Corso di Modelli per l’analisi statistica

Prof. G. Scandurra

a.a. 2020-2021

Teoria dei test statistici - Caso di studio

Supponiamo che un'azienda sia interessata a stabilire

se la lunghezza media osservata su un campione di n scatole prodotte da un certo processo produttivo

convalidi l'affermazione

che il processo produttivo sia sotto controllo (cioè che le scatole prodotte abbiano una lunghezza media pari a 10 cm)

Definizione di ipotesi statistica parametrica

Un'ipotesi statistica è un'affermazione o una congettura riguardante un parametro θ della popolazione

nell'esempio precedente

"la lunghezza media delle scatole prodotte è di 10 cm" è un'ipotesi statistica sulla media μ della popolazione

Sottoporre a test (o verifica) un'ipotesi significa valutarne la plausibilità alla luce delle informazioni campionarie

Ipotesi nulla e alternativa

Si considera una coppia di ipotesi (sistema di due ipotesi):

- ipotesi nulla (H_0)
- ipotesi alternativa (H_1)

L'ipotesi nulla H_0 coincide con lo stato attuale delle cose o con l'attuale convinzione riguardo ad un valore assunto da un parametro

L'ipotesi alternativa H_1 è specificata come ipotesi opposta e complementare a H_0

Ipotesi semplici e composte

Ipotesi del tipo $\theta = \theta_0$ oppure $\theta = \theta_1$ sono dette ipotesi semplici

Ipotesi del tipo $\theta > \theta_0$ oppure $\theta < \theta_0$ o ancora $\theta \neq \theta_0$ sono dette ipotesi composte

Sistema di ipotesi - Caso di studio

Nell’esempio siamo interessati a verificare se il processo produttivo è sotto controllo (cioè se la lunghezza media delle scatole è di 10 cm) oppure se c’è qualche malfunzionamento nel processo di produzione che determina differenze significative della lunghezza media dal valore di 10 cm (tali da rendere necessaria una revisione del processo)

$$H_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu \neq 10$$

Verifica di ipotesi - Caso di studio

Si estrae un campione di n scatole

Sulla base dell'evidenza empirica (il risultato campionario) si vuole capire se l'ipotesi nulla possa essere ritenuta plausibile oppure no

Nel primo caso si accetta H_0, nel secondo si rifiuta H_0 a favore di H_1

Se il campione non fornisce sufficiente evidenza contro H_0, si conclude affermando che non possiamo rifiutare H_0 (quindi la accettiamo)

Altrimenti, si rifiuta H_0 e si accetta H_1

Accettare H_0 - Caso di studio

Accettare un’ipotesi non significa aver dimostrato che l’ipotesi sia vera, perché la conclusione si basa solo su un campione di osservazioni.

Se accettiamo (non rifiutiamo) H_0, possiamo solo concludere che non c’è evidenza empirica sufficientemente contraria all’ipotesi stessa.

I dati campionari non forniscono una prova del fatto che il processo sia fuori controllo.

Possiamo quindi continuare a ritenere che il processo produttivo sia sotto controllo.

Accettare H_1 - Caso di studio

Se rifiutiamo H_0 e accettiamo H_1 vuol dire che l'ipotesi alternativa, alla luce dei dati campionari, è più verosimile dell'ipotesi nulla. Si conclude, quindi, che la lunghezza media delle scatole è significativamente diversa (maggiore o minore) da 10 cm.

Di conseguenza il processo produttivo dovrebbe essere interrotto e dovrebbero essere intraprese le azioni necessarie per risolvere il problema.

Esempio 1

Il manager di un ufficio postale di Napoli è interessato a stabilire se il tempo medio di attesa dei clienti allo sportello è cambiato nell'ultimo anno rispetto al precedente, quando era di 30 minuti.

