Ricerca di massimo e minimo assoluto

Contenuto

In questo quesito si mostrano due esempi di ricerca di estremi assoluti di una funzione. Il supporto teorico è il Teorema di Weierstrass. Gli esercizi si articolano in diversi passi, ciascuno propedeutico al successivo, che vanno quindi svolti nell'ordine indicato. Di seguito si illustra la valutazione attribuita a ogni esercizio, in dipendenza dei punti svolti. Il punteggio va inteso in senso cumulato: ad esempio, se si svolge l'esercizio fino all'individuazione dei punti "candidati" a essere punti di massimo e minimo assoluto, all'esercizio si attribuisce punteggio 3. Il punteggio massimo è 4.

Contenuto

1. Determinazione del campo di esistenza della funzione e verifica dell'applicabilità del Teorema di Weierstrass (punteggio 2).
2. Individuazione dei punti "candidati" a essere punti di massimo e minimo assoluto (punteggio 1).
3. Calcolo di massimo e minimo assoluto (punteggio 1).

Riferimento: capitolo X, pagina 236.

Teorema di Weierstrass

Se f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora:

$$\exists m = \min f, \ \exists M = \max f \Rightarrow$$

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b].$$

Di conseguenza esistono almeno:

1. un punto di minimo $x_m \in [a, b]$, $f(x_m) = m$;
2. un punto di massimo $x_M \in [a, b]$, $f(x_M) = M$.

Ricerca di massimo e minimo assoluto

Consideriamo una funzione definita in un intervallo, o, più in generale, in un insieme formato dall'unione di intervalli; supponiamo che essa derivabile in tutto il suo dominio, ad eccezione al più di un insieme finito di punti. I punti di minimo e massimo devono essere localizzati:

- agli estremi degli intervalli che compongono il dominio di f;
- nei punti di minimo e massimo relativo in cui
  - la funzione è derivabile e la derivata è nulla;
  - la funzione non è derivabile.

Ricerca di massimo e minimo assoluto

Quindi i passi da compiere sono:

1. valutazione della funzione negli estremi del dominio o del campo di esistenza;
2. calcolo della derivata
    1. ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in tali punti.
    2. individuazione dei punti in cui non esiste la derivata e valutazione della funzione in tali punti.

Il massimo e il minimo della funzione, se esistono, sono dati, rispettivamente, dal massimo e dal minimo dei valori calcolati.

Esercizi

1. Esercizio 1 VAI
2. Esercizio 2 VAI

Esercizio 1

Verifichiamo se esistono il massimo e il minimo della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log^2 x}$ e, in caso affermativo, calcoliamoli.

1. Determinazione del campo di esistenza e verifica dell'applicabilità del Teorema di Weierstrass. VAI
2. Ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in tali punti.VAI
3. Individuazione dei punti in cui non esiste la derivata e valutazione della funzione in tali punti.VAI
4. Calcolo di massimo, punti di massimo, minimo, punti di minimo. VAI

Applicabilità del Teorema di Weierstrass

$$f(x)=\sqrt{1-\log^2 x}\Longrightarrow\begin{cases}x>0\\ 1-\log^2 x\geq 0\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0\\ -1\leq \log x\leq 1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x>0\\ \frac{1}{e}\leq x\leq e\end{cases}$$

Quindi:

$$E[f]=\left[\frac{1}{e},e\right]$$

La funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass è dotata di estremi assoluti.
I valori negli estremi del campo di esistenza sono:

$$y_1=f(1/e)=1-\log^2 e^{-1}=1-(-1)^2=0$$
$$y_2=f(e)=1-\log^2 e=1-1=0$$

Valutazione negli zeri della derivata

$f(x) = \sqrt{1 - \log^2 x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\log^2 x}} \cdot (-2\log x) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$

quindi $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \log x = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$

Il valore della funzione nello zero della derivata prima è:

$$y_3 = f(1) = 1 - \log^2 1 = 1 - 0 = 1$$

Punti in cui la funzione non è derivabile

$$f'(x) = -\frac{\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$$

Dal momento che $0 \notin E[f]$, gli unici valori in cui la funzione è continua e non derivabile sono gli estremi del campo di esistenza, che annullano il denominatore. Tali valori sono già stati considerati.

Calcolo degli estremi

Il massimo e il minimo della funzione sono, rispettivamente, il massimo e il minimo dell'insieme:

$$\{y_1, y_2, y_3\} = \{0, 1\}$$

quindi:

- il minimo m della funzione è 0, i punti di minimo sono gli elementi della sua controimmagine $\{\frac{1}{e}, e\}$
- il massimo M della funzione è 1, il punto di massimo è l'unico elemento della sua controimmagine $\{1\}$

Esercizio 2

Verifichiamo se esistono il massimo e il minimo della funzione $f(x) = 2^{\sqrt{9-x^2}} + 1$ e, in caso affermativo, calcoliamoli.

1. Determinazione del campo di esistenza e verifica dell'applicabilità del Teorema di Weierstrass. VAI
2. Ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in tali punti.VAI
3. Individuazione dei punti in cui non esiste la derivata e valutazione della funzione in tali punti.VAI
4. Calcolo di massimo, punti di massimo, minimo, punti di minimo. VAI

Applicabilità del Teorema di Weierstrass

$$f(x) = 2^{\sqrt{9-x^2}} + 1 \Longrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Quindi:

$$E[f] = [-3, 3]$$

La funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass è dotata di estremi assoluti.
La funzione è pari, quindi i valori negli estremi del campo di esistenza coincidono:

$$y_1 = f(-3) = f(3) = 2^{\sqrt{9-3^2}} + 1 = 2^0 + 1 = 2$$

Valutazione negli zeri della derivata

$f(x) = 2^{\sqrt{9-x^2}} + 1 \Longrightarrow f'(x) = 2^{\sqrt{9-x^2}} \cdot \log 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) =$
$-\frac{\log 2 \cdot x \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}}{\sqrt{9-x^2}}$

quindi $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Il valore della funzione nello zero della derivata prima è:

$$y_2 = f(0) = 2^{\sqrt{9-0}} + 1 = 2^3 + 1 = 9$$

Punti in cui la funzione non è derivabile

$$f'(x) = -\frac{\log 2 \cdot x \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}}{\sqrt{9-x^2}}$$

Gli unici valori in cui la funzione è continua e non derivabile sono gli estremi del campo di esistenza, che annullano il denominatore. Tali valori sono già stati considerati.

Calcolo degli estremi

Il massimo e il minimo della funzione sono, rispettivamente, il massimo e il minimo dell'insieme:

$$\{y_1, y_2\} = \{2, 9\}$$

quindi:

- il minimo m della funzione è 2, i punti di minimo sono gli elementi della sua controimmagine $\{3, 3\}$
- il massimo M della funzione è 9, il punto di massimo è l'unico elemento della sua controimmagine $\{0\}$