $D_t(\tau) = 1$ se $t \geq \tau$, e $= 0$ altrimenti

La ***statistica test di Chow*** per una rottura nella data τ è la statistica F (robusta all'eteroschedasticità) che verifica:

$$H_0: \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

vs. H_1: almeno uno dei γ_0, γ_1, o γ_2 non è zero

- Si noti che è applicabile a un sottoinsieme dei coefficienti, per esempio, soltanto quello di X_{t-1}.
- Sfortunatamente, spesso non si conosce una potenziale data della rottura, cioè non si conosce τ …

Caso II: la data della rottura è ignota

Perché considerare questo caso?

- Si potrebbe sospettare che vi sia una rottura, senza però sapere quando
- Si potrebbe voler verificare l'ipotesi nulla della stabilità dei coefficienti contro l'alternativa generale che vi sia stata una rottura.
- Anche se si conosce la data della rottura, se tale "conoscenza" è basata sulla precedente osservazione della serie, allora si è in effetti "stimata" la data, e questo invalida i valori critici del test di Chow (*perché?*)

La statistica QLR (Quandt Likelihood Ratio) (rapporto delle verosimiglianze di Quandt)

Statistica QLR = massima statistica di Chow

- Sia $F(\tau)$ = la statistica di Chow che verifica l'ipotesi che non vi siano rotture nella data τ.
- La statistica test *QLR* è il ***massimo*** di tutte le statistiche *F* di Chow su un intervallo τ, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$:

$$QLR = \max[F(\tau_0), F(\tau_0+1), \ldots, F(\tau_1-1), F(\tau_1)]$$

- Una scelta convenzionale per τ_0 e τ_1 è costituita dal 70% più interno del campione (scludendo il primo e l'ultimo 15%).
- Si devono usare i consueti valori critici $F_{q,\infty}$?

Il test QLR (continua)

$QLR = \max[F(\tau_0), F(\tau_0+1), \ldots, F(\tau_1-1), F(\tau_1)]$

- La distribuzione nulla in grandi campioni di $F(\tau)$ per un dato (fisso, non stimato) τ è $F_{q,\infty}$
- Ma se si calcolano due test di Chow e si scegliere il più grande, il valore critico deve essere maggiore del valore critico per un singolo test di Chow.
- Se si calcolano molti test di Chow – per esempio tutte le date nel 70% centrale del campione – il valore critico deve essere ancora più grande!

- ***Nota***: in grandi campioni, *QLR* ha la distribuzione

$$\max_{a \le s \le 1-a} \left(\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \frac{B_i(s)^2}{s(1-s)} \right)$$

dove $\{B_i\}$, i =1,…,n, sono “ponti browniani” indipendenti e tempo-continui su 0 ≤ s ≤ 1 (un ponte browniano è un moto browniano deviato dalla sua emdia; un moto brownianno è una passeggiata aleatoria gaussiana [a distribuzione normale] in tempo continuo), e dove a = 0,15 (si esclude il primo e l’ultimo 15% del campione)

- I valori critici sono riportati nella Tabella 14.5…

Tabella 14.5 Valori critici della statistica QLR con troncamento del 15%.

Numero di restrizioni (q)	10%	5%	1%
1	7,12	8,68	12,16
2	5,00	5,86	7,78
3	4,09	4,71	6,02
4	3,59	4,09	5,12
5	3,26	3,66	4,53
6	3,02	3,37	4,12
7	2,84	3,15	3,82
8	2,69	2,98	3,57
9	2,58	2,84	3,38
10	2,48	2,71	3,23
11	2,40	2,62	3,09
12	2,33	2,54	2,97
13	2,27	2,46	2,87
14	2,21	2,40	2,78
15	2,16	2,34	2,71
16	2,12	2,29	2,64
17	2,08	2,25	2,58
18	2,05	2,20	2,53
19	2,01	2,17	2,48
20	1,99	2,13	2,43

Nota: questi valori critici si applicano quando $\tau_0 = 0{,}15T$ e $\tau_1 = 0{,}85T$ (arrotondato al primo decimale), in modo tale che la statistica F è calcolata per tutte le possibili date di rottura nel 70% centrale del campione. Il numero di restrizioni q è il numero di restrizioni verificate da ogni singola statistica F. I valori critici per altre percentuali di troncamento sono dati in Andrews (2003).

