Regressione lineare semplice e multipla

Prof. G. Scandurra

Regressione lineare

In molte applicazioni si è interessati a valutare se una variabile (dipendente) può essere in relazione funzionale con una o più variabili indipendenti.

Nel primo caso (una sola variabile indipendente) si parla di regressione semplice.

Nel secondo caso (più variabili indipendenti) si parla di regressione multipla. In generale:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Se la funzione f è di primo grado, si parla di regressione lineare.

La regressione lineare semplice

$$y = \alpha + \beta x$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_q x_q$$

Parametri da calcolare nella Popolazione nel caso di 1 o più variabili indipendenti

$$y = a + bx$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_q x_q$$

Parametri da calcolare nel campione nel caso di 1 o più variabili indipendenti

Intercetta

Coefficiente **angolare**

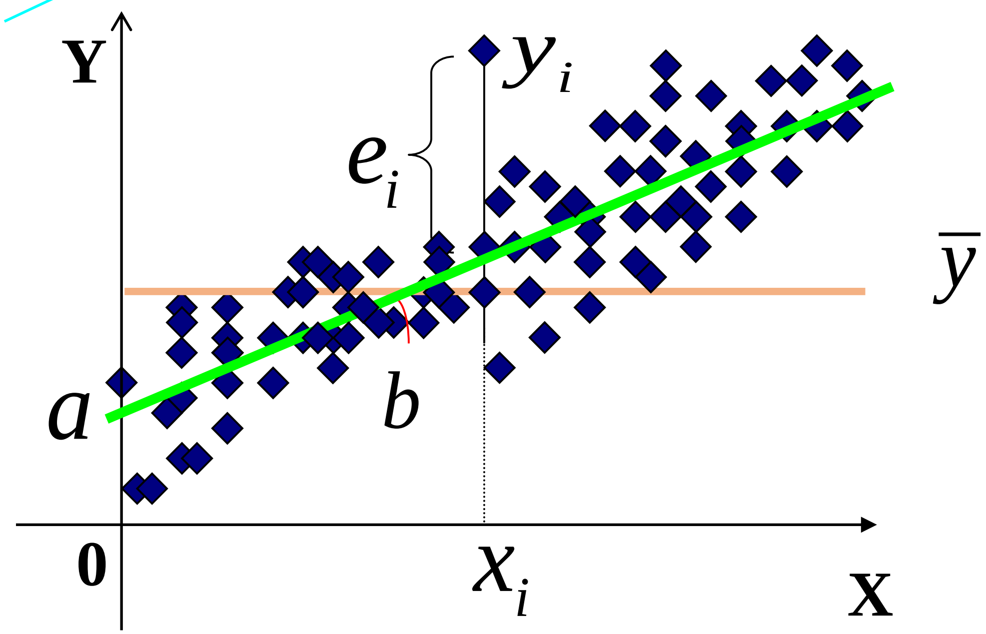
La regressione lineare semplice

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

Valore vero

Valore calcolato sulla retta = $\hat{y}_i$

Scarto o errore o residuo



La regressione lineare: le ipotesi

1) $y = a + bx + \varepsilon$

2) $E(\varepsilon) = 0$

3) $Var(\varepsilon) = cost < \infty$

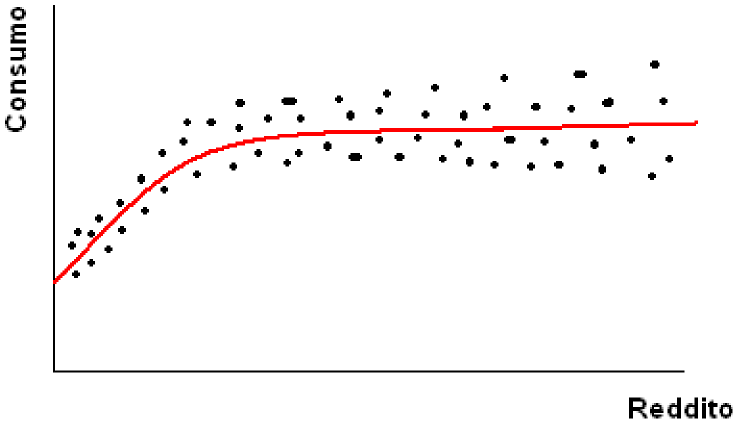
4) $Cov(\varepsilon i, \varepsilon j) = 0$

5) $\varepsilon = N(0, \sigma)$??

IMPORTANTE

6) $Cov(\varepsilon, x) = 0$

7) *Assenza di collinearità perfetta tra le x (se più di una)*



Caso di eteroschedasticità

La regressione lineare: le ipotesi

$$y = \alpha + \beta x_1 + \varepsilon$$

Modello stimato

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon^*$$

Modello "vero" con una probabile relazione sussistente tra x1 e x2

$$\mathrm{cov}(x_1, x_2) \neq 0$$

Varianza vera di y

$$\mathrm{var}(y) = \beta_1 \,\mathrm{var}(x_1) + \beta_2 \,\mathrm{var}(x_2) + \mathrm{var}(\varepsilon^*)$$

Per assumere lo stesso valore nel modello stimato, deve necessariamente essere:

$$\mathrm{var}(y) = \beta \,\mathrm{var}(x_1) + \mathrm{var}(\varepsilon) + \mathrm{cov}(x_1, \varepsilon)$$

La regressione lineare: la verifica delle ipotesi

ALCUNI PRINCIPI BASILARI PRIMA DI COMINCIARE

I programmi informatici sono strumenti utilissimi che ci risparmiano calcoli lunghi, noiosi e diminuiscono la probabilità di commettere errori

I programmi informatici senza l'intelligenza umana che li usa e li interpreta, non servono a nulla

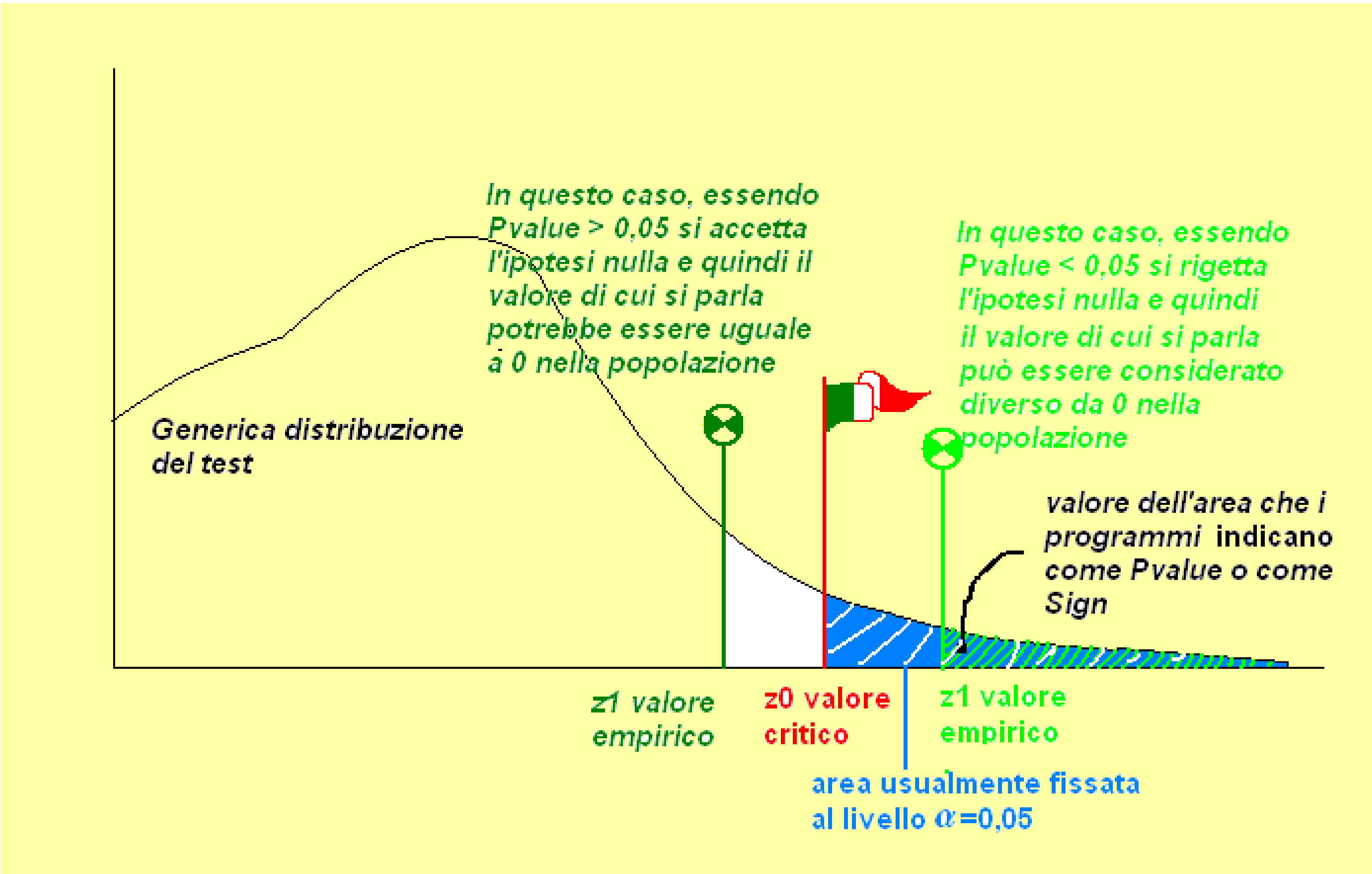
Una volta che programmi hanno effettuato i calcoli della regressione deve intervenire lo statistico per verificare il modello sperimentato

