

Dipendenza lineare

In questo quesito si mostrano due esempi di verifica della dipendenza lineare di un insieme di vettori. Il punteggio massimo attribuito a ciascun esercizio è 2.

- 1 Esercizio 1 VAI
- 2 Esercizio 2 VAI

Riferimento: capitolo XVII, pagine 465-467, 482 del testo consigliato.

Esercizio 1

Verificare se i vettori:

$$a_1 = (1, 2, 1)$$

$$a_2 = (3, 6, -5)$$

$$a_3 = (0, 4, 9)$$

$$a_4 = (-2, 0, 1)$$

sono linearmente indipendenti.

Tale esercizio è immediato: sono assegnati 4 vettori nello spazio tridimensionale R^3 . Dal momento che il numero di vettori è maggiore della dimensione dello spazio, i vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio 2

Verificare se i vettori:

$$a_1 = (1, 2, 1)$$

$$a_2 = (3, 6, -5)$$

sono linearmente indipendenti.

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

avente i due vettori sulle righe. Sappiamo che, per definizione, il rango di una matrice è il numero di righe e colonne linearmente indipendenti in essa. Calcoliamo allora il rango di A , $r(A)$.

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $r(A) \leq 2$; per verificare se $r(A) = 2$ calcoliamo i minori di ordine 2 di A .

Consideriamo il minore:

$$A_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

ottenuto estraendo la sottomatrice formata dalle prime due colonne di A . Dal momento che $A_1 = 0$, dobbiamo analizzare un altro minore.

Esercizio 2

Consideriamo il minore:

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

ottenuto estraendo la sottomatrice formata dalla prima e dalla terza colonna di A . Dal momento che $A_2 = -8 \neq 0$ affermiamo che $r(A) = 2$. Ciò significa che nella matrice vi sono 2 vettori linearmente indipendenti; in particolare, lo sono le righe di A .

I vettori assegnati sono linearmente indipendenti.