Sistema di ipotesi

$$H_0 : \mu = 30$$

$$H_1 : \mu \neq 30$$

Ipotesi alternativa bidirezionale

Esempio 2

Un'industria automobilistica acquista un lotto di batterie per autovetture della durata media di 4000 ore, secondo quanto ha dichiarato il costruttore. Sulla base di un campione l'industria acquirente vuole verificare che le batterie abbiano una durata media di almeno 4000 ore

Ipotesi alternativa unidirezionale a sinistra

Sistema di ipotesi

$$H_0 : \mu \geq 4000$$
$$H_1 : \mu < 4000$$

o in alternativa

$$H_0 : \mu = 4000$$
$$H_1 : \mu < 4000$$

C'è un danno per l'industria automobilistica se la durata delle batterie è inferiore a quella dichiarata

Esempio 3

Un produttore di vernici assicura che il tempo medio di asciugatura non è superiore a 15 minuti.
La ditta acquirente, prima di acquistare il prodotto, fa alcune prove su un campione di barattoli per verificare se l’affermazione del produttore trova riscontro oppure no

Sistema di ipotesi

$$H_0 : \mu \leq 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$

o in alternativa

Ipotesi alternativa unidirezionale a destra

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$

C’è un danno per la ditta che acquista se i tempi di asciugatura sono superiori a quanto garantito

Quali valori campionari portano ad accettare H_0

Per il parametro θ sotto ipotesi, consideriamo il corrispondente stimatore T

Se $H_0 : \theta = \theta_0$ è vera, ci aspettiamo che lo stimatore T assuma un valore "vicino" a θ_0

⇨ valori di T (stime campionarie) "abbastanza vicini" a θ_0 portano ad accettare H_0

⇨ valori di T "molto distanti" da θ_0 portano a rifiutare H_0 e ad accettare $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Ancora sul caso di studio

Se nel campione di scatole osserviamo una lunghezza media pari a 9,9 possiamo concludere che la lunghezza media di tutte le scatole sia pari a 10

(è molto probabile ottenere una media campionaria pari a 9,9 se estraiamo un campione da una popolazione con media 10) ⇒ Accettiamo H_0

Se, invece, il campione fornisce una media pari a 8,2 (oppure a 12,3), si conclude che la lunghezza media di tutte le scatole non è 10

(è poco probabile ottenere una media campionaria pari a 8,2 o 12,3 estraendo un campione da una popolazione con media 10) ⇒ Rifiutiamo H_0

Regione di accettazione e regione di rifiuto

Le affermazioni "abbastanza vicino" e "molto distante" devono essere definite sulla base della distribuzione dello stimatore T, supponendo vera H_0

[distribuzione della statistica campionaria T, condizionata ad assumere vera l'ipotesi nulla]

$T|H_0$ vera (statistica test)

Questa distribuzione è suddivisa in due regioni (o aree):

- regione A di Accettazione
- regione R di Rifiuto (o critica)

Regione di accettazione e regione di rifiuto

Se il valore campionario cade nella regione A, si accetta H_0

Se il valore campionario cade nella regione R, si rifiuta H_0 a favore di H_1

La regione di rifiuto comprende valori della statistica test che hanno una probabilità molto bassa di verificarsi se H_0 è vera (sono quei valori che ci aspetteremmo di osservare nel caso in cui H_0 fosse falsa)

Regione di accettazione e di rifiuto

Esempio 1

L'obiettivo è quello di prendere una decisione circa il valore assunto dal parametro medio della popolazione

il processo decisionale si basa sulla distribuzione dello stimatore media campionaria che per il teorema del limite centrale (purché il campione sia grande)