Ogni modello, anche il più bislacco, darà dei risultati che a prima vista potrebbero anche sembrare accettabili

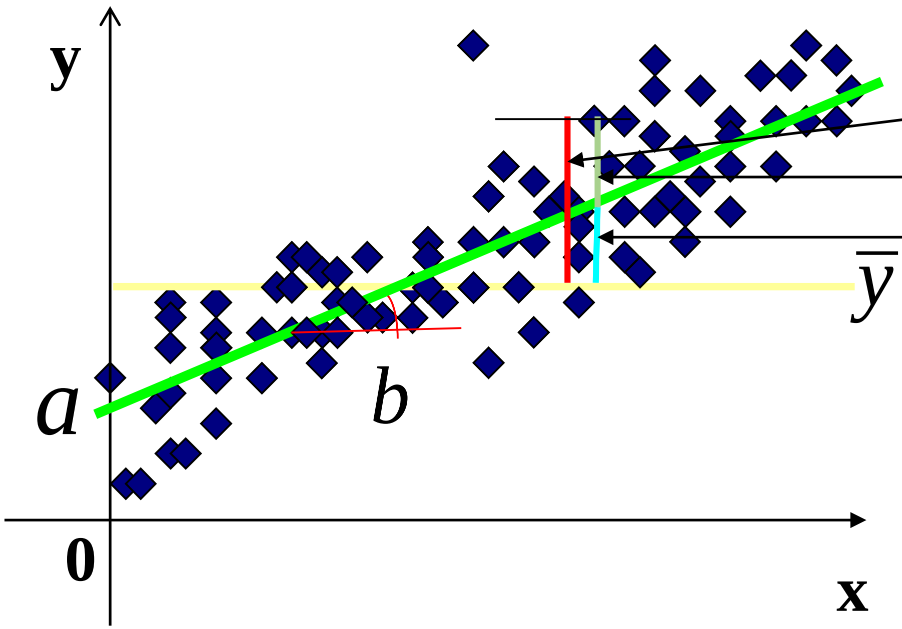
E' DI VITALE IMPORTANZA CHE, A POSTERIORI, SI VERIFICHI SE LE IPOTESI CHE FANNO DA BASE AL MODELLO SIANO STATE RISPETTATE. E' INDISPENSABILE TROVARE LE LORO TRACCE NEI RISULTATI FORNITI DAL PROGRAMMA!!

La regressione lineare

UNA QUESTIONE PRELIMINARE: che intendono i programmi con Sign o con Pvalue



La regressione lineare



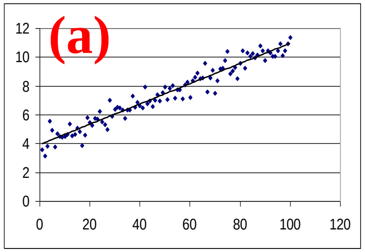
$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

SST = SSR + SSE

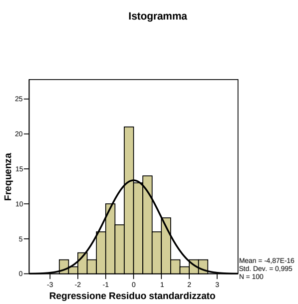
Nel nostro caso, essendoci una sola variabile indipendente, p=1

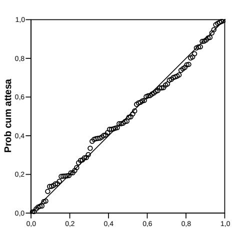
$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \qquad F = \frac{\dfrac{SSR}{p}}{\dfrac{SSE}{n-p-1}} \qquad DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^{n} (e_i)^2} \qquad t_\beta = \frac{\hat{\beta}}{sb_\beta}$$

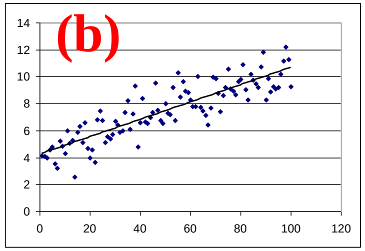
La regressione lineare semplice



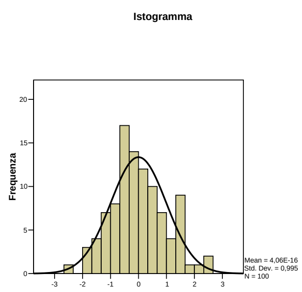
F	1524,046	0,000
a	3,920	0,000
b	0,070	0,000
R^2	0,940	
DW	2,002	

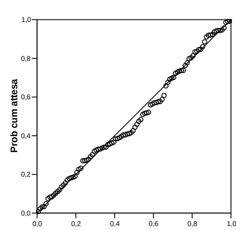


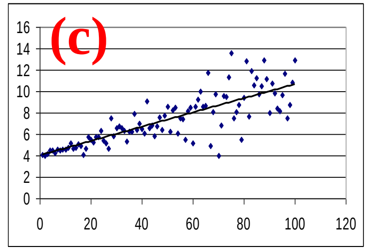




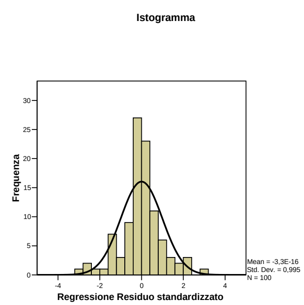
F	298,305	0,000
a	4,247	0,000
b	0,064	0,000
R^2	0,753	
DW	1,989	

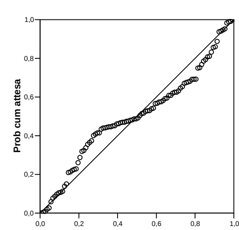


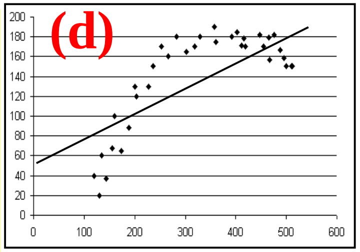




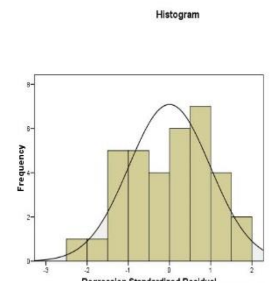
F	173,175	0,000
a	4,025	0,000
b	0,066	0,000
R^2	0,639	
DW	1,041	



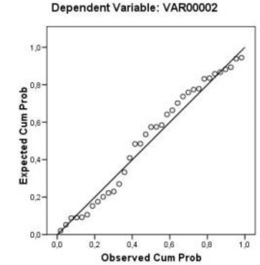


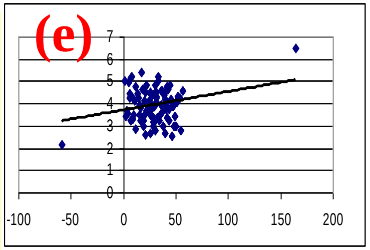


F	45,81	0,000
a	48,058	0,000
b	0,283	0,000
R^2	0,581	
DW	0,338	

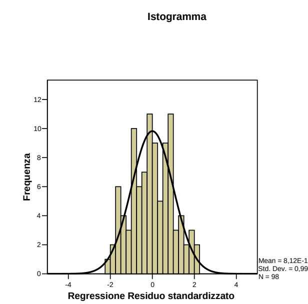


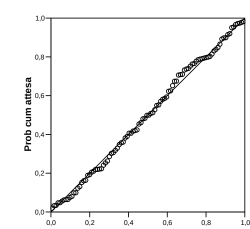
Dependent Variable: VAR00002





F	5,797	0,018
a	3,697	0,000
b	0,008	0,038
R^2	0,057	
DW	2,001	





La regressione lineare multipla

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + \beta_p x_{1p} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_p x_{2p} + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \beta_p x_{np} + \varepsilon_n$$

