Formulario

F. Feo

December 9, 2020

1 Trasformate di Fourier

Definizione Data una funzione $x : t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di x è la funzione

$$\widehat{x} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{x}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

$$\widehat{x}(0) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt.$$

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt.$$

La funzione $\widehat{x}(\omega)$ a volte si denota anche con $X(\omega)$ oppure con $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$.

Proprietá

- La funzione $\widehat{x}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \widehat{x}(\omega) = 0.$$

- Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse,

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega) \qquad \text{(linearità).}$$

- Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega)$$

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c})$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega-\omega_0).$$

- Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

  i) Se $x(t)$ è reale e pari allora $\widehat{x}(\omega)$ è reale pari.

  ii) Se $x(t)$ è reale e dispari allora $\widehat{x}(\omega)$ è puramente immaginaria dispari.

- Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

- Se x è una funzione sommabile e continua su $\mathbb{R}$ con derivata continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = j\omega\mathcal{F}[x(t)]$$

- Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x^{(n)}(t)](\omega) = (j\omega)^n\mathcal{F}[x(t)]$$

- Se $x(t), tx(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)x(t)](\omega)$$

- Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile n volte su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$$

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e regolare a tratti allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Trasformate notevoli

1. Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a,b] \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1}$$

$$\widehat{x}(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

$$\widehat{x}(f) = \begin{cases} \frac{e^{-2\pi j f a} - e^{-2\pi j f b}}{2\pi j f} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

2. Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = T\frac{\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\frac{T}{2}\omega} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \omega \neq 0$$

e

$$\widehat{x}(0) = T$$

$$\widehat{x}(f) = 2\frac{\sin(\frac{T}{2}2\pi f)}{2\pi f} \quad f \neq 0$$

e

$$\widehat{x}(0) = T$$

3.

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](f) = \frac{2}{1+(2\pi f)^2} \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

4. Sia $a > 0$.

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{4\pi^2 f^2}{4a}}$$

5.
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

2 Trasformate di Laplace

Definizioni

La funzione $f : I \supset (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ con I intervallo si dice $\mathcal{L}$-trasformabile se esiste $s_0 \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $e^{-s_0 t} f(t)$ sia sommabile in $(0, +\infty)$.

$$\sigma[f] = \inf\{\mathrm{Re}s : \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt < +\infty\} \ \text{(ascissa di convergenza)}$$

Se f è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile, la sua trasformata di Laplace (unilatera) è la funzione $F : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}s > \sigma[f]\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Trasformate notevoli

1. Se
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, +\infty) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{1}{s} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > 0.$$

2. Sia $a \in \mathbb{C}$
$$\mathcal{L}[e^{at} u(t)](s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a.$$

3. Sia $0 \leq a < b < +\infty$
$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s} \text{ per } s \neq 0$$
e
$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = b - a \text{ per } s = 0$$

4. $n \geq 0 \quad \mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ per $\mathrm{Re}s > 0$

5.
$$\mathcal{L}[\sin \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{per Re}s > 0$$
$$\mathcal{L}[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{per Re}s > 0$$

In particolare

$$\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{per Re}s > 0$$

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{per Re}s > 0.$$

Proprietá

- Siano f_1, f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ la funzione $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre

  $$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per Re}s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$$

- (Limitatezza della trasformata) Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso Re$s \geq \sigma_0$ e

  $$\lim_{\text{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

- Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Siano $c > 0$, $t_0 > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, allora

  $$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(t)] \left(\frac{s}{c}\right) \quad \text{per Re}s > c\sigma[f]$$

  $$\mathcal{L}[f(t - t_0)](s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{per Re}s > \sigma[f]$$

  $$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - a) \quad \text{per Re}s > \sigma[f] + \text{Re}a$$

- Sia f_1 e f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. Allora la funzione $f_1 * f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2(t)](s) = \mathcal{L}[f_1(t)](s)\mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per Re}s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$$

- Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ continua, derivabile e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e con derivata prima continua a tratti e $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f']$. Allora

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\} \tag{2}$$

- Nelle ipotesi della proposizione precedente se esiste $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ ed è finito allora esiste $\lim_{s\to 0} sF(s)$ e

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

- Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$, $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è olomorfa (derivabile nel senso complesso) nel semipiano Re$s > \sigma[f]$. La funzione $tf(t)$ è$\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad \text{per Re}s > \sigma[f]$$

Formula d'inversione

- Sia f un segnale (i.e. f nulla per $t < 0$) regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{st}F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau\to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau\to t^+} f(\tau)$.

- Sia f un segnale regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{st}F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau\to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau\to t^+} f(\tau)$.

Antitrasformata rapporto polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ con denominatore di grado N e numeratore di grado M con $N > M$ e primi tra di loro (non hanno zeri comuni).

1. $B(s)$ ha solo zeri reali semplici. Siano $s_1, s_2, \cdots, s_N$ gli zeri reali semplici, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1) \cdots + (s - s_N)$ con $b_N \neq 0$. Allora

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{\Lambda_N}{s - s_N}$$

per opportune costanti $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_N$

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 e^{s_1 t} + \cdots + \Lambda_N e^{s_N t}].$$

   (a)

$$\Lambda_i = \lim_{s \to s_i} \frac{A(s)}{B(s)}(s - s_i)$$

   (b)

$$\Lambda_i = \left. \frac{A(s)}{B'(s)} \right|_{s = s_i}$$

   (c) principio d'identità dei polinomi

2. $B(s)$ ha zeri reali ma non tutti semplici.

   Siano $s_1, s_2, \cdots, s_r$ gli $r \in \mathbb{N}$ zeri reali con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_r$ con $N = m_1 + \cdots + m_r$, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_r)^{m_r}$. Allora

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1^1}{s - s_1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{\Lambda_1^{m_1}}{(s - s_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{\Lambda_r^1}{s - s_r} + \cdots + \frac{\Lambda_r^{m_r}}{(s - s_r)^{m_r}},$$

   con opportune costanti Λ_i^j con $i = 1, \cdots, r$ e $j = 1, \cdots, m_i$.

$$f(t) = u(t) \left[\Lambda_1^1 e^{s_1 t} + \cdots + \Lambda_1^{m_1} \frac{t^{m_1 - 1} e^{s_1 t}}{(m_1 - 1)!} + \cdots + \Lambda_r^1 e^{s_r t} + \cdots + \Lambda_r^{m_r} \frac{t^{m_r - 1} e^{s_r t}}{(m_r - 1)!} \right]$$

$$\Lambda_i^j = \lim_{s \to s_i} \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} \left[\frac{A(s)}{B(s)} (s - s_i)^{m_i} \right].$$

3. $B(s)$ ha zeri complessi non reali.

   Sia $F(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$.

$$F(s) = 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} - 2 \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

$$= 2\,\frac{\sigma}{\sigma^2+2^2}\bigg|_{\sigma=s+1} - 2\,\frac{1}{\sigma^2+2^2}\bigg|_{\sigma=s+1}$$

$$= 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sigma}{\sigma^2+2^2}\right](t) - e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\sigma^2+2^2}\right](t)$$

segue che

$$f(t) = u(t)e^{-t}[2\cos(2t) - \sin(2t)].$$