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

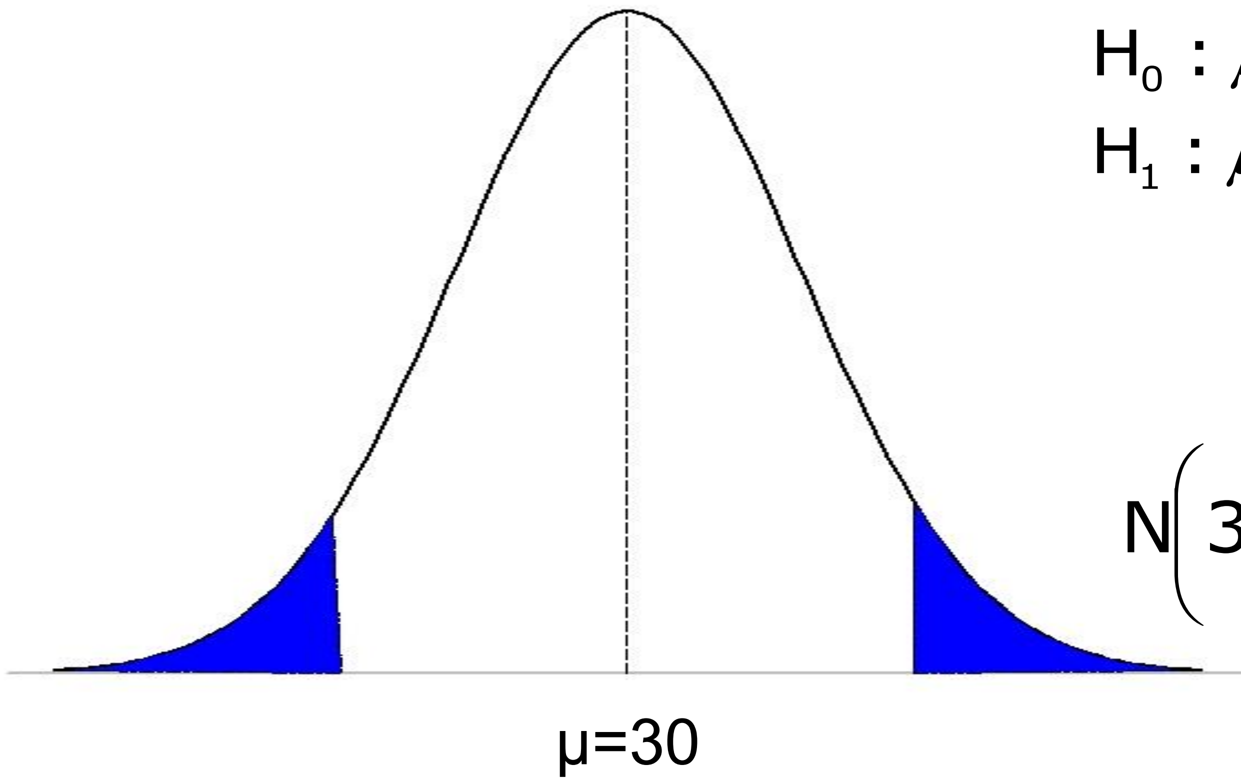
In particolare, date le ipotesi

$$H_0 : \mu = 30$$
$$H_1 : \mu \neq 30$$

$$\overline{X} \mid H_0 \text{ vera} = \overline{X} \mid \mu = 30 \sim N\left(30; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Distribuzione dello stimatore condizionata ad assumere vera H_0

