Sistemi di equazioni lineari

Contenuto

In questo quesito si mostrano tre esempi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari di tre equazioni in tre incognite con il metodo di eliminazione di Gauss. L'esercizio si articola in diversi passi, ciascuno propedeutico al successivo, che vanno quindi svolti nell'ordine indicato. Di seguito si illustra la valutazione attribuita all'esercizio, in dipendenza dei punti svolti. Il punteggio va inteso in senso cumulato: ad esempio, se si svolge l'esercizio fino al calolo delle soluzioni, all'esercizio si attribuisce punteggio 3. Il punteggio massimo è 4.

1. Riduzione del sistema in forma triangolare (punteggio 2).
2. Calcolo delle soluzioni (punteggio 1).
3. Calcolo del rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa del sistema (punteggio 1).

Riferimento: capitolo XVII del testo consigliato, pagina 446-460, 467-476, 488.

Esercizio 1

Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

1. Riduzione del sistema in forma triangolare. VAI
2. Calcolo delle soluzioni. VAI
3. Calcolo del rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa del sistema e analisi della dipendenza lineare tra le equazioni. VAI

Riduzione

I passo: considerata la matrice completa del sistema, si annullano tutti gli elementi della I colonna al di sotto della diagonale principale.

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

sottraiamo:

1. alla II riga la I;
2. alla III riga la I moltiplicata per 2 ($2 = a_{31}/a_{11}$).

Riduzione

Si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_b^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ (1-1) & (-1-1) & (-1-1) & (2-2) \\ (2-2) & (-1-2) & (1-2) & (6-4) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Riduzione

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Riduzione

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

II passo: si annullano tutti gli elementi della II colonna al di sotto della diagonale principale.
Sottraiamo alla III riga la II moltiplicata per 3/2. $(3/2 = a_{32}/a_{22})$.
Si ottiene

$$\begin{aligned} A_b^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & (-3 + \frac{3}{2} \cdot 2) & (-1 + \frac{3}{2} \cdot 2) & (2 - \frac{3}{2} \cdot 0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riduzione

Alla fine del II passo abbiamo ottenuto il sistema triangolare:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

equivalente al sistema di partenza.

Calcolo delle soluzioni

Applichiamo il metodo di sostituzione all'indietro al sistema triangolare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{-2x_3}{2} = \frac{2 \cdot 1}{-2} = -1 \\ x_1 = -x_2 - x_3 + 2 = 1 - 1 + 2 = 2 \end{cases}$$

La soluzione è $\quad \underline{x} = (2, -1, 1)^T$.

Rango e dipendenza lineare

Ricordiamo che la matrice completa del sistema ridotto ha lo stesso rango di quella di partenza. Analizziamo quindi la matrice trasformata:

$$A_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice formata dalle prime 3 colonne è la matrice dei coefficienti; essa è quadrata di ordine 3, triangolare superiore, quindi il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale: $det(A_b^{(2)}) = 1 \cdot -2 \cdot 2 = -4 \neq 0$ pertanto la matrice ha rango massimo uguale a 3.

Osserviamo che quanto trovato è coerente con il Teorema di Rouchè-Capelli, in base al quale un sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango. In particolare, se il rango assume valore massimo il sistema è determinato.
Nel nostro caso $r(A) = 3 = r(A_b)$.

Esercizio 2

Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

1. Riduzione del sistema in forma triangolare. VAI
2. Calcolo delle soluzioni. VAI
3. Calcolo del rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa del sistema e analisi della dipendenza lineare tra le equazioni. VAI

Riduzione

I passo:

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

sottraiamo:

1. alla II riga la I moltiplicata per 2 ($2 = a_{21}/a_{11}$);
2. alla III riga la I ($1 = a_{31}/a_{11}$.)

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ (2-2) & (3+2) & (-2+2) & (11-6) \\ (1-1) & (4+1) & (-1+1) & (8-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riduzione

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

II passo: si annullano tutti gli elementi della II colonna al di sotto della diagonale principale.
Sottraiamo alla III riga la II moltiplicata per 1. $(1 = a_{32}/a_{22})$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & (5-5) & (0-0) & (5-5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riduzione

Alla fine del II passo abbiamo ottenuto il sistema triangolare:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & & 5x_2 & & & = & 5 \end{array}\right.$$

equivalente al sistema di partenza.

Calcolo delle soluzioni

L'insieme delle soluzioni può essere espresso in forma parametrica ponendo $x_3 = t$, con $t \in R$; applichiamo il metodo di sostituzione all'indietro:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_2 = 5 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = \frac{5}{5} = 1 \\ x_1 = x_2 + x_3 + 3 = 1 + t + 3 = t + 4 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è $\underline{x} = (t+4, 1, t)^T,\ t \in R$.

Rango e dipendenza lineare

Ricordiamo che la matrice completa del sistema ridotto ha lo stesso rango di quella di partenza. Analizziamo quindi la matrice trasformata:

$$A_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dal momento che la terza riga è nulla, tutti i minori di ordine 3 sono nulli; il rango è minore o ugiale di 2. La sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, quindi la matrice ha rango 2. Due righe solo linearmente indipendenti.

Rango e dipendenza lineare

Osserviamo che quanto trovato è coerente con il Teorema di Rouchè-Capelli, in base al quale un sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango. In particolare, se il rango non assume valore massimo il sistema è indeterminato.
Nel nostro caso $r(A) = 2 = r(A_b)$, il valore massimo del rango è 3.

Esercizio 3

Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

1. Riduzione del sistema in forma triangolare. VAI
2. Calcolo delle soluzioni. VAI
3. Calcolo del rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa del sistema e analisi della dipendenza lineare tra le equazioni. VAI

Riduzione

I passo:

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

sottraiamo:

1. alla II riga la I moltiplicata per 2 ($2 = a_{21}/a_{11}$);
2. alla III riga la I ($1 = a_{31}/a_{11}$.)

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ (2-2) & (3+2) & (-2+2) & (11-6) \\ (1-1) & (4+1) & (-1+1) & (5-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riduzione

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

II passo: si annullano tutti gli elementi della II colonna al di sotto della diagonale principale.
Sottraiamo alla III riga la II moltiplicata per 1. $(1 = a_{32}/a_{22})$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_b^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & (5-5) & (0-0) & (2-5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Riduzione

Alla fine del II passo abbiamo ottenuto il sistema triangolare:

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & & 5x_2 & & & = & 5 \\ & & & & 0 & = & -3 \end{cases}$$

equivalente al sistema di partenza.

Calcolo delle soluzioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_2 = 5 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

La terza equazione mostra che il sistema è incompatibile.

Rango e dipendenza lineare

Ricordiamo che la matrice completa del sistema ridotto ha lo stesso rango di quella di partenza. Analizziamo quindi la matrice trasformata:

$$A_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti, individuata dalla prime tre colonne, ha rango 2, poiché ha una riga nulla e la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero.

Rango e dipendenza lineare

La sottomatrice della matrice completa formata dalla prima, seconda e quarta colonna:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ha determinante $1 \cdot 5 \cdot -3 = -15 \neq 0$ quindi la matrice completa del sistema ha rango 3. Ne consegue che le righe sono linearmente indipendenti.

Rango e dipendenza lineare

Osserviamo che quanto trovato è coerente con il Teorema di Rouchè-Capelli, in base al quale un sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.
Nel nostro caso $r(A) = 2 < 3 = r(A_b)$.