

Trasformata di Radon

Strumentazione biomedica e bioimmagini

*Laurea in
Ingegneria Informatica, Biomedica e delle Telecomunicazioni*

Fabio Baselice

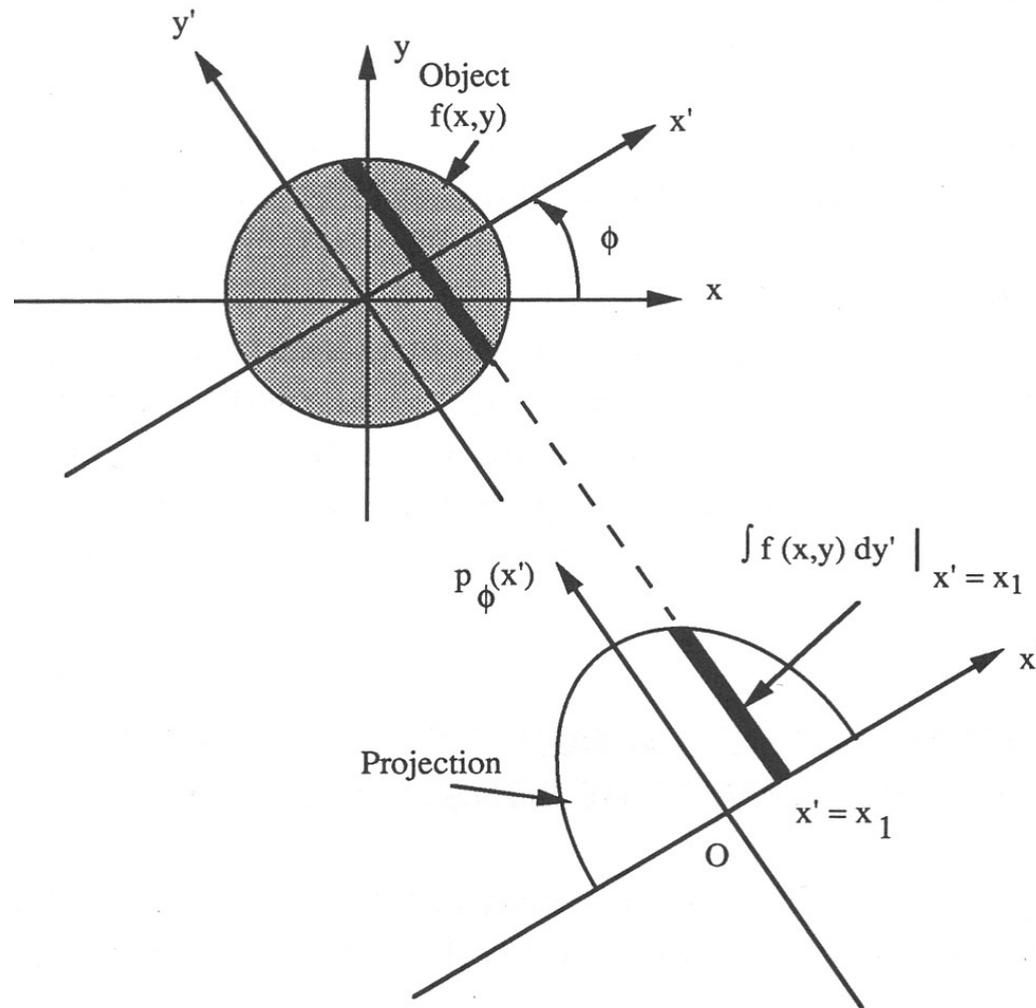


Sommario

- Trasformata Radon e retroproiezione



Proiezione linea-integrale



Formulazione

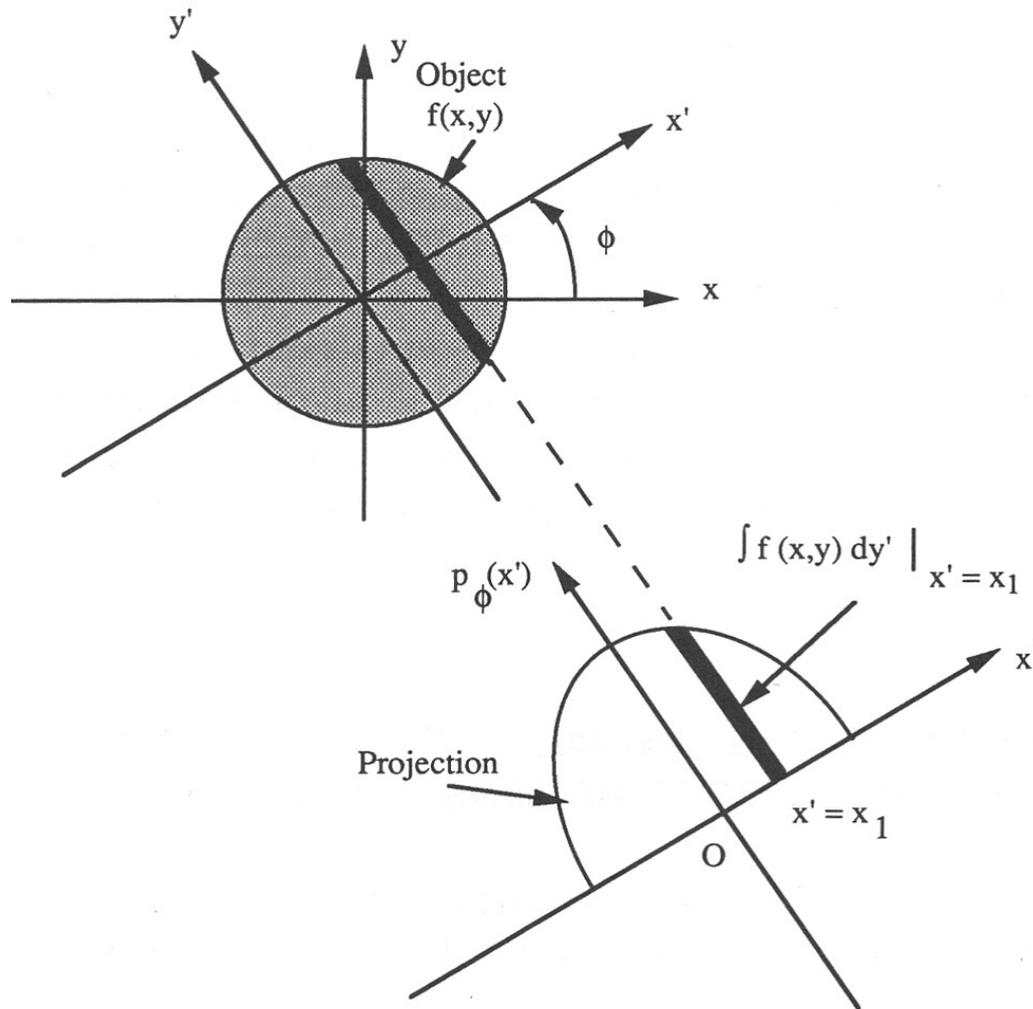
La trasformata Radon è definita analiticamente dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} p_{\varphi}(x') &\equiv \mathfrak{R}[f(x, y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - x') dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi - x', x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy' \end{aligned}$$

dove $f(x, y)$ è la funzione oggetto, (x', y') sono le coordinate (x, y) ruotate di un angolo φ .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Formulazione



Dato che la funzione $p_\phi(x')$ è la proiezione 1D della funzione $f(x,y)$ ad un angolo ϕ , l'operatore trasformato Radon $\mathcal{R}[\cdot]$ esegue l'integrale di linea dell'immagine 2D lungo la direzione y' .

Tale proiezione sarà la base a partire dalla quale la funzione sarà ricostruita.

Proprietà della Trasformata Radon

1. Le proiezioni sono periodiche in φ con periodo 2π e simmetriche. Pertanto:

$$p_{\varphi}(x') = p_{\varphi \pm \pi}(-x')$$

2. A partire dalla trasformata Radon si ottiene il teorema della proiezione (anche detto della fetta centrale) tramite la trasformata di Fourier mono o bi-dimensionale.
3. La trasformata Radon produce il cosiddetto sinogramma.



Teorema della Proiezione

Consideriamo la relazione che sussiste fra la trasformata 2D di Fourier della funzione oggetto $f(x, y)$ e la trasformata di Fourier 1D della sua trasformata Radon $p_\varphi(x')$.