n **osservazioni**
p **variabili (indipendenti)**

$$\boxed{\mathbf{n > p + 1}}$$

La regressione lineare multipla

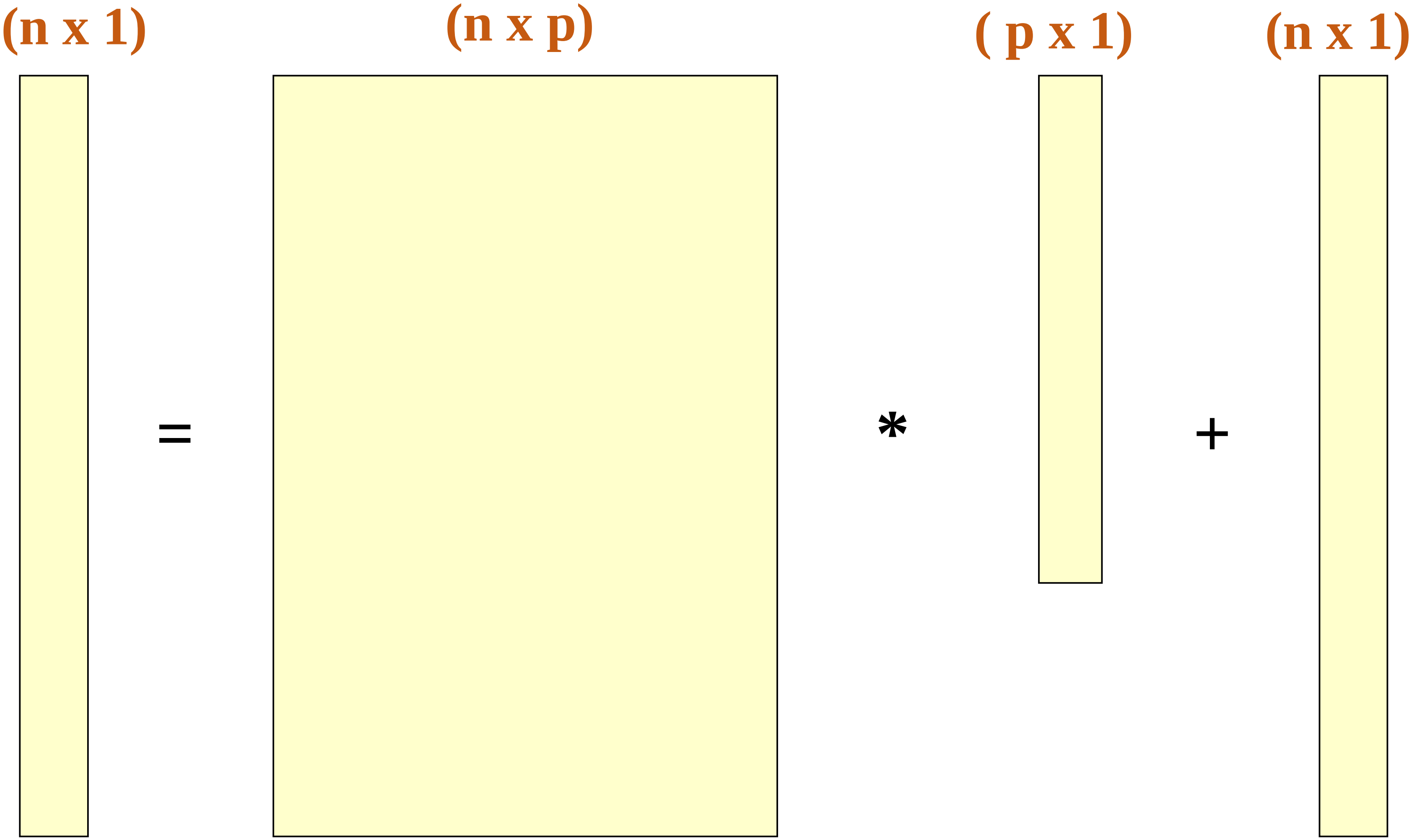
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

(n x 1) **(n x p)** **(p x 1)** **(n x 1)**

y **X** **β** **ε**

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}}$$

La regressione lineare multipla



$$\boxed{y = X * \beta + \varepsilon}$$

La regressione lineare multipla

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Errori
(da calcolare)

Coefficienti di regressione
(da stimare)

Variabile dipendente
(nota)

Variabili indipendenti
(note)

COME STIMARE I COEFFICIENTI DI REGRESSIONE DEL MODELLO IPOTIZZATO?

MINIMI QUADRATI ORDINARI
ORDINARY LEAST SQUARES **(OLS)**

La regressione lineare multipla

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

Ipotesi: **E(y)= Xβ**

$$E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip}$$

$\hat{y}_i$

MODELLO STIMATO

$$\hat{E}(y_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_p x_{ip}$$

La regressione lineare multipla

Le stime dei minimi quadrati di $\boldsymbol{\beta_0}$, $\boldsymbol{\beta_1}$,…, $\boldsymbol{\beta_p}$ minimizzano la somma al quadrato delle deviazioni tra le osservazioni empiriche e teoriche.

Occorre trovare quei valori di $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_p$ **che minimizzano:**

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \min$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \qquad x_i'$$

La regressione lineare multipla

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \min$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \mathbf{x}'_{\mathbf{i}} \boldsymbol{\beta} \right)^2$$

i-esimo **elemento del vettore**

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right)' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right)$$

La regressione lineare multipla

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X\beta}\right)'\left(\mathbf{y} - \mathbf{X\beta}\right)$$

$$\varepsilon^2 = \boldsymbol{\varepsilon}' \quad \boldsymbol{\varepsilon}$$

Vettore Trasposto

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & . & . & 6 \end{bmatrix}$$

(1 x n)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ . \\ . \\ 6 \end{bmatrix}$$

(n x 1)

(1 x n) x (n x 1) = (1 x 1)

La regressione lineare multipla

$$SSE = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

OCCORRE MINIMIZZARE!

DERIVIAMO RISPETTO A $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial SSE(\boldsymbol{\beta})}{\partial(\boldsymbol{\beta})} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = 0$$

La regressione lineare multipla

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\boldsymbol{\beta} = ? \qquad\qquad \cancel{\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{X}'\mathbf{y}}{\mathbf{X}'\mathbf{X}}} \; ?$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$\boxed{\text{Matrice inversa}}$

La regressione lineare multipla

UN ESEMPIO

CON EXCEL

La regressione lineare multipla

Microsoft Excel - Cartel1

	A	B	C	D	E	F
1	Investimenti Reali (Y)	Costante	Trend (T)	Prodotto Nazionale Lordo (GNP)	Tasso Interesse (R)	Tasso Inflazione (P)
2	0,161	1	1	1,058	5,16	4,4
3	0,172	1	2	1,088	5,87	5,15
4	0,158	1	3	1,086	5,95	5,37
5	0,173	1	4	1,122	4,88	4,99
6	0,195	1	5	1,186	4,5	4,16
7	0,217	1	6	1,254	6,44	5,75
8	0,199	1	7	1,246	7,83	8,82
9	0,163	1	8	1,232	6,25	9,31
10	0,195	1	9	1,298	5,5	5,21
11	0,231	1	10	1,37	5,46	5,83
12	0,257	1	11	1,439	7,46	7,4
13	0,259	1	12	1,479	10,28	8,64
14	0,225	1	13	1,474	11,77	9,31
15	0,241	1	14	1,503	13,42	9,44
16	0,204	1	15	1,475	11,02	5,99

MATRICE DEI DATI

y

X

Foglio1 / Foglio2 / Foglio3

Pronto NUM

La regressione lineare multipla

Ricordiamo che...

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \dfrac{\mathrm{cov}(x;y)}{\mathrm{var}(x)} \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \Longrightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

COME FARE, USANDO UN SOFTWARE COMUNE COME EXCEL?

La regressione lineare multipla

y

	A
1	Investimenti Reali (Y)
2	0,161
3	0,172
4	0,158
5	0,173
6	0,195
7	0,217
8	0,199
9	0,163
10	0,195
11	0,231
12	0,257
13	0,259
14	0,225
15	0,241
16	0,204

(n x 1)

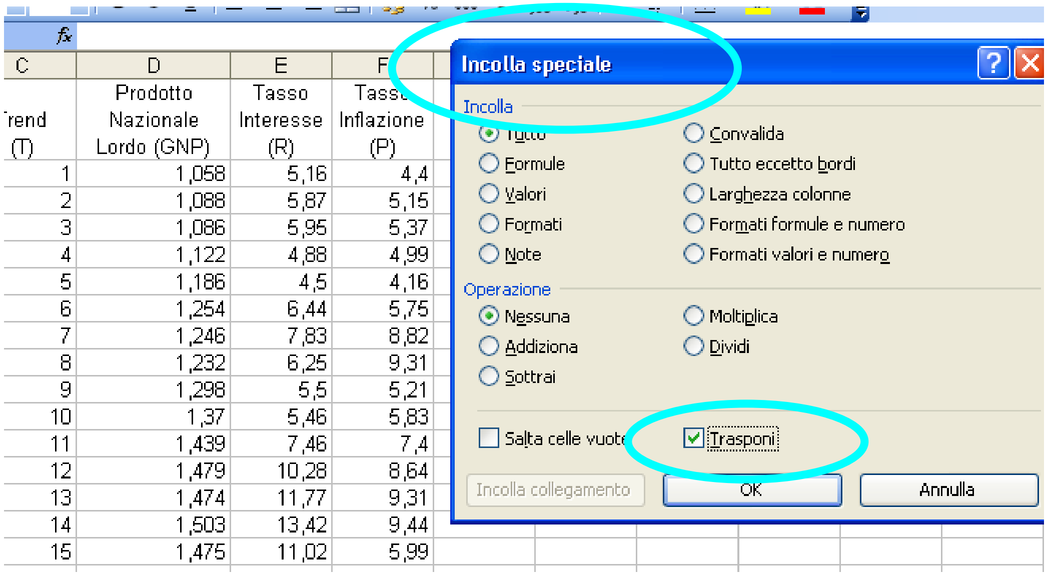
X f_x 1

	A	B	C	D	E	F
1	Investimenti Reali (Y)	Costante	Trend (T)	Prodotto Nazionale Lordo (GNP)	Tasso Interesse (R)	Tasso Inflazione (P)
2	0,161	1	1	1,058	5,16	4,4
3	0,172	1	2	1,088	5,87	5,15
4	0,158	1	3	1,086	5,95	5,37
5	0,173	1	4	1,122	4,88	4,99
6	0,195	1	5	1,186	4,5	4,16
7	0,217	1	6	1,254	6,44	5,75
8	0,199	1	7	1,246	7,83	8,82
9	0,163	1	8	1,232	6,25	9,31
10	0,195	1	9	1,298	5,5	5,21
11	0,231	1	10	1,37	5,46	5,83
12	0,257	1	11	1,439	7,46	7,4
13	0,259	1	12	1,479	10,28	8,64
14	0,225	1	13	1,474	11,77	9,31
15	0,241	1	14	1,503	13,42	9,44
16	0,204	1	15	1,475	11,02	5,99