Esempio 1



$$H_0 : \mu = 30$$
$$H_1 : \mu \neq 30$$

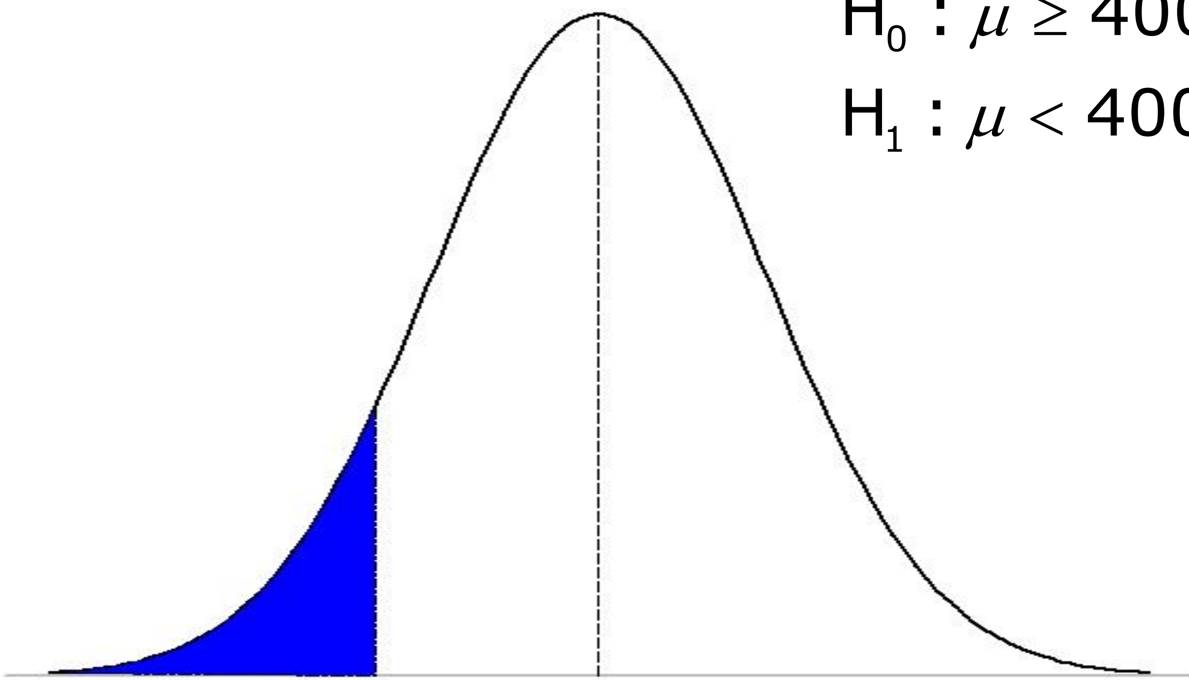
$$N\left(30, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

La regione di rifiuto comprende valori molto più piccoli di 30 e valori molto più grandi di 30

(è la somma delle due aree colorate sulle code)

Esempio 2

$$H_0 : \mu \geq 4000$$
$$H_1 : \mu < 4000$$



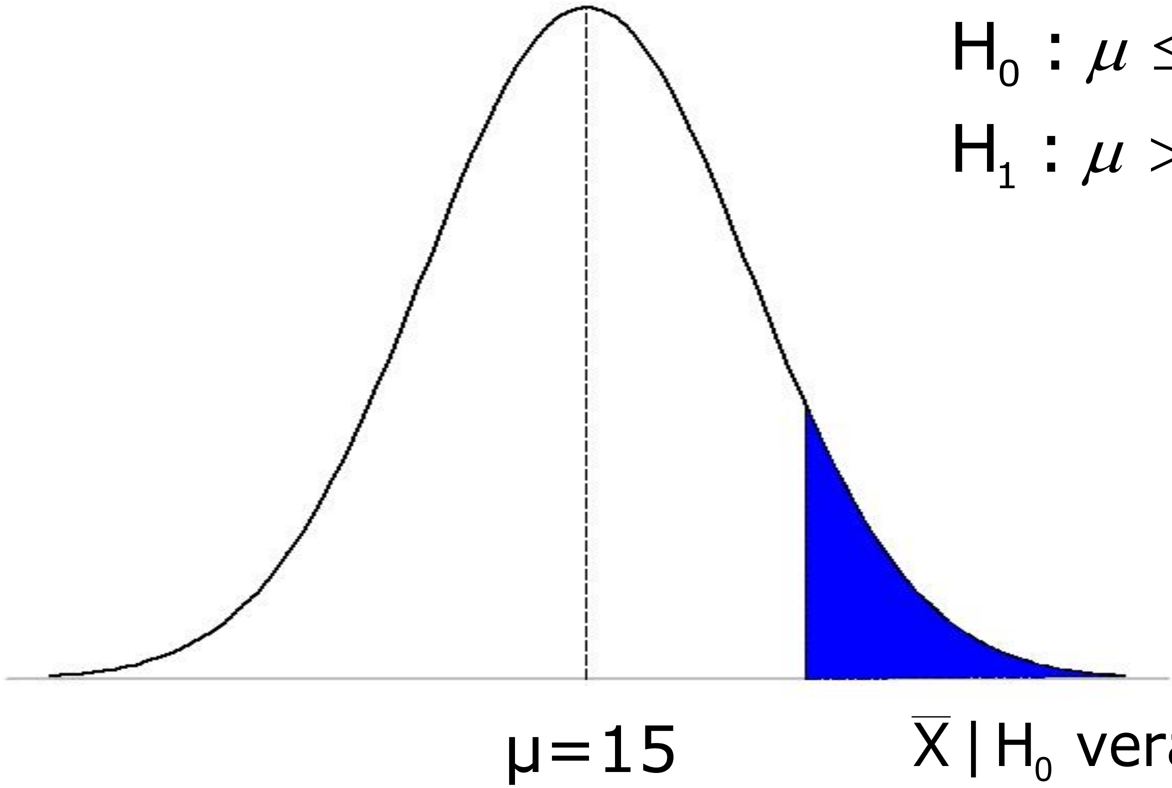
μ=4000 $\quad \overline{X} \mid H_0 \text{ vera} \sim N\left(4000; \frac{\sigma^2}{n}\right)$

