Studio di funzione

Contenuto

In questo quesito si mostra un esempio di studio di funzione. Lo studio, finalizzato alla rappresentazione del grafico, si articola in diversi passi che vanno svolti nell'ordine indicato. Di seguito si illustra la valutaziuone attribuita all'esercizio, in dipendenza dei punti svolti. Il punteggio va inteso in senso cumulato: ad esempio, se si svolge l'esercizio fino all'analisi della monotonia, all'esercizio si attribuisce punteggio 4. Il punteggio massimo è 6.

1. Determinazione del campo di esistenza della funzione (punteggio 2).
2. Analisi del comportamento della funzione agli estremi degli intervalli che costituiscono il campo di esistenza (punteggio 3).
3. Monotonia; punti di massimo e minimo relativi (punteggio 4).
4. Convessità; punti di flesso (punteggio 5).
5. Rappresentazione del grafico (punteggio 6).

Esercizio

Rappresentare il grafico della funzione definita dalla legge:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

1. Determinazione del campo di esistenza $E[f(x)]$ di $f(x)$. VAI
2. Analisi del comportamento della funzione agli estremi degli eventuali intervalli che costituiscono il campo di esistenza. VAI
3. Monotonia della funzione; eventuali punti di massimo e minimo relativi. VAI
4. Convessità; punti di flesso. VAI
5. Rappresentazione del grafico. VAI

Campo di esistenza

La funzione è definita come rapporto tra due funzioni, pertanto il campo di esistenza (CDE) di f risulta dall'intersezione dei campi di esistenza di numeratore e denominatore, a cui si aggiunge la condizione che il denominatore sia non nullo.

Numeratore: $e^{\frac{1}{x}}$ è composta dall'esponenziale, definita in $]-\infty, +\infty[$ e $\frac{1}{x}$, definita in $\mathcal{R}-\{0\}$

Denominatore: x, definita in $]-\infty, +\infty[$; dobbiamo escludere $x=0$

quindi, il CDE della funzione è:

$$E[f(x)] = \mathcal{R}-\{0\}.$$

Comportamento agli estremi

L'analisi del comportamento di una funzione agli estremi del suo CDE richiede generalmente il calcolo di limiti. Risulta utile riscrivere il CDE come unione di intervalli:

$$E[f(x)] =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

Questa scrittura mette in evidenza i quattro limiti da calcolare:

1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{-\infty}}}{-\infty} = \dfrac{e^0}{-\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

   $\Longrightarrow y = 0$ asintoto orizzontale sinistro.

Comportamento agli estremi

2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{e^{\frac{1}{0^-}}}{0^-} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0}$ rapporto tra infinitesimi; confrontiamo i rispettivi ordini.

   - Il numeratore ha ordine "arbitrariamente grande"
   - il denominatore ha ordine 1

   quindi l'ordine di infinitesimo del numeratore è maggiore dell'ordine di infinitesimo del denominatore

   $\Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$

Comportamento agli estremi

3. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{0^+}}}{0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{+\infty}}{0} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$

   $\Longrightarrow x = 0$ asintoto verticale destro.

4. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^0}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$;

   $\Longrightarrow y = 0$ asintoto orizzontale destro.

Monotonia ed estremi relativi

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x} - 1\right)}{x^2}$$

Per determinare la monotonia della funzione, studiamo il segno della derivata; osserviamo che $e^{\frac{1}{x}}, x^2 > 0 \; \forall x \in E[f]$, quindi:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{x} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \\ f'(x) &< 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \text{ e } x > 0 \\ f'(x) &= 0 \text{ per } x = -1 \end{aligned}$$

Abbiamo allora:

$f(x)$ strettamente crescente per $x \in]-1, 0[$;

$f(x)$ strettamente decrescente per $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$;
$x_m = -1$ punto di minimo relativo, minimo relativo
$f(-1) = -\frac{1}{e} \simeq -0.37$.

Convessità e punti di flesso

Calcoliamo la derivata seconda della funzione; a tale scopo, conviene riscrivere la derivata prima nel modo seguente:

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x+1}{x^3} \right)$$

Abbiamo:

$$f''(x) = -e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{x+1}{x^3} \right) - e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^3 - 3x^2(x+1)}{x^6} \right)$$

da cui (omettendo semplici passaggi algebrici):

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x^2 + 4x + 1}{x^5} \right)$$

Convessità e punti di flesso

Per determinare la convessità della funzione, studiamo il segno della derivata seconda:

Numeratore: $2x^2 + 4x + 1 > 0$ per $x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$, $x > \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

Denominatore: $x^5 > 0$ per $x > 0$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &> 0 \Leftrightarrow \frac{-2-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \text{ e } x > 0 \\
f''(x) &< 0 \Leftrightarrow x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ e } \frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x < 0 \\
f''(x) &= 0 \text{ per } x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ e } x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Convessità e punti di flesso

Abbiamo allora:

$f(x)$ convessa per $x \in]\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}[, \; x \in]0, +\infty[$;

$f(x)$ concava per $x \in]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0[$;

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \simeq -1.71, \; x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \simeq -0.3$ punti di flesso,

flessi $f(x_1) = \dfrac{e^{x_1}}{x_1} \simeq -0.33, \; f(x_2) = \dfrac{e^{x_2}}{x_2} \simeq -0.11.$

Rappresentazione del grafico