Si noti che questi valori critici sono maggiori dei valori critici $F_{q,\infty}$ – per esempio il valore critico al 5% $F_{1,\infty}$ è 3,84.

Esempio: la relazione tra PIL e differenziale dei tassi di interessi è stata stabile?

Si ricordino il modello ADL(2,2) di $GDPGR_t$ e $TSpread_t$, stimato sul periodo (1962 – 2012):

$$\widehat{GDPGR_t} = \underset{(0,48)}{0,97} + \underset{(0,08)}{0,24}\,GDPGR_{t-1} + \underset{(0,08)}{0,18}\,GDPGR_{t-2}$$

$$- \underset{(0,42)}{0,14}\,TSpread_{t-1} + \underset{(0,43)}{0,66}\,TSpread_{t-2}$$

Questo modello è stato stabile sull'intero periodo 1962-2012?

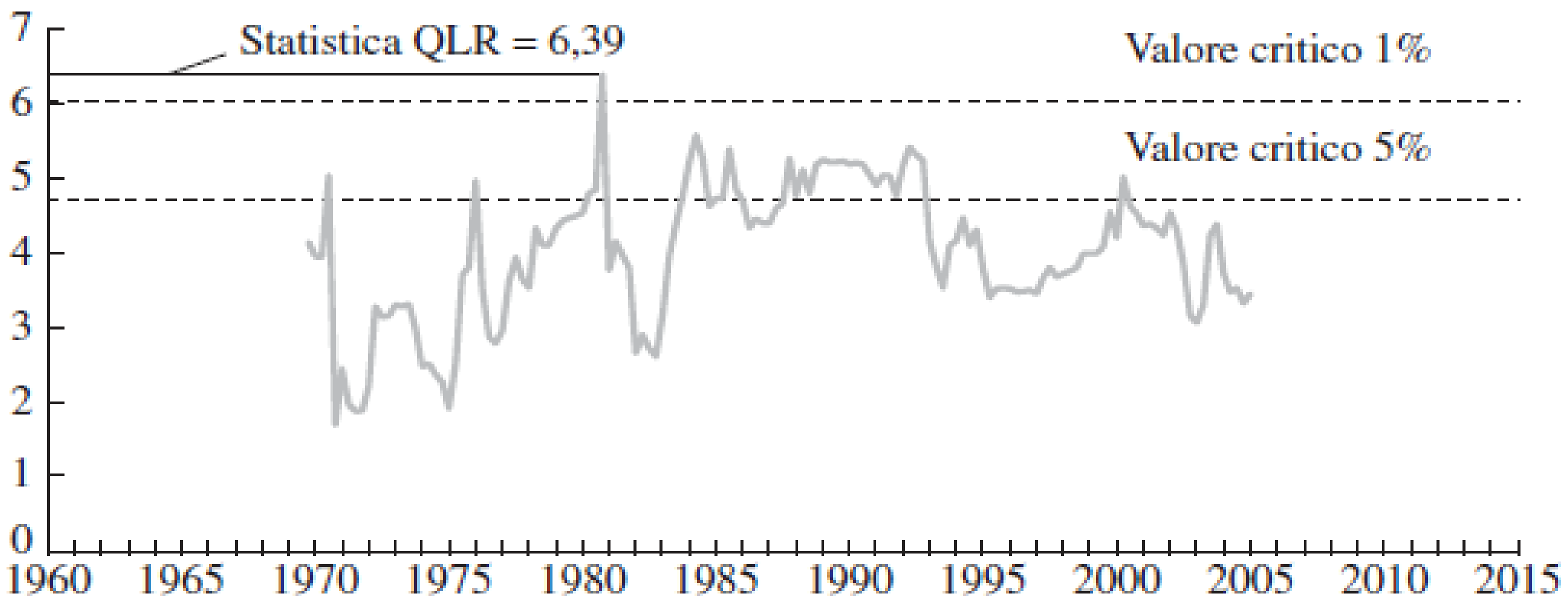
Test QLR del modello ADL(2,2)

