Funzioni di più variabili

Contenuto

In questo quesito si mostrano quattro esempi di esercizi sulle funzioni di più variabili. Gli esercizi, per i quali viene indicato il relativo punteggio, riguardano:

- la determinazione del dominio (punteggio 2) VAI
- il calcolo di curve di livello (punteggio 2) VAI
- il calcolo di derivate parziali (punteggio 2) VAI
- la ricerca di punti di estremo locale (punteggio 3) VAI

Riferimento: captolo XV del testo consigliato.

Esercizio 1: dominio

Individuare il dominio della funzione:

$$f : (x, y) \in D \Rightarrow \sqrt{x^2 - y} \in R.$$

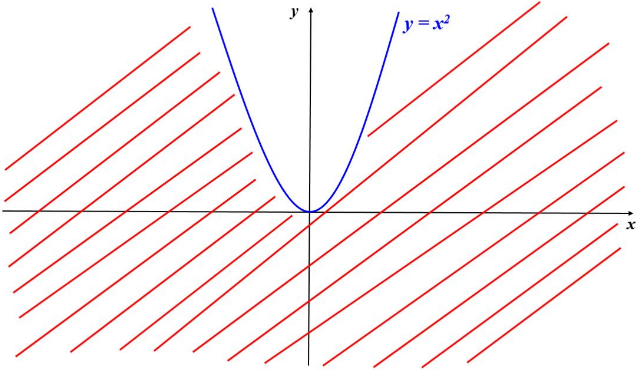
Il dominio è l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$x^2 - y \geq 0 \Longleftarrow y \leq x^2.$$

La seconda scrittura mette in evidenza che nel piano cartesiano il dominio è rappresentato dalla regione che si trova al di sotto del grafico della funzione potenza di esponente 2.

Esercizio 1: dominio

Graficamente, l'insieme D corrisponde alla regione evidenziata in rosso, comprensiva del grafico della funzione:



Esercizio 2: curve di livello

Individuare le curve di livello della funzione:

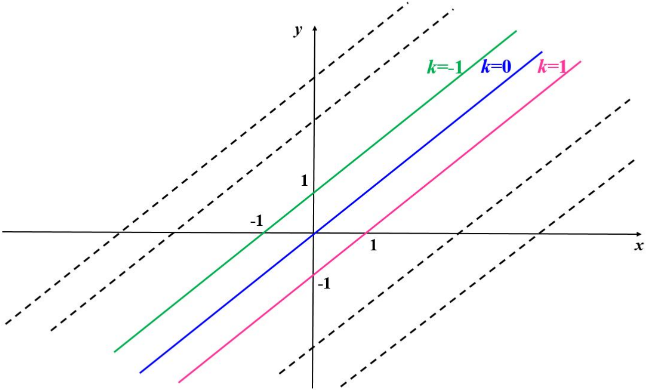
$$f : (x, y) \in D \Rightarrow x - y \in R.$$

Il dominio è $D = R^2$. Le curve di livello hanno equazione:

$$x - y = k \Longleftrightarrow y = x - k, \ k \in R.$$

La seconda scrittura mette in evidenza che nel piano cartesiano le curve di livello sono gli elementi del fascio di rette parallele alla bisettrice di I e III quadrante.

Graficamente:



Esercizio 3: derivate parziali

Calcolare le derivate parziali prime della funzione definita dalla legge:

$$f(x, y) = \log(4x^2 + 5xy) + x^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. Derivata rispetto a x VAI
2. Derivata rispetto a y VAI

Derivata rispetto a x

$$f(x,y) = \log(4x^2 + 5xy) + x^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\log(4x^2+5xy) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2)\cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{\sqrt{x^2+y^2}}) = \\
&= \frac{8x+5y}{4x^2+5xy} + 2xe^{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2e^{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\
&= \frac{8x+5y}{4x^2+5xy} + 2xe^{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^3e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Derivata rispetto a y

$$f(x,y) = \log(4x^2 + 5xy) + x^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\log(4x^2 + 5xy) + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} e^{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \frac{5x}{4x^2 + 5xy} + x^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \frac{5x}{4x^2 + 5xy} + \frac{x^2 y \; e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Esercizio 4: estremi locali

Calcolare i punti di estremo locale della funzione definita dalla legge:

$$f(x, y) = x^2 + x^2 - xy + y^2.$$

1. Punti critici VAI
2. classificazione dei punti critici VAI

Punti critici

$$f(x,y) = x^2 + x^2 - xy + y^2$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - y \\ f_y(x,y) &= -x + 2y \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} \;\;2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo facilmente che l'unico punto critico è $P_0(0,0)$.

Classificazione dei punti critici

Ricordiamo il seguente teorema:

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto in cui si annullano le derivate parziali di $f(x, y)$. Posto $H(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y)$, valgono le seguenti implicazioni:

- $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$ è un punto di minimo relativo;
- $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un punto di massimo relativo;
- $H(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$ è un **punto di sella**.

Classificazione dei punti critici

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - y \\ f_y(x,y) &= -x + 2y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &f_{xx}(x,y) = 2 \\ &f_{yy}(x,y) = 2 \\ &f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$H(x,y) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} H(0,0) &= 3 > 0 \\ f_{xx}(0,0) &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Ciò implica che P_0 è punto di minimo relativo.