Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \qquad a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, \qquad a_n \neq 0,$$

si scompone in $\mathbb{C}$ in n fattori di primo grado, eventualmente ripetuti. Più precisamente:

Teorema (fondamentale dell'algebra, o **di d'Alembert).** *Esistono $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ (distinti o no) tali che*

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \qquad \left(= a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \right).$$

Osservazioni.
• I numeri $z_1, ..., z_n$ sono tutte e sole le **radici** di $P(z)$ (cioè i numeri complessi z tali che $P(z) = 0$).
• Raggruppando gli eventuali binomi $z - z_j$ uguali tra loro, risulta

$$P(z) = a_n (z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} \cdots (z - w_k)^{m_k} \qquad \left(= a_n \prod_{j=1}^{k} (z - w_j) \right)$$

dove $w_1, ..., w_k \in \mathbb{C}$ sono le radici *distinte* di $P(z)$ e $m_1 + ... + m_k = n$. Ciascun m_j è non nullo e si chiama **molteplicità** della radice w_j, che è detta *semplice* se $m_j = 1$, *doppia* se $m_j = 2$, ecc..
• Dunque ogni polinomio di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ ha n radici (distinte o no), se ciascuna è contata con la propria molteplicità. In termini di equazioni, ogni equazione algebrica di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ ha n soluzioni (distinte o no), se ciascuna è contata con la propria molteplicità.

ESERCIZI

Esercizio 1*. *Sia $P(z)$ a coefficienti tutti reali. Provare che:*
(i) $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ *e dedurre che se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una radice di $P(z)$ allora anche $\overline{\alpha}$ lo è e con la stessa molteplicità;*
(ii) *se n è dispari, allora $P(z)$ ha almeno una radice reale;*
(iii) $P(z)$ *ammette una scomposizione del tipo*

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)^{m_1} \cdots (z - \alpha_p)^{m_p} \left(z^2 + \beta_1 z + \gamma_1\right)^{h_1} \cdots \left(z^2 + \beta_q z + \gamma_q\right)^{h_q}$$

dove tutti i coefficienti sono reali, gli esponenti sono naturali ed i trinomi di secondo grado hanno $\Delta < 0$.

Osservazione. Il punto (i) afferma che *le radici complesse non reali di un polinomio a coefficienti reali si presentano sempre a coppie di complessi coniugati.* Il punto (iii) afferma che ogni polinomio a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di polinomi *anch'essi a coefficienti reali* di grado 0 (costanti), 1 e 2 con discriminante negativo.

Esercizio 2. *Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni algebriche:*
a) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$ b) $z^5 + z^3 - z^2 - 1 = 0.$