Tale relazione costituisce la base fondamentale per la ricostruzione di una immagine a partire da proiezioni.

Teorema della Proiezione

Consideriamo la relazione che sussiste fra la trasformata 2D di Fourier della funzione oggetto $f(x, y)$ e la trasformata di Fourier 1D della sua trasformata Radon $p_\varphi(x')$.

Tale relazione costituisce la base fondamentale per la ricostruzione di una immagine a partire da proiezioni.

La trasformata 1D di Fourier della proiezione $p_\varphi(x')$ è:

$$P_\varphi(\omega) \equiv \mathcal{F}_1[p_\varphi(x')] = \int_{-\infty}^{\infty} p_\varphi(x') \exp(-i\omega x') dx' =$$

Teorema della Proiezione

Consideriamo la relazione che sussiste fra la trasformata 2D di Fourier della funzione oggetto $f(x, y)$ e la trasformata di Fourier 1D della sua trasformata Radon $p_\varphi(x')$.

Tale relazione costituisce la base fondamentale per la ricostruzione di una immagine a partire da proiezioni.

La trasformata 1D di Fourier della proiezione $p_\varphi(x')$ è:

$$\begin{aligned} P_\varphi(\omega) &\equiv \mathcal{F}_1[p_\varphi(x')] = \int_{-\infty}^{\infty} p_\varphi(x') \exp(-i\omega x') dx' = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi - x', x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \exp(-i\omega x') dx' dy' \end{aligned}$$

Teorema della Proiezione

Passando dalle coordinate (x', y') ad (x, y)

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} f(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi - x', x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \exp(-i \omega x') dx' dy' = \\ & = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i \omega (x \cos \varphi + y \sin \varphi)] dx dy \end{aligned}$$



Teorema della Proiezione

Passando dalle coordinate (x', y') ad (x, y)

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} f(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi - x', x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \exp(-i \omega x') dx' dy' = \\ & = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i \omega (x \cos \varphi + y \sin \varphi)] dx dy = \\ & = F(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = F(\omega_x, \omega_y) = F(\omega, \varphi) = \mathcal{F}_{2D}[f(x, y)] \end{aligned}$$

Ricordandoci che nel dominio di Fourier $\omega_{x'} = \omega \cos \varphi$, $\omega_{y'} = \omega \sin \varphi$



