

Formulario corso Matematica II

M.F. Betta - F. Feo

December 15, 2020

1 Richiami di Analisi I

Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x; \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x; \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Formule di bisezione

$$\sin^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1 - \cos y}{2}; \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1 + \cos y}{2}; \operatorname{tg}^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}$$

Limiti di successioni notevoli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{se } a > 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ e } a > 0, a \neq 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ e } a > 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{se } a > 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(1/n) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 [1 - \cos^2(1/n)] = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1,$$

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Derivate delle funzioni elementari

$$Dk = 0 \quad \text{con } k \in \mathbb{R}; \quad Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}; \quad Da^x = a^x \log a; \quad D \log_a |x| = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$D \operatorname{sen} x = \cos x; \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x; \quad D \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad D \operatorname{arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad D \operatorname{arctan} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \operatorname{sinh} x = \cosh x; \quad D \cosh x = \operatorname{sinh} x; \quad D \operatorname{settsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad D \operatorname{settcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Regole di derivazione

$$D(kf(x)) = kDf(x) \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$D(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$D(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$$

Integarli indefiniti immediati

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c; \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c;$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c; \quad \int \operatorname{sinh} x dx = \cosh x + c;$$

$$\int \cosh x dx = \operatorname{sinh} x + c; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c; \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\operatorname{arctan} x + c; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{settsenh} x + c = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{settcosh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c; \quad \text{dove } c \in \mathbb{R}$$

Regole di integrazione

$$\text{linearità } \int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx$$

$$\text{integrazione per parti: } \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\text{integrazione per sostituzione } \int g(f(x))f'(x) dx = \int g(t) dt \Big|_{t=f(x)}$$

2 Trasformate di Fourier

Definizione $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{C}$ sommabile

$$\hat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\hat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Proprietá Siano $x_1(t), x_2(t), x(t)$ funzioni sommabile su \mathbb{R} e α_1, α_2 due costanti complesse, $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} - \{0\}$,

- $\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$ (linearità).
- $\mathcal{F}[x(t - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega} \mathcal{F}[x(t)](\omega)$
- $\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c})$
- $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0)$
- $\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) \mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$
- Se x è una funzione sommabile e continua su \mathbb{R} con derivata continua a tratti e sommabile su \mathbb{R} allora

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = j\omega \mathcal{F}[x(t)]$$

- Se $x(t), tx(t)$ sono funzioni sommabili su \mathbb{R} , allora $\hat{x}(\omega)$ è derivabile su \mathbb{R} e

$$\hat{x}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)x(t)](\omega)$$

Trasformate notevoli

1. Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$\chi_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathcal{F}[\chi_{[a,b]}(t)](\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

2. Sia $T > 0$ e

$$\mathcal{F}[\chi_{[-T/2, T/2]}(t)] = \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \omega \neq 0$$

e

$$\mathcal{F}[\chi_{[-T/2, T/2]}(t)](0) = T$$

- 3.

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

4. Sia $a > 0$.

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

- 5.

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

3 Trasformate di Laplace

Definizione

Se f è una funzione \mathcal{L} -trasformabile,

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\sigma[f] = \inf \left\{ \operatorname{Res} : \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < +\infty \right\} \quad (\text{ascissa di convergenza})$$

Trasformate notevoli

1. Se

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, +\infty) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{1}{s} \quad \text{per } \text{Res} > 0.$$

2. Sia $a \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{at}u(t)](s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{per } \text{Res} > \text{Re}a.$$

3. Sia $0 \leq a < b < +\infty$

$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s} \quad \text{per } s \neq 0$$

e

$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = b - a \quad \text{per } s = 0$$

4. $n \geq 0$ $\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ per $\text{Res} > 0$

5.

$$\mathcal{L}[\text{sen } \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{per } \text{Res} > 0$$

$$\mathcal{L}[\text{cos } \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{per } \text{Res} > 0$$

Proprietá

Siano f, f_1, f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e \mathcal{L} -trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f], \sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente.

- $\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](s)$ per $\text{Res} > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
- Siano $c > 0, t_0 > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, allora

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \text{per } \text{Res} > c\sigma[f]$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{per } \text{Res} > \sigma[f]$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \quad \text{per } \text{Res} > \sigma[f] + \text{Re}a$$

- $\mathcal{L}[f_1 * f_2(t)](s) = \mathcal{L}[f_1(t)](s)\mathcal{L}[f_2(t)](s)$ per $\text{Res} > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
- Se ha derivata prima continua a tratti e \mathcal{L} -trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f']$. Allora

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per } \text{Res} > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\} \quad (2)$$

- $F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$ per $\text{Res} > \sigma[f]$