La regione di rifiuto comprende valori molto più piccoli di 4000

(è l'area colorata sulla coda sinistra)

Esempio 3

$$H_0 : \mu \leq 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$



$$\overline{X} \mid H_0 \text{ vera} \sim N\left(15; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

La regione di rifiuto comprende valori molto più grandi di 15
(è l'area colorata sulla coda destra)

Test bilaterale e test unilaterale

Test di ipotesi	Tipo di test
$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$	Bilaterale (due aree di rifiuto)
$H_0 : \theta \geq \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$	Unilaterale (area di rifiuto a sinistra)
$H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$	Unilaterale (area di rifiuto a destra)

Valori soglia (valori critici)

Le due regioni (A e R) sono separate da uno o due valori critici

La determinazione del valore critico dipende da quanto ampia vogliamo che sia la regione critica

L'ampiezza della regione critica è a sua volta legata al rischio che si è disposti a correre rifiutando l'ipotesi nulla quando essa è vera

Decisione corretta ed errori

		Decisione	
		Accetto H_0	Rifiuto H_0
Situazione effettiva	H_0 vera	Decisione corretta Prob (decisione corretta)=1- α	Errore I tipo Prob (errore I Tipo)=α
	H_0 falsa	Errore II tipo Prob (errore II Tipo)= β	Decisione corretta Prob (decisione corretta)=1- β

Tipi di errore: definizione

Errore di I tipo α : si rifiuta H_0 ma l'ipotesi nulla è vera

$$P(\text{rifiutare } H_0 \mid H_0 \text{ vera}) = \alpha$$

rappresenta l'ampiezza della regione di rifiuto

α è chiamato "livello di significatività"