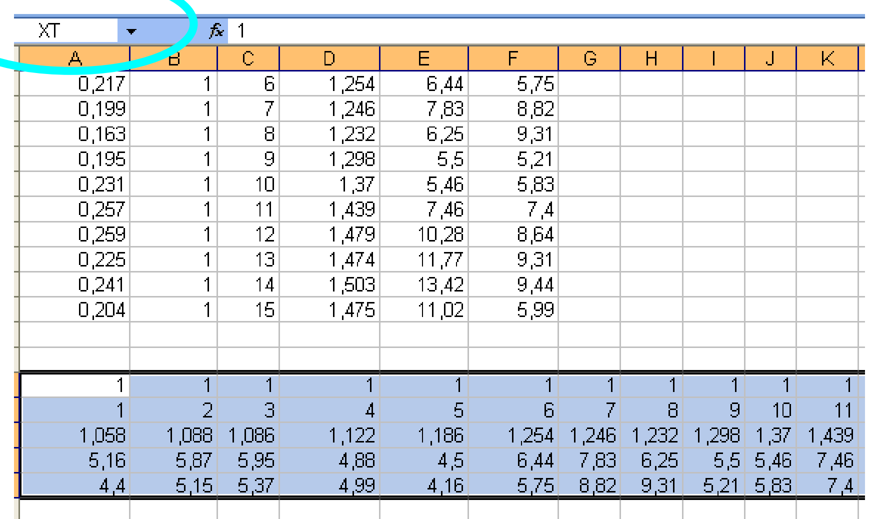
(n x p)

In questo modo sarà più semplice richiamarli nelle operazioni successive.

La regressione lineare multipla



C	D	E	F
rend (T)	Prodotto Nazionale Lordo (GNP)	Tasso Interesse (R)	Tass Inflazione (P)
1	1,058	5,16	4,4
2	1,088	5,87	5,15
3	1,086	5,95	5,37
4	1,122	4,88	4,99
5	1,186	4,5	4,16
6	1,254	6,44	5,75
7	1,246	7,83	8,82
8	1,232	6,25	9,31
9	1,298	5,5	5,21
10	1,37	5,46	5,83
11	1,439	7,46	7,4
12	1,479	10,28	8,64
13	1,474	11,77	9,31
14	1,503	13,42	9,44
15	1,475	11,02	5,99

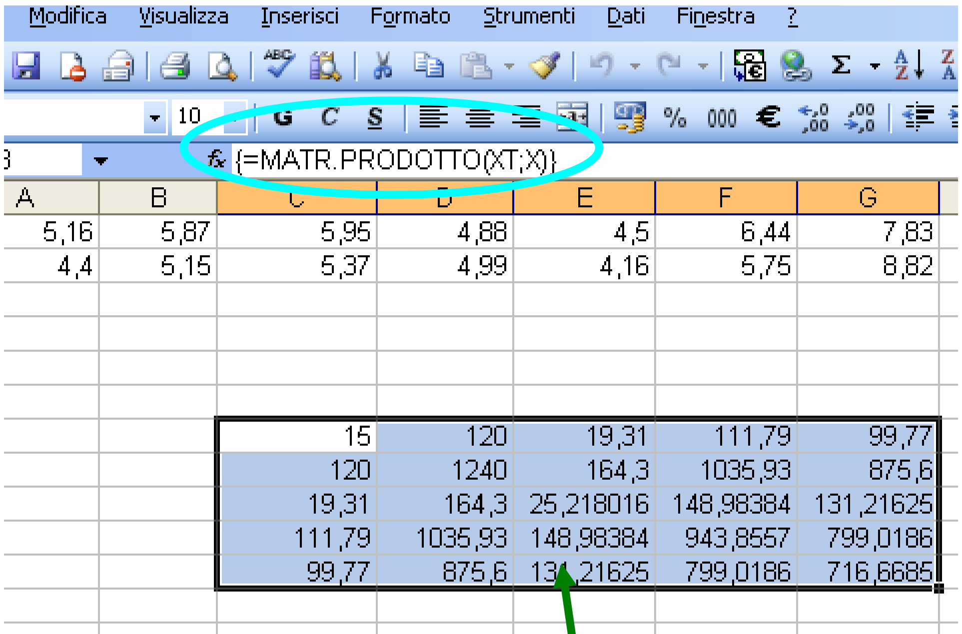


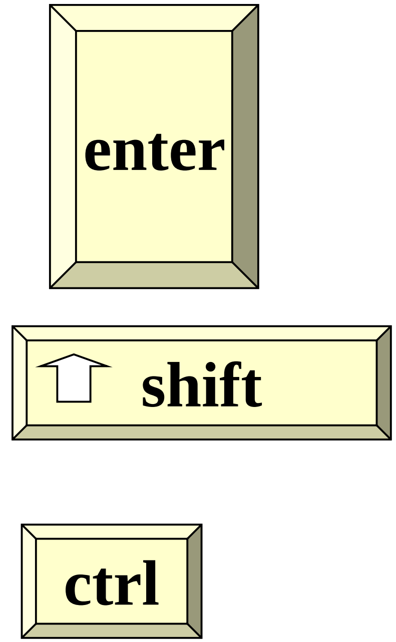
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0,217	1	6	1,254	6,44	5,75					
0,199	1	7	1,246	7,83	8,82					
0,163	1	8	1,232	6,25	9,31					
0,195	1	9	1,298	5,5	5,21					
0,231	1	10	1,37	5,46	5,83					
0,257	1	11	1,439	7,46	7,4					
0,259	1	12	1,479	10,28	8,64					
0,225	1	13	1,474	11,77	9,31					
0,241	1	14	1,503	13,42	9,44					
0,204	1	15	1,475	11,02	5,99					
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,058	1,088	1,086	1,122	1,186	1,254	1,246	1,232	1,298	1,37	1,439
5,16	5,87	5,95	4,88	4,5	6,44	7,83	6,25	5,5	5,46	7,46
4,4	5,15	5,37	4,99	4,16	5,75	8,82	9,31	5,21	5,83	7,4

Matrice Trasposta

(p x n)

La regressione lineare multipla





Da premere contemporaneamente per far eseguire il prodotto tra le matrici dopo aver selezionato l'area (IN OGNI OPERAZIONE CON LE MATRICI)

X' (p x n)

X (n x p)

(X'X) (p x p)

La regressione lineare multipla

{=MATR.INVERSA(XTX)}

B	C	D	E	F
	15	120	19,31	111,79
	120	1240	164,3	1035,93
	19,31	164,3	25,218016	148,98384
	111,79	1035,93	148,98384	943,8557
	99,77	875,6	131,21625	799,0186

MATRICE INVERSA

67,4131	2,27013867	-66,77363	0,1242029	-0,071154
2,27014	0,08624091	-2,257456	-0,006399	-0,000944
-66,7736	-2,25745557	67,094376	-0,161461	-0,050552
0,1242	-0,00639861	-0,161461	0,0329547	-0,016652
-0,07115	-0,00094438	-0,050552	-0,016652	0,0402763

$$\left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}$$

(p x p)

{=MATR.PRODOTTO(XT;y)}

	C	D	E
115	-0,00094438	-0,050552	-0,0

3,05
26,004
3,992563
23,52069
20,73158

$$\underbrace{\mathbf{X'} \quad \mathbf{y}}_{(p \times 1)}$$

(p x n) (n x 1)

(p x 1)

La regressione lineare multipla

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

J36 {=MATR.PRODOTTO(B36:F40;H36:H40)}

B	C	D	E	F	G	H	I	J	
	MATRICE INVERSA $(X'X)^{-1}$					X'y		β	
67,4131	2,27013867	-66,77363	0,1242029	-0,071154		3,05		-0,509071	Intercetta
2,27014	0,08624091	-2,257456	-0,006399	-0,000944		26,004		-0,01658	T
-66,7736	-2,25745557	67,094376	-0,161461	-0,050552	*	3,992563	=	0,6703834	GNP
0,1242	-0,00639861	-0,161461	0,0329547	-0,016652		23,52069		-0,002326	R
-0,07115	-0,00094438	-0,050552	-0,016652	0,0402763		20,73158		-9,4E-05	P

MODELLO STIMATO

$$E(y) = -0,509 - 0,017T + 0,67GNP - 0,002R - 0,00009P$$

La regressione lineare multipla

Calcolo delle osservazioni teoriche

=(H5*B2)+(H6*C2)+(H7*D2)+(H8*E2)+(H9*F2)

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Costante	Trend (T)	Prodotto Nazionale Lordo (GNP)	Tasso Interesse (R)	Tasso Inflazione (P)					Investimenti Reali (Y stimati)
1	1	1,058	5,16	4,4					=(H5*B1
1	2	1,088	5,87	5,15					0,173008
1	3	1,086	5,95	5,37		β			0,15488
1	4	1,122	4,88	4,99		-0,50907	**Intercetta**		0,164958
1	5	1,186	4,5	4,16		-0,01658	**T**		0,192244
1	6	1,254	6,44	5,75		0,670383	**GNP**		0,216588
1	7	1,246	7,83	8,82		-0,00233	**R**		0,191123
1	8	1,232	6,25	9,31		-9,4E-05	**P**		0,168786
1	9	1,298	5,5	5,21					0,198581
1	10	1,37	5,46	5,83					0,230303
1	11	1,439	7,46	7,4					0,25518
1	12	1,479	10,28	8,64					0,258739
1	13	1,474	11,77	9,31					0,235278
1	14	1,503	13,42	9,44					0,234289
1	15	1,475	11,02	5,99					0,204844