Variabile dipendente: $GDPGR_t$

Regressori: intercetta, $GDPGR_{t-1}$, $GDPGR_{t-2}$, $TSpread_{t-1}$ e $TSpread_{t-2}$

- test per costanza di intercetta e coefficienti su $TSpread_{t-1}$ e $TSpread_{t-2}$ (i coefficienti su $\Delta GDPGR_{t-1}$,…, $GDPGR_{t-2}$ sono costanti): QLR = 6,39 (q = 3).
  - valore critico all'1% = 6,02 → rifiuta al livello dell'1%
  - stima data rottura: F massimale si ha in 1980:T4
- Si conclude che vi è una rottura nella relazione tra differenziale dei tassi e PIL, con data stimata 1980:T4

Figura 14.5 *Statistica F per la verifica di rotture nell'Equazione (14.16) in date diverse.*



B. Valutazione della stabilità del modello usando pseudo previsioni fuori campione

- Il test QLR non lavora bene verso la fine del campione, ma solitamente questa è la parte meno interessante!
- Un modo per verificare se il modello sta lavorando alla fine del campione è quello di vedere se le pseudo previsioni fuori campione (*poos*) sono "in carreggiata" nelle osservazioni più recenti. Si tratta di un approccio diagnostico informale (non di un test formale) che fa da complemento al test formale mediante QLR.

Applicazione al modello PIL–differenziale dei tassi di interesse

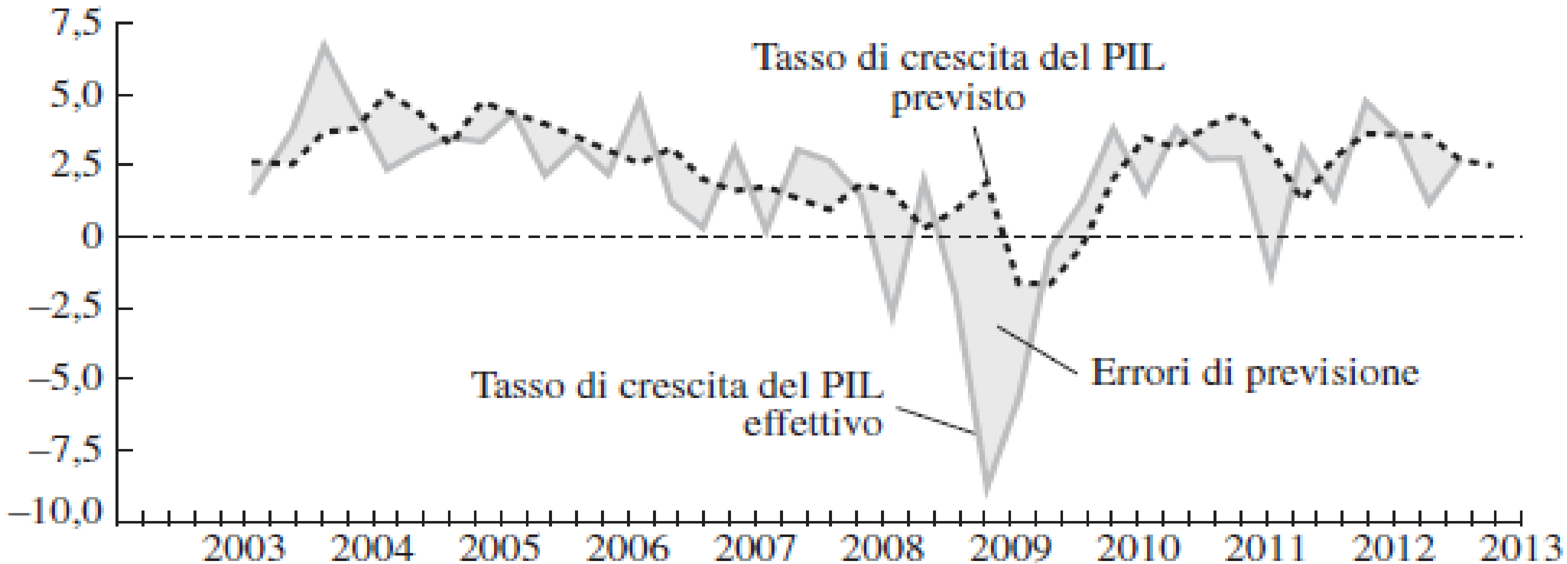
- Abbiamo trovato una rottura in 1980:T4 – perciò per questa analisi consideriamo soltanto regressioni con partenza in 1981:T1 – ignorando i dati precedenti dal "vecchio" modello.
- <u>Modello di regressione:</u>