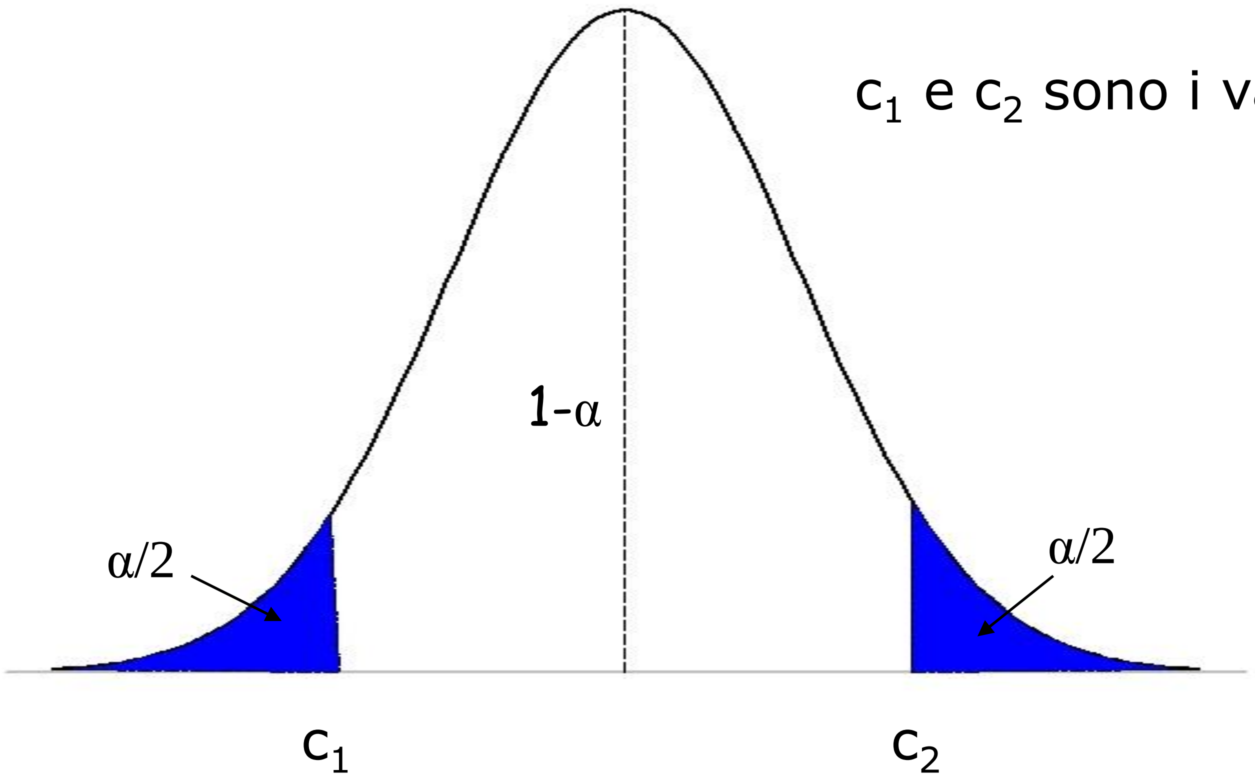
Errore di II tipo β : si accetta H_0 ma l'ipotesi nulla è falsa

