Formulario corso Matematica II

M.F. Betta

December 17, 2020

1 Richiami di Analisi I

Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\,\cos x;\ \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x;\ \operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}^2(\frac{y}{2}) = \frac{1-\cos\ y}{2};\ \cos^2(\frac{y}{2}) = \frac{1+\cos\ y}{2};\ \operatorname{tg}^2(\frac{y}{2}) = \frac{1-\cos y}{1+\cos y}$$

Limiti notevoli di successioni

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases};\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{se } a > 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases};\quad \lim_{n\to+\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty;\quad \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty,\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{se } \alpha > 0 \text{ e } a > 0, a \neq 1;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ e } a > 1;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \text{se } a > 1; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\operatorname{sen}(1/n) = 1,\ \lim_{n\to+\infty} n^2\left[1-\cos^2(1/n)\right] = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[e^{\frac{1}{n}} - 1\right] = 1, \lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Derivate delle funzioni elementari

$Dk = 0$ con $k \in \mathbb{R}$; $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$; $Da^x = a^x \log a$; $D\log_a |x| = \frac{1}{x}\log_a e$

$D\,\mathrm{sen}\, x = \cos x$; $D\cos x = -\mathrm{sen}\, x$; $D\,\mathrm{tg}\, x = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$D\,\mathrm{arcsen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

$D\sinh x = \cosh x$; $D\cosh x = \sinh x$; $D\,\mathrm{settsinh}\, x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $D\,\mathrm{settscosh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Regole di derivazione

$D(kf(x)) = kDf(x)$ con $k \in \mathbb{R}$

$D(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$

$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$D(g(f(x))) = g^{'}(f(x))f'(x)$

Integarli indefiniti immediati

$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$; $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$; $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$; $\int \mathrm{sen}\, x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \mathrm{sen}\, x + c$; $\int \sinh x dx = \cosh x + c$; $\int \cosh x dx = \sinh x + c$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{arcsen}\, x + c$; $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$; $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \mathrm{settsenh}\, x + c = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \mathrm{settcosh}\, x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c$; dove $c \in \mathbb{R}$

Regole di integrazione
linearità $\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x))dx$
integrazione per parti: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
integrazione per sostituzione $\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=f(x)}$

2 Trasformate di Fourier

Definizione $x : t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{C}$ sommabile

$$\widehat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Proprietá Siano $x_1(t), x_2(t), x(t)$ funzioni sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} - \{0\}$,

- $\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$ (linearità).
- $\mathcal{F}[x(t - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega)$
- $\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c})$
- $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0)$
- $\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$
- Se x è una funzione sommabile e continua su $\mathbb{R}$ con derivata continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = j\omega\mathcal{F}[x(t)]$$

- Se $x(t), tx(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)x(t)](\omega)$$

Trasformate notevoli

1. Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$\chi_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a,b] \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathcal{F}[\chi_{[a,b]}(t)](\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega a}-e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ b-a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

2. Sia $T > 0$ e

$$\mathcal{F}[\chi_{[-T/2,T/2]}(t)] = \frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \omega \neq 0$$

e

$$\mathcal{F}[\chi_{[-T/2,T/2]}(t)](0) = T$$

3. $$\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

4. Sia $a > 0$.

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

5. $$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

3 Trasformate di Laplace

Definizione

Se f è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile,

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\sigma[f] = \inf\{\mathrm{Re} s : \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt < +\infty\} \text{ (ascissa di convergenza)}$$

Trasformate notevoli

1. Se
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, +\infty) \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{1}{s} \qquad \text{per Re} s > 0.$$

2. Sia $a \in \mathbb{C}$
$$\mathcal{L}[e^{at}u(t)](s) = \frac{1}{s-a} \qquad \text{per Re} s > \text{Re} a.$$

3. Sia $0 \leq a < b < +\infty$
$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s} \text{ per } s \neq 0$$
e
$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = b - a \text{ per } s = 0$$

4. $n \geq 0 \quad \mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ per Re$s > 0$

5. $$\mathcal{L}[\text{sen}\,\omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{per Re} s > 0$$
$$\mathcal{L}[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{per Re} s > 0$$

Proprietá

Siano f, f_1, f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f], \sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente.

- $\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per Re} s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$

- Siano $c > 0$, $t_0 > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, allora
$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \qquad \text{per Re} s > c\sigma[f]$$
$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{per Re} s > \sigma[f]$$
$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - a) \quad \text{per Re} s > \sigma[f] + \text{Re} a$$

- $\mathcal{L}[f_1 * f_2(t)](s) = \mathcal{L}[f_1(t)](s)\mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per Re}s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
- Se ha derivata prima continua a tratti e $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f']$. Allora

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\} \tag{2}$$

- $F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad \text{per Re}s > \sigma[f]$