Calcolo dei residui

=C21-D21

C	D	E
Investimenti Reali (Y)	Investimenti Reali (Y stimati)	Residui
0,161	0,171199	-0,0102
0,172	0,173008	-0,00101
0,158	0,15488	0,00312
0,173	0,164958	0,008042
0,195	0,192244	0,002756
0,217	0,216588	0,000412
0,199	0,191123	0,007877
0,163	0,168786	-0,00579
0,195	0,198581	-0,00358
0,231	0,230303	0,000697
0,257	0,25518	0,00182
0,259	0,258739	0,000261
0,225	0,235278	-0,01028
0,241	0,234289	0,006711
0,204	0,204844	-0,00084

La regressione lineare multipla

LA BONTÀ DI ADATTAMENTO DEL MODELLO

Il modello stimato si adatterà tanto più alle osservazioni y_i quanto più modesta sarà la variabilità dell'errore rispetto alla variabilità totale

$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

SST = SSR + SSE

$$R^2 = \frac{devianza\ di\ regressione}{devianza\ totale} \Rightarrow R^2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}$$

***R²* corretto:** $R_c^2 = 1 - \dfrac{n-1}{n-p-1}(1 - R^2)$

Osservazioni (n=15)

Variabili (p=4)

La regressione lineare multipla

	0,199	1	7	1,246	7,83	8,82		0,171199	0,173008
	0,163	1	8	1,232	6,25	9,31			
	0,195	1	9	1,298	5,5	5,21			
	0,231	1	10	1,37	5,46	5,83			
	0,257	1	11	1,439	7,46	7,4			
	0,259	1	12	1,479	10,28	8,64		**0,636069**	$\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$
	0,225	1	13	1,474	11,77	9,31			
	0,241	1	14	1,503	13,42	9,44		**0,015903**	$\boxed{\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\bar{y}^2}$
	0,204	1	15	1,475	11,02	5,99			
$\bar{y}$	0,203333							**0,63652**	$\boxed{\mathbf{y}'\mathbf{y}}$
$\bar{y}^2$	0,041344								
$n\bar{y}^2$	**0,620167**							**0,016353**	$\boxed{\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{y}^2}$
						$R^2=\dfrac{\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\bar{y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{y}^2}$		= 0,9724	

$$R^2=\frac{\hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-n\bar{y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y}-n\bar{y}^2}$$

$$R_c^2=1-\frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2)=1-\frac{15-1}{15-5}(1-0,972)=0,9608$$

La regressione lineare multipla

L'ANALISI DELLA VARIANZA

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_q = 0$$

Non è inclusa l'intercetta, perché si ipotizza che essa sia diversa da zero.

$$F = \frac{\dfrac{SSR}{p}}{\dfrac{SSE}{n-p-1}} \sim F_{p;n-p-1}$$

$$F > F_{\alpha;p;n-p-1}$$ **Rigetto H_0**

$$F < F_{\alpha;p;n-p-1}$$ **Accetto H_0**

RICORDATE

La regressione lineare multipla

L'ANALISI DELLA VARIANZA

	Fonte	Gradi di Libertà	Media dei quadrati
Regressione (SSR)	$\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$	p	$\dfrac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}{p}$
Residua (SSE)	**e'e**	$n - p - 1$	$\dfrac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n - p - 1}$
Totale (SST)	$\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$	$n - 1$	$\dfrac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}{n-1}$

$\boxed{\text{SST = SSR + SSE}}$

La regressione lineare multipla

	Fonte di variabilità	Gradi di Libertà	Media dei quadrati
Regressione	0,015902522	4	0,003976
Residua	0,0004508	10	0,00004508
Totale	0,016353333	14	0,0011681

La regressione lineare multipla

$$F = \frac{\frac{SSR}{p}}{\frac{SSE}{n-p-1}} \sim F_{p;n-p-1}$$

$p = 4$
$n - p - 1 = 10$
$\alpha = 0,05$ (5%)

$$F = \frac{\frac{SSR}{p}}{\frac{SSE}{n-p-1}} = \frac{\frac{0,015902522}{4}}{\frac{0,0004508}{10}} = 88,190$$

$$F_{\alpha;p;n-p-1} = 3,48$$

$$F > F_{\alpha;p;n-p-1}$$

Rigetto H_0

La regressione lineare multipla

SIGNIFICATIVITA' DEI SINGOLI PARAMETRI

Si usa, comunemente, il test t.

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{s_{\beta_i}}$$

Stima (nel campione) di β_p

Standard error di β_p

?

$t > t_{\alpha/2;n-p}$ Rigetto H_0

$t < t_{\alpha/2;n-p}$ Accetto H_0

La regressione lineare multipla

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = E(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' =$$

$$= E\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\left(\sigma^2\mathbf{I}\right)\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} =$$

$$= \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

NON E' NOTA

s^2 è una stima (corretta) di σ^2

ipotesi

$$\begin{cases} E\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = 0 \\ E\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\right) = \sigma^2\mathbf{I} \end{cases}$$

La regressione lineare multipla

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}$$

$$Est.Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = s^2 (\mathbf{X'X})^{-1}$$

$$s^2 = \frac{\mathbf{e'e}}{n-p-1}$$

La radice quadrata del *p-esimo* elemento diagonale della matrice, è l'errore standard del parametro stimato.

La regressione lineare multipla

X'X

$$
\begin{vmatrix}
15 & 120 & 19{,}31 & 111{,}79 & 99{,}77 \\
120 & 1240 & 164{,}3 & 1035{,}93 & 875{,}6 \\
19{,}31 & 164{,}3 & 25{,}218 & 148{,}984 & 131{,}216 \\
111{,}79 & 1035{,}93 & 148{,}984 & 943{,}856 & 799{,}019 \\
99{,}77 & 875{,}6 & 131{,}216 & 799{,}019 & 716{,}669
\end{vmatrix}
$$

e'e = **0,00045**

$$s^2 = \frac{\mathbf{e'e}}{n-p-1}$$

s^2 **4,5E-05**

$(\mathbf{X'X})^{-1}$

$$
\begin{vmatrix}
67{,}4131 & 2{,}27014 & -66{,}7736 & 0{,}1242 & -0{,}07115 \\
2{,}27014 & 0{,}08624 & -2{,}25746 & -0{,}0064 & -0{,}00094 \\
-66{,}7736 & -2{,}25746 & 67{,}0944 & -0{,}16146 & -0{,}05055 \\
0{,}1242 & -0{,}0064 & -0{,}16146 & 0{,}03295 & -0{,}01665 \\
-0{,}07115 & -0{,}00094 & -0{,}05055 & -0{,}01665 & 0{,}04028
\end{vmatrix}
$$

$s^2(\mathbf{X'X})^{-1}$

$$
\begin{vmatrix}
\boxed{0{,}00304} & 0{,}0001 & -0{,}00301 & 5{,}6E\text{-}06 & -3{,}2077E\text{-}06 \\
0{,}0001 & \boxed{4E\text{-}06} & -0{,}0001 & -3E\text{-}07 & -4{,}2574E\text{-}08 \\
-0{,}00301 & -0{,}0001 & 0{,}00302 & -7E\text{-}06 & -2{,}2789E\text{-}06 \\
5{,}6E\text{-}06 & -3E\text{-}07 & -7{,}3E\text{-}06 & 1{,}5E\text{-}06 & -7{,}5071E\text{-}07 \\
-3{,}2E\text{-}06 & -4E\text{-}08 & -2{,}3E\text{-}06 & -8E\text{-}07 & \boxed{1{,}8157E\text{-}06}
\end{vmatrix}
$$

ERRORI STANDARD

S_{β_0}	0,05513				
S_{β_1}		0,00197			
			0,055		
$\vdots$				0,00122	
S_{β_5}					0,00135

Radice quadrata

La regressione lineare multipla

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{s_{\beta_i}}$$

	ERRORI STANDARD	$\hat{\beta}$	t
Intercetta	0,05513	-0,50907	-9,23439
T	0,00197176	-0,01658	-8,40893
GNP	0,05499721	0,67038	12,1894
R	0,00121887	-0,00233	-1,90827
P	0,00134748	-9,4E-05	-0,06977

Si confrontano con i valori tabulati della t di Student, con significatività α/2 (α) e gradi di libertà pari a (n – p).

La regressione lineare multipla

	ERRORI STANDARD	$\hat{\beta}$	t
Intercetta	0,05513	-0,50907	-9,23439
T	0,00197176	-0,01658	-8,40893
GNP	0,05499721	0,67038	12,1894
R	0,00121887	-0,00233	-1,90827 *
P	0,00134748	-9,4E-05	-0,06977 *

$$t_{\alpha/2;11} = 2,201$$

Significativamente pari a zero.