$$P(\text{accettare } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

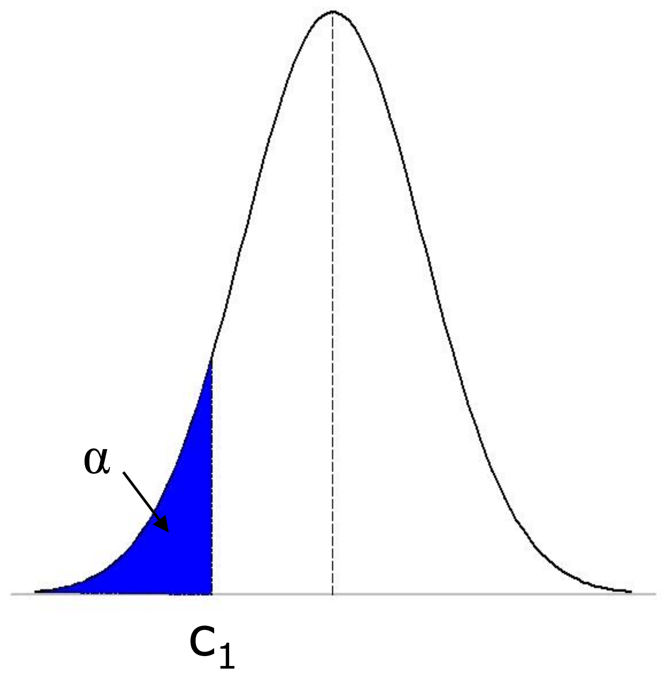
Test bilaterale: valori soglia

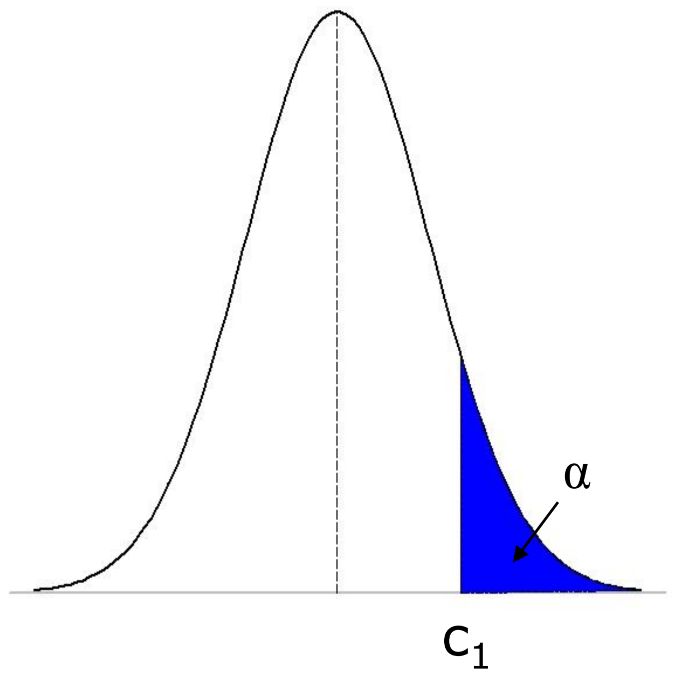
α: livello di significatività = somma delle due aree sulle code

c_1 e c_2 sono i valori soglia



Test unilaterale: valore soglia





In un test unilaterale c’è un unico valore soglia che lascia alla sua destra o alla sua sinistra un’area pari a α (livello di significatività)

I rischi del processo decisionale

Per la verifica di una ipotesi sulla base di un campione di numerosità fissata pari a n, non è possibile minimizzare contemporaneamente i due tipi di errore.
Si sceglie di fissare α ad un livello basso come il rischio che si è disposti a tollerare (in genere 0,01 ; 0,05; 0,10)

Se si ritengono gravi le conseguenze di commettere un errore di I specie, fisseremo un α piccolo (ad esempio 0,01 invece di 0,05)
Ma quanto più piccolo è α, tanto più grande è β
Quando risulta prioritario contenere l'errore di II specie, si può fissare α pari a 0,05 o a 0,10 piuttosto che 0,01

I rischi del processo decisionale

Esempio: processo di produzione di scatole regalo.
Il processo si considera sottocontrollo se la lunghezza media di tali scatole è di 10 cm (ipotesi nulla H_0).

L’errore di I tipo consiste nel concludere che il processo non è sottocontrollo quando invece lo è (ovvero affermiamo che la lunghezza media è variata quando invece è sempre di 10 cm).

L’errore di II tipo consiste nel concludere che il processo è sotto controllo quando invece la media delle lunghezze è variata realmente.

I rischi del processo decisionale

La scelta del livello di significatività α dipende dai costi che ciascuno dei due errori comporta.

Se costa tanto il cambiamento del processo produttivo si dovrebbe essere molto certi della sua necessità.
In tal caso l’errore di I specie è quello più grave e dovrà essere il più piccolo possibile.