variabile dipendente: $GDPGR_t$

regressori: intercetta, $GDPGR_{t-1}$, $GDPGR_{t-2}$, $TSpread_{t-1}$ e $TSpread_{t-2}$

- Pseudo previsioni fuori campione:
  - Calcolare regressione su t = 1980:T1,…, P
  - Calcolare previsione *poos*, $\widehat{GDPGR}_{P+1|P}$, ed errore di previsione
  - Ripetere per P = 2003:T1,…, 2012:T4

Previsioni POOS di GDPGR usando il modello ADL(2,2) con *TSpread*



Il modello prevede il tasso di crescita del PIL dal 2003 al 2012, ma non riesce a prevedere il brusco calo conseguente alla crisi finanziaria del 2008.

Alcune statistiche di riepilogo

- *SER*, adattamento modello 1981:T1 – 2002:T4: 2,39
- Errore medio previsione, 2003:T1 – 2012:T4 = −0,73 (*SE* = 0,39), perciò vi sono evidenze che le previsioni fossero troppo alte
- *poos RMSFE*, 2003:T1 – 2012:T4: 2,54 (è maggiore del SER nel campione)

Tuttavia, le previsioni meno precise si concentrano nel periodo di crisi finanziaria. Escludendo il solo trimestre 2008:T4, *poos RMSFE* cala a 1,93.

Non solo l’ADL(2,2) ha fallito la previsione della crescita del PIL nel 2008:T4. I ricercatori della Federal Reserve Bank di Philadelphia hanno sondato 47 previsori professionisti nel terzo trimeste del 2008, chiedendo le loro previsioni sul tasso di crescita del PIL nel quarto trimestre. La mediana delle 47 previsioni fu 0,7%, valore simile a quello previsto dal modello ADL(2,2), di 1,0. Il tasso effettivo di crescita del PIL USA nel 2008:T4 è stato −8,7%.

10. Riepilogo: modelli di previsione per serie temporali (Paragrafo 14.8)

- Per scopi di previsione non è importante avere coefficienti con interpretazione causale!

- Gli strumenti di regressione possono essere usati per costruire modelli di previsione affidabili, anche se non vi è interpretazione causale dei coefficienti:
  - AR(p) – modelli "benchmark"
  - ADL(p,q) – aggiunge q ritardi di X (un altro predittore)
  - Test di causalità di Granger – verificano se una variabile X e i suoi ritardi sono utili per predire Y a partire dai ritardi di Y.

Riepilogo (continua)

- Nuovi concetti e strumenti:
  - stazionarietà
  - intervalli di previsione con RMSFE
  - pseudo previsioni fuori campione
  - BIC per scelta modello
  - Modi per verifiche di non stazionarietà:
    - test di Dickey-Fuller per una radice unitaria (trend stocastico)
    - Test per una violazione nei coefficienti di regressione:
      - test di Chow in una data nota
      - test QLR in una data ignota
    - analisi *poos* per previsioni verso la fine del campione