Teorema della Proiezione

Pertanto

$$P_{\varphi}(\omega) = \mathcal{F}_{2D}[f(x, y)] = F(\omega, \varphi)$$

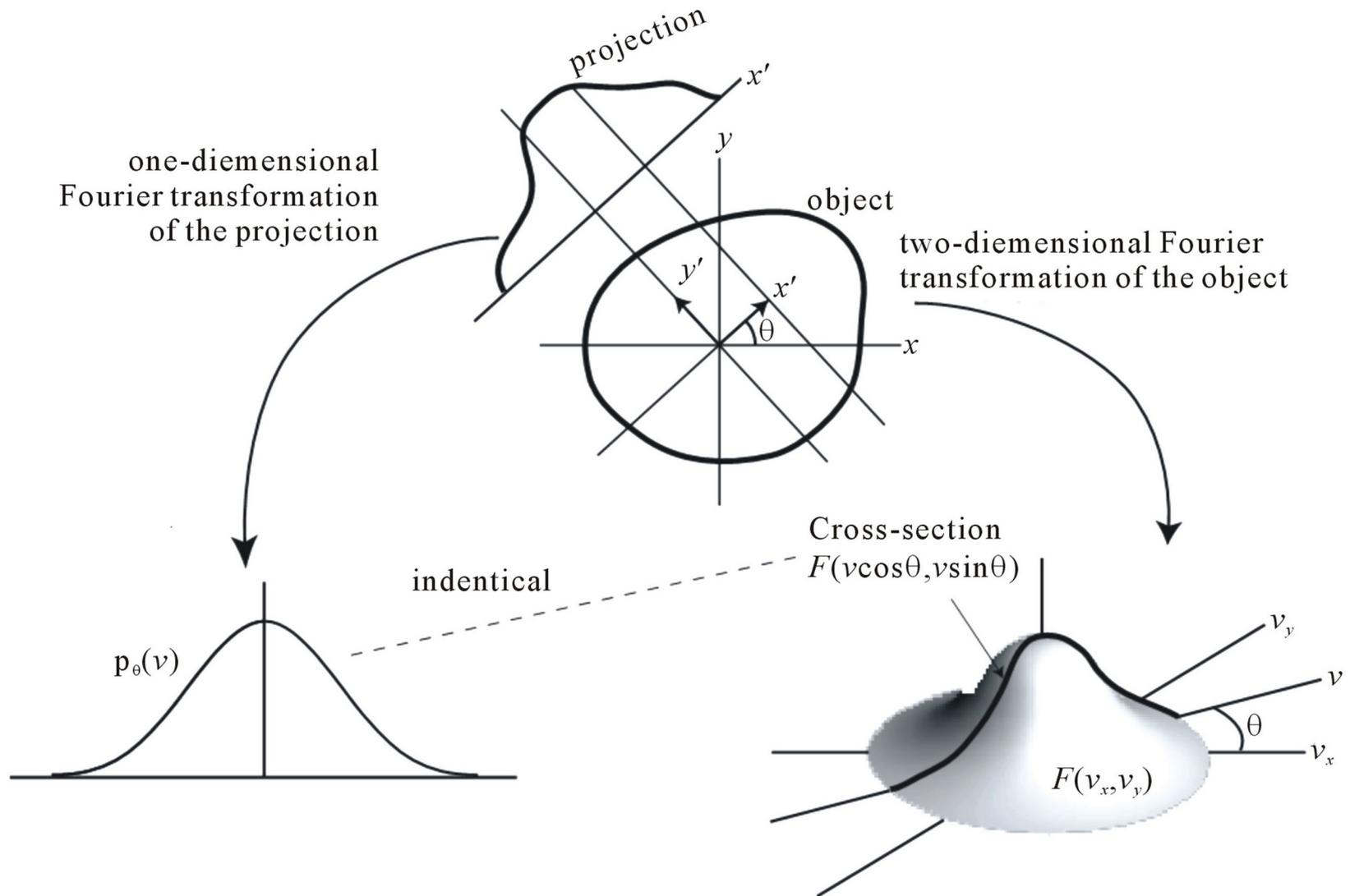
Teorema della Proiezione

Pertanto

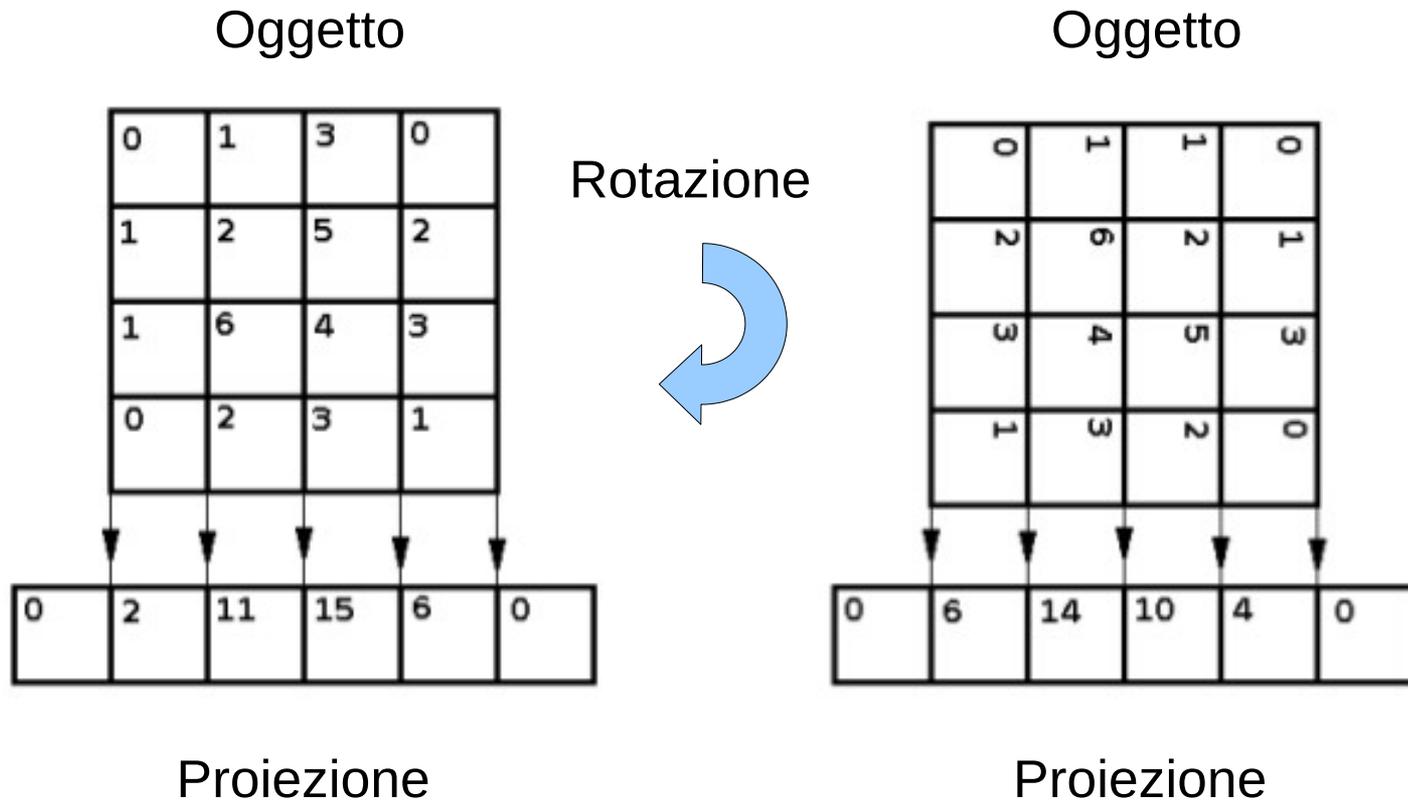
$$P_{\varphi}(\omega) = \mathcal{F}_{2D}[f(x, y)] = F(\omega, \varphi)$$

Ovvero la trasformata di Fourier 1D della proiezione $p_{\varphi}(x')$ ad un certo angolo φ è la stessa del dato radiale passante per l'origine ad un angolo φ nel dominio di Fourier 2D.