$t > t_{\alpha/2;n-p}$ **Rigetto H_0**

$t > t_{\alpha/2;n-p}$ **Accetto H_0**

RICORDATE

La regressione lineare multipla

STIMA PER INTERVALLO

$$\Pr ob\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} s_{\beta_i} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} s_{\beta_i}\right) = 1 - \alpha$$

5%

$$t_{\alpha/2;11} = 2,201$$

	Errore standard	$\hat{\beta}$	Limite inferiore	Limite superiore
Intercetta	0,05513	-0,509071	-0,632	-0,386
T	0,001971761	-0,01658	-0,021	-0,012
GNP	0,054997215	0,670383	0,548	0,793
R	0,001218868	-0,002326	-0,005	0,000
P	0,00134748	-9,4E-05	-0,003	0,003

La regressione lineare multipla

MULTICOLLINEARITÀ

$$VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

$$VIF_i \geq 10$$

Collinearità

=correlazione(a1:a15; b1:b15)

Trend (T)	Prodotto Nazionale Lordo (GNP)	Tasso Interesse (R)	Tasso Inflazione (P)
1	1,058	5,16	4,4
2	1,088	5,87	5,15
3	1,086	5,95	5,37
4	1,122	4,88	4,99
5	1,186	4,5	4,16
6	1,254	6,44	5,75
7	1,246	7,83	8,82
8	1,232	6,25	9,31
9	1,298	5,5	5,21
10	1,37	5,46	5,83
11	1,439	7,46	7,4
12	1,479	10,28	8,64
13	1,474	11,77	9,31
14	1,503	13,42	9,44
15	1,475	11,02	5,99

	Correlazioni
T e GNP	0,978627
T e R	0,804262
T e P	0,635305
GNP e R	0,803932
GNP e P	0,636165
R e P	0,723613

MATRICE DI CORRELAZIONE

	T	GNP	R	P
T	1	0,978627	0,804262	0,635305
GNP	0,978627	1	0,803932	0,636165
R	0,804262	0,803932	1	0,723613
P	0,635305	0,636165	0,723613	1

MATRICE DI CORRELAZIONE

	T	GNP	R	P
T	1	0,978627	0,804262	0,635305
GNP	0,978627	1	0,803932	0,636165
R	0,804262	0,803932	1	0,723613
P	0,635305	0,636165	0,723613	1

INVERSA MATRICE DI CORRELAZIONE

24,14745	-22,6524	-1,12663	-0,11511
-22,6524	**24,12776**	-1,01883	-0,22083
-1,12663	-1,01883	**3,648818**	-1,27643
-0,11511	-0,22083	-1,27643	**2,137261**

VIF

La regressione lineare multipla

VERIFICA DELLE IPOTESI SUI RESIDUI

Occorre verificare le note ipotesi sui residui:

- **assenza di correlazione (autocorrelazione)**
- **omoshedasticità (varianza costante)**
- **distribuzione normale**

La regressione lineare multipla

PRESENZA DI AUTOCORRELAZIONE

Test di Durbin – Watson (DW)

$$H_0 : \rho = 0$$

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} (e_i)^2}$$

= 2 assenza di autocorrelazione

< 2 autocorrelazione positiva

> 2 autocorrelazione negativa

i	Res(i)	Res(i)^2	Res (i-1)	Res(i) - Res(i-1)	(Res(i) - Res(i-1))^2
1	-0,0102	0,000104021			
2	-0,00101	1,01656E-06	-0,0102	0,009190809	8,4471E-05
3	0,00312	9,73236E-06	-0,00101	0,004127918	1,70397E-05
4	0,00804	6,46705E-05	0,00312	0,004922123	2,42273E-05
5	0,00276	7,59426E-06	0,008042	-0,005286027	2,79421E-05
6	0,00041	1,69635E-07	0,002756	-0,002343901	5,49387E-06
7	0,00788	6,20469E-05	0,000412	0,007465115	5,57279E-05
8	-0,00579	3,34796E-05	0,007877	-0,013663139	0,000186681
9	-0,00358	1,28233E-05	-0,00579	0,002205197	4,8629E-06
10	0,0007	4,85917E-07	-0,00358	0,004278036	1,83016E-05
11	0,00182	3,3141E-06	0,000697	0,001123391	1,26201E-06
12	0,00026	6,8234E-08	0,00182	-0,001559252	2,43127E-06
13	-0,01028	0,000105634	0,000261	-0,010539068	0,000111072
14	0,00671	4,50432E-05	-0,01028	0,016989278	0,000288636
15	-0,00084	7,12349E-07	0,006711	-0,007555434	5,70846E-05
SOMME		0,000450812			0,000885233
	DW =	1,96364226			

La regressione lineare multipla

OMOSCHEDASTICITÀ
Test di White

È basato sul valore del coefficiente di determinazione R^2 relativo alla regressione dei quadrati dei residui su una costante, sui quadrati dei regressori e sui loro prodotti incrociati.

$$e_i^2 = \beta_0 + \beta_1 T^2 + \beta_2 GNP^2 + \beta_3 R^2 + \beta_4 P^2 + \beta_5 (T)(GNP) + \ldots + \beta_{10} (R)(P)$$

$$H_0 : \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 \quad \forall i \qquad nR^2 \sim \chi^2_{\alpha; p-1}$$

R^2=0,765 $\quad nR^2 = 15 * 0,765 = 11,475 \quad \chi^2_{0,05;9} = 16,919$

Accetto H_0

La regressione lineare multipla

DISTRIBUZIONE NORMALE

Test di Jarque – Bera (JB)

La statistica test di JB misura la differenza dell'asimmetria e della curtosi della serie (dei residui) da quella della distribuzione normale.

$$H_0 : \varepsilon \sim N$$

Asimmetria

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e_i - \overline{e}}{\sigma}\right)^3$$

Curtosi

$$K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e_i - \overline{e}}{\sigma}\right)^4$$

$$JB = \frac{N-p}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right) \qquad JB \sim \chi^2_{\alpha;2}$$

La regressione lineare multipla

i	Res(i)
1	-0,0102
2	-0,00101
3	0,00312
4	0,00804
5	0,00276
6	0,00041
7	0,00788
8	-0,00579
9	-0,00358
10	0,0007
11	0,00182
12	0,00026
13	-0,01028
14	0,00671
15	-0,00084
Asimmetria	-0,45997
Curtosi	-0,22006

=asimmetria(a1:a15)

=curtosi(a1:a15)

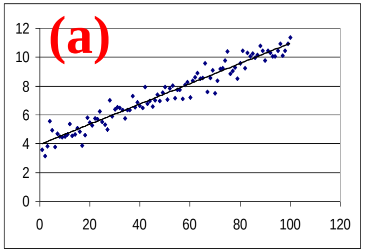
$$JB = \frac{N-p}{6}\left(S^2 + \frac{1}{4}K^2\right) \qquad JB \sim \chi^2_{\alpha;2}$$

$$JB = \frac{15-4}{6}\left((-0,46)^2 + \frac{1}{4}(-0,22)^2\right) = 0,41$$

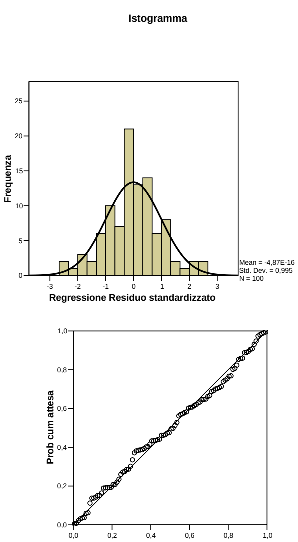
$$\chi^2_{0,05;2} = 5,991$$

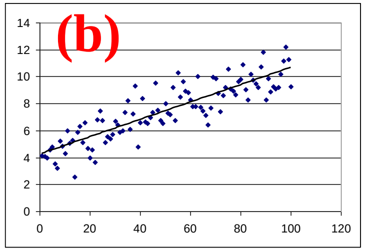
Accetto H_0

La regressione lineare semplice

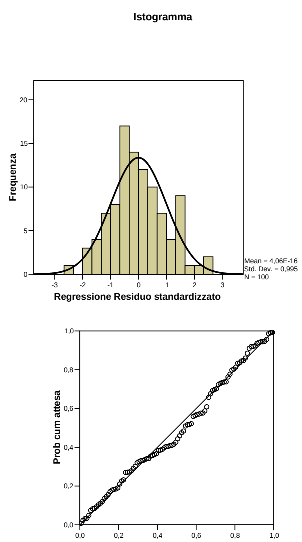


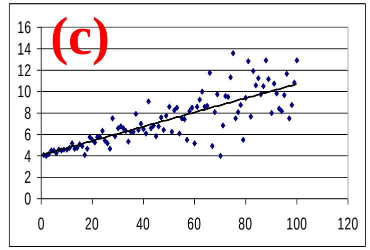
F	1524,046	0,000
a	3,920	0,000
b	0,070	0,000
R^2	0,940	
DW	2,002	



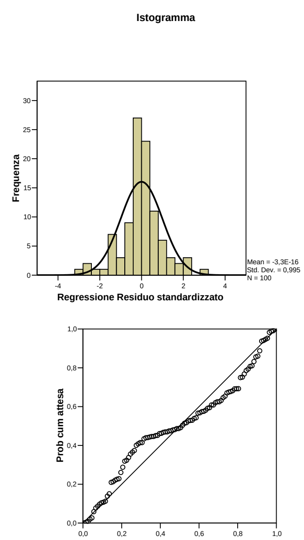


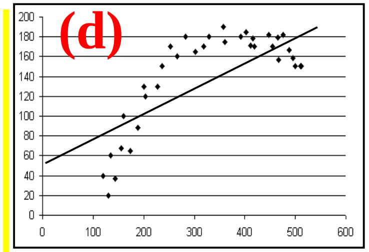
F	298,305	0,000
a	4,247	0,000
b	0,064	0,000
R^2	0,753	
DW	1,989	