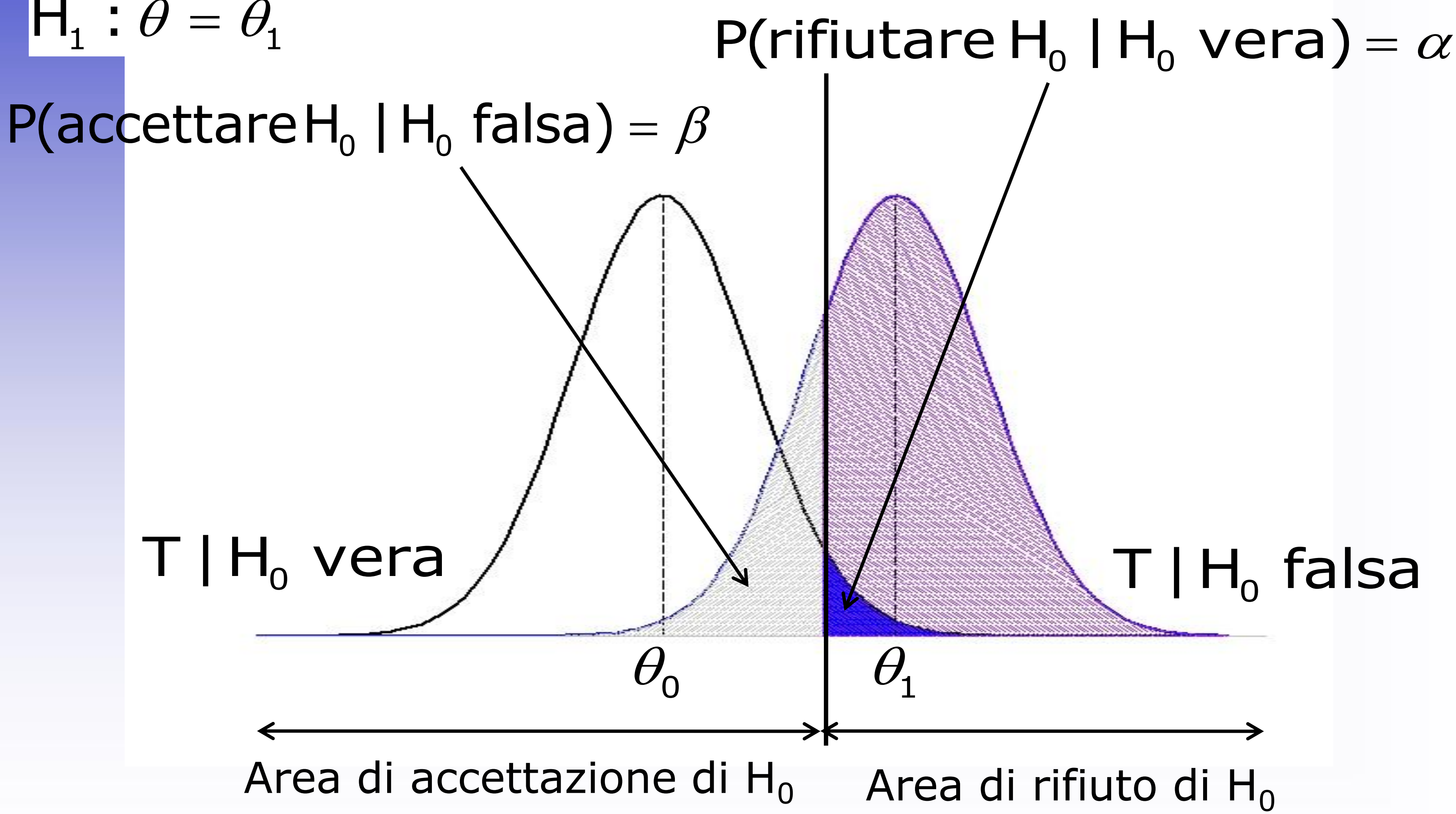
Relazione tra gli errori di I e II tipo

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta = \theta_1$

$\theta_1 > \theta_0$

T stimatore corretto di θ



Approccio del *p-value*

La conclusione di un test può dipendere dalla scelta del livello di significatività α.

Un'ipotesi nulla rifiutata per α=0,10 potrebbe essere accettata con α=0,01

L'approccio del *p-value* permette di sganciare l'esito del test dalla scelta di α.

Il *p-value* è definito come la probabilità di osservare un valore della statistica test uguale o più estremo di quello osservato effettivamente sul campione, dato che H_0 è vera

p-value

Il *p-value* è chiamato anche "livello di significatività osservato"

A differenza di α non è una quantità fissata a priori

Misura quanto i dati campionari supportano H_0: più piccolo è il p-value, minore è il supporto a favore di H_0 (maggiore è l'evidenza contro H_0)

Si rifiuta H_0 se p-value $< \alpha$
Si accetta H_0 se p-value $> \alpha$

Passi per la verifica di ipotesi

1. Definizione del sistema di ipotesi
2. Scelta della statistica test
3. Scelta del livello α di significatività del test e della numerosità campionaria n
4. Definizione della regione di rifiuto
5. Estrazione del campione
6. Calcolo del valore della statistica test sulla base dei dati campionari
7. Si prende la decisione