Studio di funzione

Salvatore Scognamiglio

Università degli studi di Napoli “Parthenope”

Quesito

Studiare la seguente funzione (max 6 punti):

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - e^{-1}}.$$

In particolare:

- determinare il campo di esistenza (max 2 punti);
- determinare il comportamento agli estremi del campo di esistenza (max 2 punti);
- studiare la monotonia (max 1 punto);
- disegnare il grafico della funzione (max 1 punto).

Campo di esistenza

$$E[f(x)] = \{x \in \mathcal{R} : e^x - e^{-1} \neq 0\}.$$

La condizione

$$e^x - e^{-1} \neq 0$$

risulta verificata per

$$x \neq -1$$

e quindi il campo di esistenza della funzione risulta

$$]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Comportamento agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-1}} = 1$$

la retta di equazione $y = 1$ rappresenta un asintoto orizzontale sinistro.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-1}} = 1$$

la retta di equazione $y = 1$ rappresenta un asintoto orizzontale destro.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{e^x}{e^x - e^{-1}} = \frac{e^{-1^-}}{e^{-1^-} - e^{-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{e^x}{e^x - e^{-1}} = \frac{e^{-1^+}}{e^{-1^+} - e^{-1}} = +\infty$$

la retta di equazione $x = -1$ rappresenta un asintoto verticale.

Monotonia

Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - e^{-1}}$$

la legge della derivata prima risulta

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - e^{-1}) - e^x(e^x)}{(e^x - e^{-1})^2} = \frac{e^{x^2} - e^{-1} - e^{x^2}}{(e^x - e^{-1})^2} = \frac{-e^{-1}}{(e^x - e^{-1})^2}$$

Visto che

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-e^{-1}}{(e^x - e^{-1})^2} > 0 \Leftrightarrow -e^{-1} < 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \{\emptyset\},$$

la funzione risulta strettamente decrescente in ogni punto del campo di esistenza.

Grafico della funzione

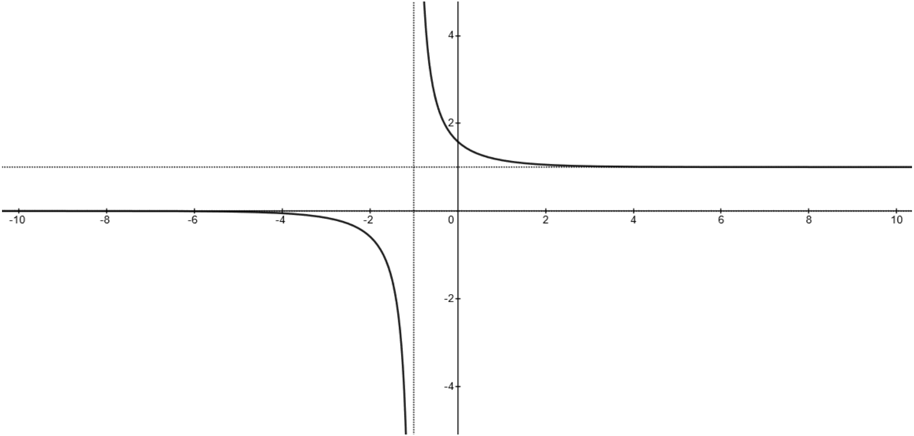

Figure: Grafico della funzione.