Calcolo di limiti

Contenuto

In questo quesito si mostrano due esempi di calolo di limiti di funzione. Gli esercizi proposti sono svolti anche con l'ausilio della teoria sugli infiniti e infinitesimi.
Il punteggio massimo attribuito a ciascun esercizio è 3.

1. Esercizio 1 VAI
2. Esercizio 2 VAI

Riferimento: capitolo VIII, pagine 177-188, capitolo XI del testo consigliato.

Esercizio 1

Calcolare il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, con:

$$f(x) = \log\left[\left(\frac{5}{x}+1\right)^x\right] + \frac{\sqrt{x^5+3x^2}}{\sqrt[3]{4x^9+2x}}$$

Si ha $f = f_1 + f_2$, con:

$$f_1(x) = \log\left[\left(\frac{5}{x}+1\right)^x\right], \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{x^5+3x^2}}{\sqrt[3]{4x^9+2x}}$$

Sappiamo che il limite di una somma si può calcolare coma somma dei limiti, fatta eccezione per i casi che portino a una forma indeterminata.

Calcolo del $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$

Nel calcolo del $\lim_{x\to+\infty} \log\left[\left(\frac{5}{x}+1\right)^x\right]$ incontriamo la forma indeterminata $1^{+\infty}$ nell'argomento della logaritmica. Ricordiamo il limite notevole:

$$\lim_{y\to+\infty} \log\left[\left(\frac{1}{y}+1\right)^y\right] = e$$

Abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left[\left(\frac{5}{x}+1\right)^x\right] = \lim_{x\to+\infty} \log\left[\left(\frac{5}{x}+1\right)^{x/5}\right]^5$$

Calcolo del $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$

Con la sostituzione $y = \frac{1}{5}x$ riscriviamo il limite nella forma seguente:

$$\lim_{y \to +\infty} \log \left[\left(\frac{1}{y} + 1 \right)^y \right]^5 = \log e^5 = 5$$

per il Teorema sui limiti di funzioni composte e per la continuità della funzione logaritmica.

Calcolo del $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$

Il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^2}}{\sqrt[3]{4x^9+2x}}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Confrontiamo gli ordini di infinito di numeratore e denominatore:

Numeratore: il radicando è un somma di infiniti di ordine diverso, pertanto esso è equivalente al termine di ordine maggiore x^5; quindi, il numeratore ha ordine $5/2$.

Denominatore: il radicando è un somma di infiniti di ordine diverso, pertanto esso è equivalente al termine di ordine maggiore $4x^9$; quindi, il denominatore ha ordine 9.

Dal momento che l'ordine del denominatore è maggiore dell'ordine del numeratore, il limite vale 0.

Esercizio 1

Segue allora che:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left[\left(\frac{5}{x}+1\right)^x\right]+\frac{\sqrt{x^5+3x^2}}{\sqrt[3]{4x^9+2x}}\right\}=5+0=5$$

Esercizio 2

Calcolare il $\lim_{x \to 0} f(x)$, con:

$$f(x) = \frac{\log(2x+1) + x^3 + 3x^2}{e^{3x} - 1}$$

Si ha $f = \frac{f_1}{f_2}$, con:

$$f_1(x) = \log(2x+1) + x^3 + 3x^2, \quad f_2(x) = e^{3x} - 1$$

Sappiamo che il limite di un rapporto si può calcolare coma rapporto dei limiti, fatta eccezione per i casi che portino a una forma indeterminata.

Esercizio 2

Abbiamo che:

$$\lim_{x\to 0}[\log(2x+1)+x^3+3x^2]=0$$
$$\lim_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$$

quindi il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Confrontiamo gli ordini di infinitesimo di numeratore e denominatore.

Ordine di infinitesimo di f_1 e infinitesimo campione equivalente

$f_1(x) = \log(2x+1) + x^3 + 3x^2$ è somma di infinitesimi di ordine diverso, rispettivamente $1, 2, 3$. Il primo termine ha ordine 1 in virtù del limite notevole:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1$$

La somma di infinitesimi di ordine diverso è equivalente al termine di ordine minimo $\log(2x) + 1$, quindi ha ordine 1 e l'infinitesimo campione equivalente ad esso è $2x$.

Ordine di infinitesimo di f_2 e infinitesimo campione equivalente

$f_2(x) = e^{3x} - 1$ è un infinitesimo di ordine 1 in virtù del limite notevole:

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

e l'infinitesimo campione equivalente ad esso è $3x$.

Esercizio 2

La funzione

$$f(x) = \frac{\log(2x+1) + x^3 + 3x^2}{e^{3x} - 1}$$

è rapporto di infinitesimi dello stesso ordine; il limite allora è dato dal limite del rapporto degli infinitesimi campione equivalenti a numeratore e denominatore rispettivamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(2x+1) + x^3 + 3x^2}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$