Statistica I modulo - CdS SIAFA
Esame 21 gennaio 2025
Soluzioni

1. La tabella che segue rappresenta l'età di 1901 *piccoli* lettori che hanno letto almeno 5 libri in un anno:

Età (x_i)	Lettori (n_i)
6-10	660
10-16	623
16-18	411
18-24	207
TOT	1901

(a) Costruire l'istogramma.
(b) Calcolare l'età media.
(c) Individuare la mediana e interpretare il risultato.

(a) *Per costruire l'istogramma è necessario calcolare le densità di frequenza ($h_i = n_i/a_i$).*

Classe	n_i	a_i	h_i
6-10	660	4	165
10-16	623	6	103,83
16-18	411	2	205,5
18-24	207	6	34,5
TOT	336	1	

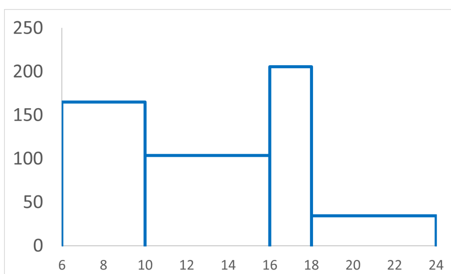

Figura 1: Istogramma.

(b) *Per la media aritmetica si calcolano i valori centrali di ogni classe con i quali si calcola una media aritmetica ponderata con pesi pari alle frequenze assolute:*

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 660 + 13 \cdot 623 + 17 \cdot 411 + 21 \cdot 207}{1901} = \frac{24713}{1901} = 13$$

(c) *Per il calcolo della mediana, si calcolano le frequenze relative cumulate F_i:*

Classe	n_i	f_i	F_i
6-10	660	0,347	0,347
10-16	623	0,328	0,675
16-18	411	0,216	0,891
18-24	207	0,109	1,000
TOT	336	1	

Si imposta quindi la proporzione:

$$(0,675 - 0,347) : (16 - 10) = (0,50 - 0,347) : (Me - 10)$$

da cui

$$Me = 10 + \frac{6 \cdot 0,153}{0,328} = 12,80$$

2. Per 6 anni si registrano il numero di libri per ragazzi pubblicati (X) e il numero di libri acquistati (Y):

Libri pubblicati (X)	Libri acquistati (Y)
112	24430
113	53220
115	66612
117	64042
124	69074
130	88934

(a) Rappresentare il diagramma di dispersione.
(b) Identificare i coefficienti della regressione (con Y variabile dipendente) e rappresentare la retta di regressione. Si può affermare che l'aumento dell'offerta (ovvero più libri pubblicati) determina un aumento degli acquisti ?
(c) Se il numero di libri pubblicati aumentasse di 20, qual è la variazione attesa del numero di libri acquistati?
(d) Calcolare $P(X \leq 129)$.

(a) *Il diagramma di dispersione è riportato nella Figura 2.*

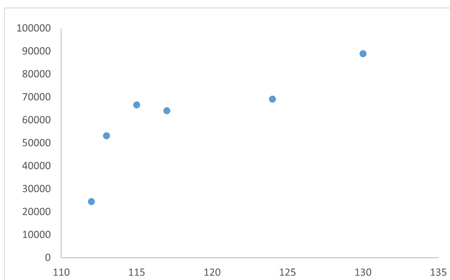

Figura 2: Diagramma di dispersione.

(b) *Per individuare la retta di regressione si svolgono i calcoli sotto riportati, dopo aver individuato* $\bar{x} = 118,5$ *e* $\bar{y} = 61052$.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	Prodotto	$(x_i - \bar{x})^2$
112	24430	-6,5	-36622	238043	42,25
113	53220	-5,5	-7832	43076	30,25
115	66612	-3,5	5560	-19460	12,25
117	64042	-1,5	2990	-4485	2,25
124	69074	5,5	8022	44121	30,25
130	88934	11,5	27882	320643	132,25
TOT				621938	249,5

Dunque

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{6}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{621938}{249,5} = 2492,74$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 61052 - 2492,74 \cdot 118,5 = -234337,39$$

L'equazione della retta di regressione è dunque

$$\hat{Y} = -234337,39 + 2492,74X$$

La retta di regressione è riportata nella Figura 3.

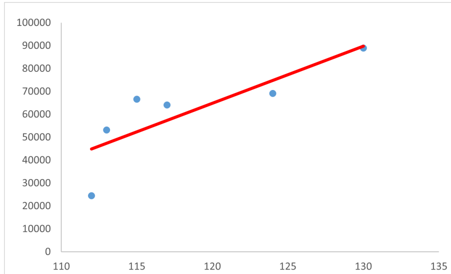

Figura 3: Diagramma di dispersione e retta di regressione.

Si può affermare che l'aumento dell'offerta (ovvero più libri pubblicati) determina un aumento degli acquisti poiché $\hat{\beta}_1 > 0$.

(c) *Se il numero di libri pubblicati aumentasse di 20, la variazione attesa del numero di libri acquistati è pari a* $20 \cdot 2492,74 = 49.854,8$.

(d) $P(X \leq 129) = 5/6$

3. Il rivenditore *Ballon* vuole lanciare un nuovo prodotto: un sacchetto contenente 5 libri scelti a caso. Si sa che in media i libri sono scelti casualmente tra 1100 romanzi e 230 libri per bambini.
(a) Qual è la probabilità che nel sacchetto non ci sia alcun libro per bambini?
(b) Qual è la probabilità che nel sacchetto ci sia 1 libro per bambini?
(c) Qual è la probabilità che nel sacchetto ci siano 4 o 5 libri per bambini?

(a) *Il numero di libri per bambini in un sacchetto di 5 libri è una VC binomiale con parametri* $n = 5$ *e* $\pi = 230/(110 + 230) = 0,173$.
La probabilità che nel sacchetto non ci sia alcun libro per bambini è pari a

$$P(X = 0) = \frac{5!}{0!(5-0)!} 0.173^0 (1 - 0.173)^5 = 0,387$$

(b) *La probabilità che nel sacchetto ci sia 1 libro per bambini è pari a*

$$P(X = 1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} 0.173^1 (1 - 0.173)^4 = 0,405$$

(c) *La probabilità che nel sacchetto ci siano 4 o 5 libri per bambini è pari a*

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{5!}{4!(5-4)!} 0.173^4 (1 - 0.173)^1 + \frac{5!}{5!(5-5)!} 0.173^5 (1 - 0.173)^0 = \\ &= 0,004 + 0,0002 = 0,0042 \end{aligned}$$