Risoluzione di sistemi lineari mediante il metodo di Gauss

Salvatore Scognamiglio

Università degli studi di Napoli "Parthenope"

Quesito

Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 10 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 18 \end{cases}.$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Dato un sistema lineare

$$\mathrm{A}\underline{x} = \underline{b}$$

il metodo di eliminazione di Gauss trasforma il sistema dato in un sistema **equivalente**

$$\mathrm{R}\underline{x} = \underline{c}$$

avente matrice dei coefficienti R triangolare superiore la cui soluzione può essere individuata piu velocemente.

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo procede per passi successivi. Si parte dal sistema

$$\begin{cases} x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 10 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & - & 11x_2 & + & 10x_3 & = & 18 \end{cases}$$

I passo: considerata la matrice completa del sistema, si annullano tutti gli elementi della I colonna al di sotto della diagonale principale.

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

$$\mathrm{A}_b = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ -1 & 6 & -5 & -8 \\ 2 & -11 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

sottraiamo:

1. alla II riga la I moltiplicata per -1 (-1=a_{21}/a_{11})
2. alla III riga la I moltiplicata per 2 (2=a_{31}/a_{11}).

Si ottiene

$$\mathrm{A}_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ (-1+1) & (6-5) & (-5+6) & (-8+10) \\ (2-2) & (-11+10) & (10-12) & (18-20) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

$$\mathrm{A}_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

II passo: si annullano tutti gli elementi della II colonna al di sotto della diagonale principale.
Sottraiamo alla III riga la II moltiplicata per -1. $(-1 = a_{32}/a_{22})$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & (-1+1) & (-2+1) & (-2+2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Le trasformazioni eseguite nei passi del metodo di Gauss non alterano il determinante della matrice dei coefficienti.
Al passo II, è possibile confrontare il rango della matrice triangolare superiore dei coefficienti

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con quello della matrice completa

$$\mathrm{A}_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

per verificare se il sistema ammette soluzioni.

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Osservando che $det(R) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \neq 0$, risulta che $r(R) = r(A_b^{(2)}) = 3$.

Si può concludere che, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette una sola soluzione (sistema compatibile e determinato).

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Inoltre, dal sistema triangolare ottenuto alla fine del II passo

$$\begin{cases} x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 10 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & - & x_3 & = & 0 \end{cases},$$

equivalente al sistema di partenza, si ricava

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 10 + 10 = 20 \end{cases}.$$

Soluzione

Pertanto, la soluzione del sistema risulta

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quesito

Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_1 - 9x_2 + 7x_3 = -5 \end{cases}.$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

I passo

$$\mathrm{A}_b = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ -1 & 8 & -5 & 2 \\ 1 & -9 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Sottraiamo:

1. alla II riga la I moltiplicata per -1 (-1=a_{21}/a_{11});
2. alla III riga la I moltiplicata per 1 (1=a_{31}/a_{11}).

Si ottiene

$$\mathrm{A}_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ (-1+1) & (8-7) & (-5+3) & (2+1) \\ (1-1) & (-9+7) & (7-3) & (-5-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

$$\mathrm{A}_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

II passo: si annullano tutti gli elementi della II colonna al di sotto della diagonale principale.
Sottraiamo alla III riga la II moltiplicata per -2. $(-2 = a_{32}/a_{22})$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & (-2+2) & (4-4) & (-6+6) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Dopo il II passo si osserva che

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathrm{A}_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo confrontare il rango di queste due matrici per verificare se il sistema ammette soluzioni.

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Risulta che $r(R) = r(A_b^{(2)}) = 2$ in quanto tutti i minori di ordine 3 sono uguali a zero (la terza riga contiene elementi tutti nulli) ed esiste almeno un minore di ordine 2 diverso da zero in entrambe le matrici. Ad esempio

$$det \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Si può concludere che, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ammette infinite soluzioni (sistema compatibile e indeterminato).

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Inoltre, dal sistema triangolare ottenuto alla fine del II passo

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 0x_3 = 0 \end{cases},$$

equivalente al sistema di partenza, si ricava:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = 3 + 2t \\ x_1 = 22 + 11t \end{cases}.$$

Soluzione

Pertanto, il sistema ammette infinite soluzioni

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 22 + 11t \\ 3 + 2t \\ t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quesito

Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

I passo:

$$\mathrm{A}_b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

sottraiamo:

1. alla II riga la I moltiplicata per 2 ($2 = a_{21}/a_{11}$);
2. alla III riga la I moltiplicata per 3 ($3 = a_{31}/a_{11}$);

Si ottiene

$$\mathrm{A}_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ (2-2) & (-5+4) & (-1-6) & (-2-10) \\ (3-3) & (-5+6) & (16-9) & (3-15) \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 1 & 7 & -12 \end{pmatrix}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

$$\mathrm{A}_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 1 & 7 & -12 \end{pmatrix}$$

II passo: si annullano tutti gli elementi della II colonna al di sotto della diagonale principale.
Sottraiamo alla III riga la II moltiplicata per -1 $(-1 = a_{32}/a_{22})$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & (1-1) & (7-7) & (-12-12) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Dopo il II passo si osserva che

$$\mathrm{R} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathrm{A}_b^{(2)} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Possiamo confrontare il rango di queste due matrici per verificare se il sistema ammette soluzioni.

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Risulta che $r(R) = 2$ in quanto tutti i minori di ordine 3 sono uguali a zero (visto che la terza riga contiene elementi tutti nulli) ed esiste almeno un minore di ordine 2 diverso da zero, ad esempio

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

La matrice completa presenta $r(A_b^{(2)}) = 3$ in quanto esiste almeno un minore di ordine 3 diverso da zero; ad esempio

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-24) = 24 \neq 0.$$

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Osservando che $r(R) \neq r(A_b^{(2)})$, si può concludere, per il teorema di Rouchè-Capelli, che il sistema non ammette soluzione (sistema incompatibile).

Risoluzione mediante Metodo di eliminazione di Gauss

Alla fine del II passo abbiamo ottenuto il sistema triangolare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad - x_2 - 7x_3 = -12 \\ \qquad\qquad 0 = -24 \end{cases}$$

equivalente al sistema di partenza. Tale sistema ovviamente non ammette soluzioni.

Soluzione

Tale sistema risulta sistema incompatibile in quanto non ammette soluzioni.