Integrali

Contenuto

In questo quesito si mostrano due esercizi sul calcolo di integrali, uno indefinito e uno definito.

1. Esercizio 1: integrale indefinito (punteggio 2). VAI
2. Esercizio 2: integrale definito (punteggio 3). VAI

Riferimento: capitolo XVI, pagine 383-391 del testo consigliato.

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2^x}{1+4^x}dx$$

Osserviamo che, posto $f(x) = 2^x$, si ha $f'(x) = 2^x \log 2$. Inoltre $4^x = (2^x)^2$. Possiamo allora riscrivere l'integrale nel modo seguente:

$$\int \frac{f'(x)/\log 2}{1+[f(x)]^2}dx = \frac{1}{\log 2}\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

Esercizio 1

Ricordiamo l'integrale immediato:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \text{arctg } f(x) + c, \quad c \in R.$$

Segue allora:

$$\int \frac{2^x}{1+4^x}dx = \frac{\text{arctg } 2^x}{\log 2} + c, \quad c \in R.$$

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx$$

Osserviamo che, posto $f(x) = \log x$, si ha $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Possiamo allora riscrivere l'integrale nel modo seguente:

$$\int_1^e [f(x)]^2 \cdot f(x) dx$$

Esercizio 2

Ricordando l'integrale immediato:

$$\int [f(x)]^2 \cdot f(x) dx = \frac{[f(x)]^3}{3} + c, \quad c \in R$$

troviamo una primitiva dell'integranda:

$$F(x) = \frac{\log^3 x}{3}$$

da cui segue che:

$$\int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx = F(e) - F(1) = \frac{(\log e)^3}{3} - \frac{(\log 1)^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$