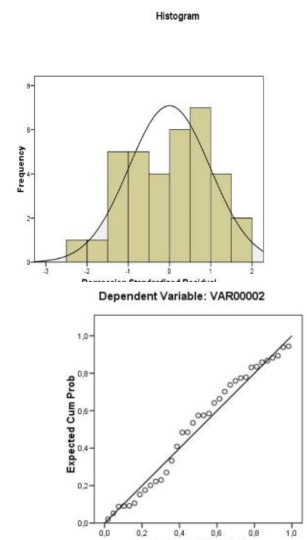


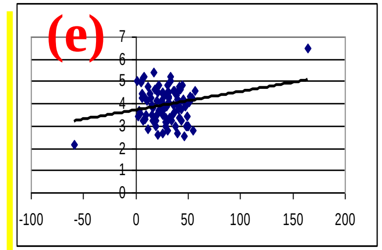
F	173,175	0,000
a	4,025	0,000
b	0,066	0,000
R^2	0,639	
DW	1,041	



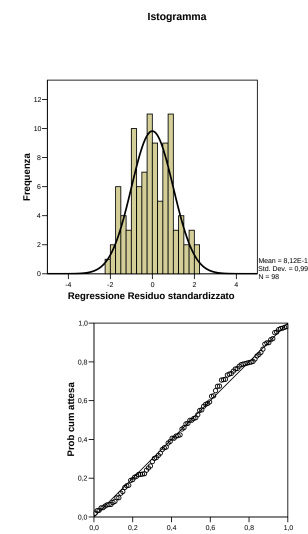


F	45,81	0,000
a	48,058	0,000
b	0,283	0,000
R^2	0,581	
DW	0,338	





F	5,797	0,018
a	3,697	0,000
b	0,008	0,038
R^2	0,057	
DW	2,001	

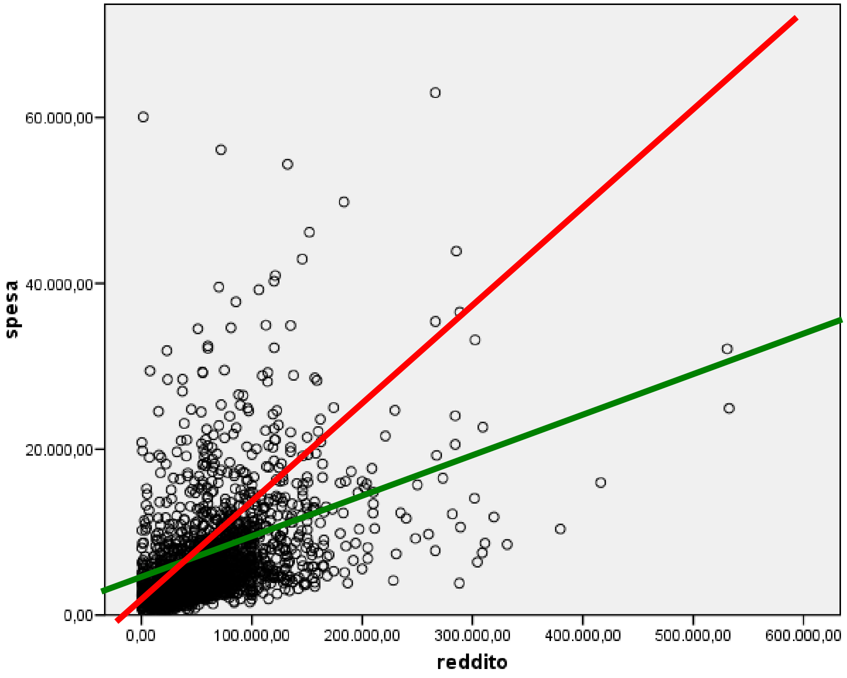


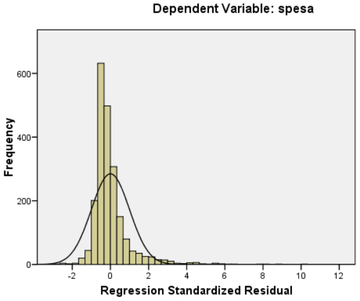
La regressione lineare: un caso di studio

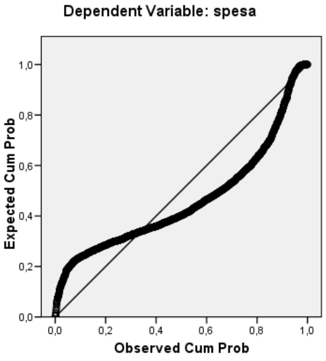
PROPENSIONE MARGINALE AL CONSUMO – COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA

*Consumi = a + b*Reddito*

CONSUMO DI SOPRAVVIVENZA PRESENTE ANCHE SE REDDITO = 0 – INTERCETTA DELLA RETTA







R^2 = 0,207

F = 558,100 0,000

a = 3065 0,000

b = 0,057 0,000

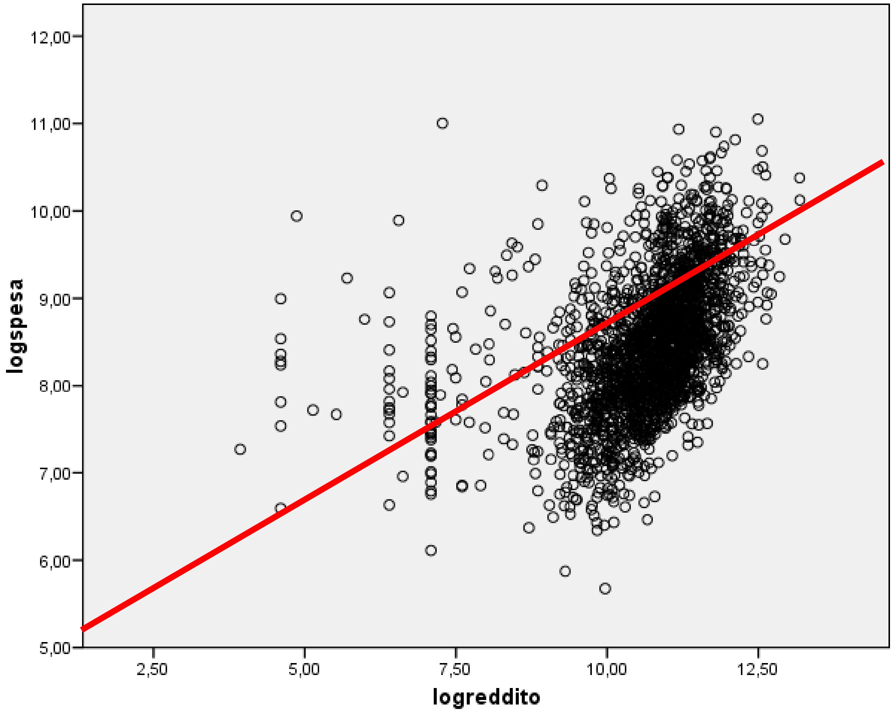
DW = 2,012

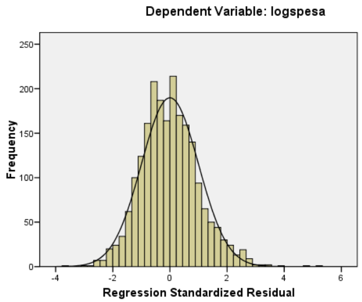
La regressione lineare: un caso di studio

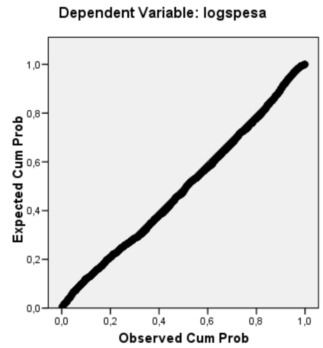
ELASTICITA' DEL CONSUMO RISPETTO AL REDDITO – COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA

*Log(Consumi) = a + b*log(Reddito)*

LOG DEL CONSUMO DI SOPRAVVIVENZA PRESENTE ANCHE SE LOG(REDDITO) = 0 – INTERCETTA DELLA RETTA







R^2 = 0,196

F = 522,445	**0,000**
a = 5,113	**0,000**
b = 0,316	**0,000**

DW = 1,931

La regressione lineare multipla: cosa cambia?

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p$$

$$R^2_{Adj} = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1 - R^2)$$

$$VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

PRINCIPIO DI PARSIMONIA: usare il minor numero possibile di variabili indipendenti

$\Rightarrow$

IMPATTO CHE OGNI VARIABILE HA SUL VALORE DI F

- **FORWARD**
- **BACKWARD**
- **STEPWISE**

La regressione lineare multipla: un esercizio

$$Log(C) = b_0 + b_1 Log(R) + b_2 qc + b_3 f + b_4 ef + b_5 em + b_6 sf + b_7 sm$$

Dove:

C	***consumi***
R	***reddito***
qc	***quota dei consumi destinato ai prodotti alimentari***
f	***numero dei figli***
ef	***età della moglie***
em	***età del marito***
sf	***anni di studio della moglie***
sm	***anni di studio del marito***

1° metodo – Enter o blocco – usare tutte le variabili

2° metodo – Forward

3° metodo – Stepwise

La regressione lineare multipla: metodo enter

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,598[a]	,357	,355	***********	1,954

a. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas, etaf

b. Dependent Variable: lspesa

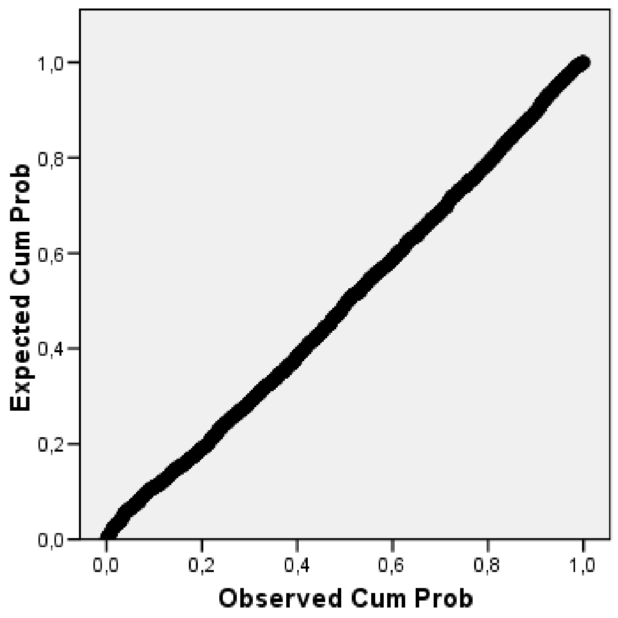
ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	469,671	7	67,096	169,223	,000[a]
	Residual	845,720	2133	,396		
	Total	1315,391	2140			

a. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas, etaf

b. Dependent Variable: lspesa

Dependent Variable: lspesa



Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics	
		B	Std. Error	Beta			Tolerance	VIF
1	(Constant)	6,526	,171		38,147	,000		
	lreddito	,186	,014	,261	13,437	,000	,802	1,248
	figli	,055	,013	,086	4,244	,000	,740	1,351
	etaf	,002	,003	,042	,770	,441	,099	10,084
	etam	-,003	,003	-,061	-1,117	,264	,100	10,012
	annistfem	,012	,004	,063	3,097	,002	,734	1,363
	annistmas	,028	,004	,147	7,134	,000	,709	1,411
	quotacibo	-2,922	,157	-,343	-18,555	,000	,881	1,136

a. Dependent Variable: lspesa

La regressione lineare multipla: metodo forward

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	quotacibo	.	Forward (Criterion: Probability-of-F-to-enter <= ,050)
2	Ireddito	.	Forward (Criterion: Probability-of-F-to-enter <= ,050)
3	annistmas	.	Forward (Criterion: Probability-of-F-to-enter <= ,050)
4	figli	.	Forward (Criterion: Probability-of-F-to-enter <= ,050)
5	annistfem	.	Forward (Criterion: Probability-of-F-to-enter <= ,050)

a. Dependent Variable: Ispesa

$$F = \frac{\dfrac{SSR}{p}}{\dfrac{SSE}{n-p-1}}$$

ANOVA[f]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	288,764	1	288,764	601,647	,000[a]
	Residual	1026,627	2139	,480		
	Total	1315,391	2140			
2	Regression	417,681	2	208,840	497,378	,000[b]
	Residual	897,710	2138	,420		
	Total	1315,391	2140			
3	Regression	452,664	3	150,888	373,754	,000[c]
	Residual	862,727	2137	,404		
	Total	1315,391	2140			
4	Regression	464,908	4	116,227	291,906	,000[d]
	Residual	850,483	2136	,398		
	Total	1315,391	2140			
5	Regression	468,973	5	93,795	236,587	,000[e]
	Residual	846,418	2135	,396		
	Total	1315,391	2140			

a. Predictors: (Constant), quotacibo

Model Summary[f]

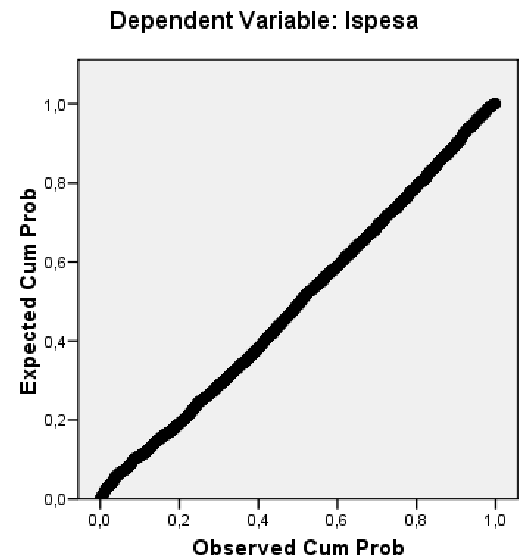
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,469[a]	,220	,219	**********	
2	,564[b]	,318	,317	**********	
3	,587[c]	,344	,343	**********	
4	,595[d]	,353	,352	**********	
5	,597[e]	,357	,355	**********	1,953

a. Predictors: (Constant), quotacibo
b. Predictors: (Constant), quotacibo, Ireddito
c. Predictors: (Constant), quotacibo, Ireddito, annistmas
d. Predictors: (Constant), quotacibo, Ireddito, annistmas, figli
e. Predictors: (Constant), quotacibo, Ireddito, annistmas, figli, annistfem
f. Dependent Variable: Ispesa

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	9,137	,031		294,585	,000
	quotacibo	-3,988	,163	-,469	-24,528	,000
2	(Constant)	6,496	,153		42,319	,000
	quotacibo	-3,118	,160	-,366	-19,488	,000
	Ireddito	,235	,013	,329	17,522	,000
3	(Constant)	6,447	,151		42,811	,000
	quotacibo	-2,915	,158	-,342	-18,405	,000
	Ireddito	,201	,014	,282	14,781	,000
	annistmas	,033	,004	,173	9,309	,000
4	(Constant)	6,480	,150		43,293	,000
	quotacibo	-2,956	,157	-,347	-18,773	,000
	Ireddito	,192	,014	,270	14,131	,000
	annistmas	,034	,004	,177	9,553	,000
	figli	,062	,011	,097	5,545	,000
5	(Constant)	6,444	,150		43,029	,000
	quotacibo	-2,929	,157	-,344	-18,611	,000
	Ireddito	,188	,014	,264	13,772	,000
	annistmas	,028	,004	,148	7,162	,000
	figli	,060	,011	,094	5,365	,000
	annistfem	,013	,004	,065	3,202	,001

a. Dependent Variable: Ispesa



La regressione lineare multipla: metodo stepwise

Variables Entered/Removed[b]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas, etaf[a]	.	Enter
2	.	etaf	Backward (criterion: Probability of F-to-remove >= ,100).
3	.	etam	Backward (criterion: Probability of F-to-remove >= ,100).

a. All requested variables entered.

b. Dependent Variable: lspesa

Model Summary[d]

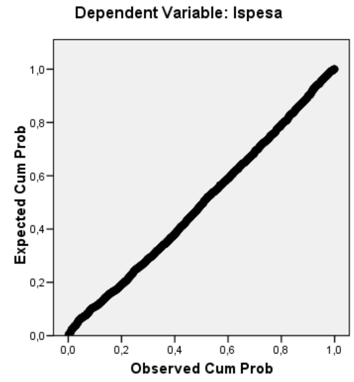
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,598[a]	,357	,355	**********	
2	,597[b]	,357	,355	**********	
3	,597[c]	,357	,355	**********	1,953

a. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas, etaf

b. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas

c. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, annistmas

d. Dependent Variable: lspesa



ANOVA[d]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	469,671	7	67,096	169,223	,000[a]
	Residual	845,720	2133	,396		
	Total	1315,391	2140			
2	Regression	469,436	6	78,239	197,366	,000[b]
	Residual	845,955	2134	,396		
	Total	1315,391	2140			
3	Regression	468,973	5	93,795	236,587	,000[c]
	Residual	846,418	2135	,396		
	Total	1315,391	2140			

a. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas, etaf

b. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, etam, annistmas

c. Predictors: (Constant), quotacibo, figli, annistfem, lreddito, annistmas

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	6,526	,171		38,147	,000
	lreddito	,186	,014	,261	13,437	,000
	figli	,055	,013	,086	4,244	,000
	etaf	,002	,003	,042	,770	,441
	etam	-,003	,003	-,061	-1,117	,264
	annistfem	,012	,004	,063	3,097	,002
	annistmas	,028	,004	,147	7,134	,000
	quotacibo	-2,922	,157	-,343	-18,555	,000
2	(Constant)	6,533	,171		38,242	,000
	lreddito	,186	,014	,261	13,443	,000
	figli	,053	,013	,084	4,179	,000
	etam	-,001	,001	-,022	-1,080	,280
	annistfem	,012	,004	,063	3,085	,002
	annistmas	,028	,004	,148	7,171	,000
	quotacibo	-2,922	,157	-,343	-18,554	,000
3	(Constant)	6,444	,150		43,029	,000
	lreddito	,188	,014	,264	13,772	,000
	figli	,060	,011	,094	5,365	,000
	annistfem	,013	,004	,065	3,202	,001
	annistmas	,028	,004	,148	7,162	,000
	quotacibo	-2,929	,157	-,344	-18,611	,000

a. Dependent Variable: lspesa