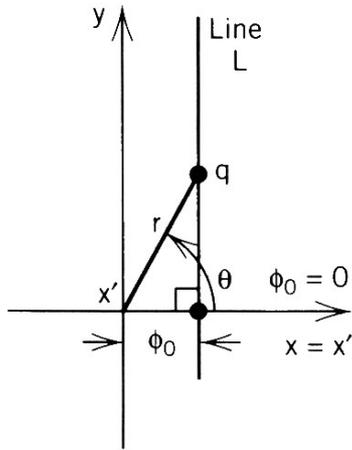
Teorema della Proiezione



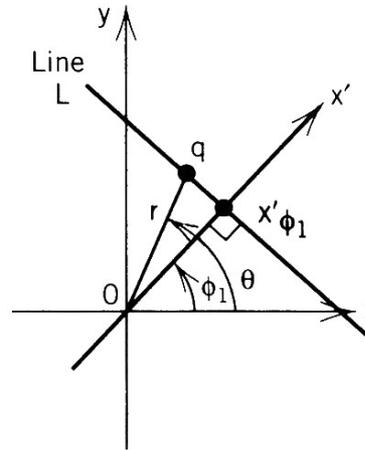
Esempio di Trasformata Radon



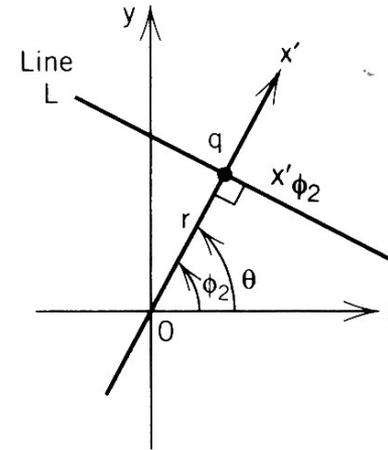
Sinogramma



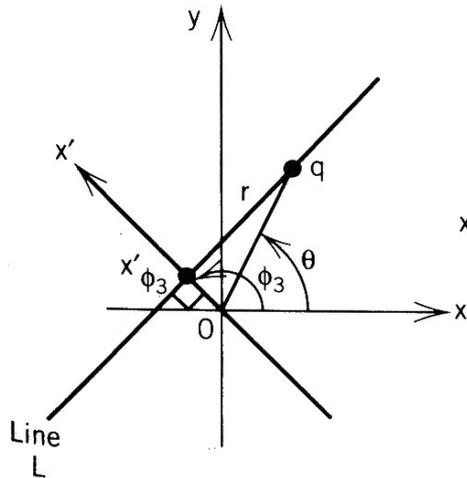
(a) ϕ_0



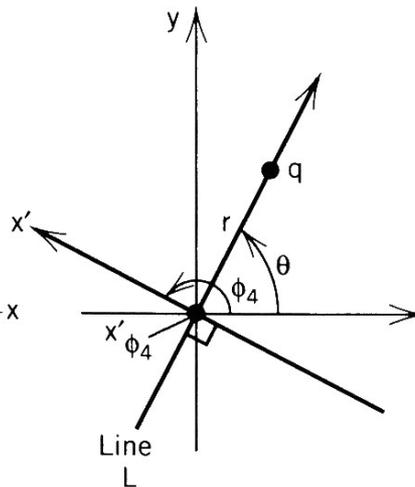
(b) ϕ_1



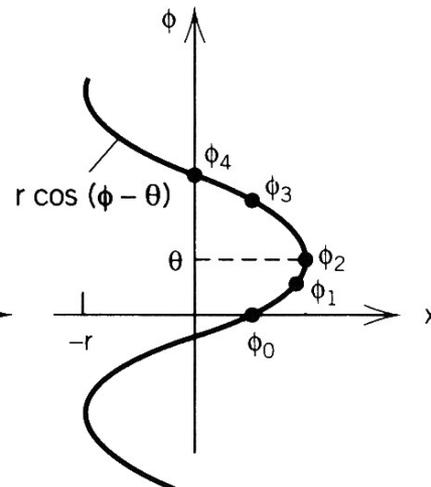
(c) ϕ_2



(d) ϕ_3



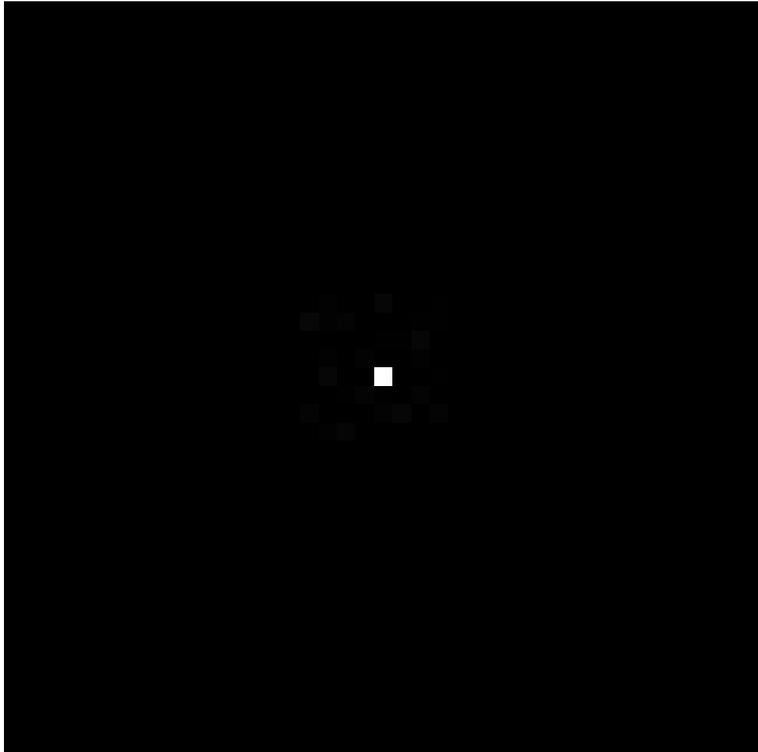
(e) ϕ_4



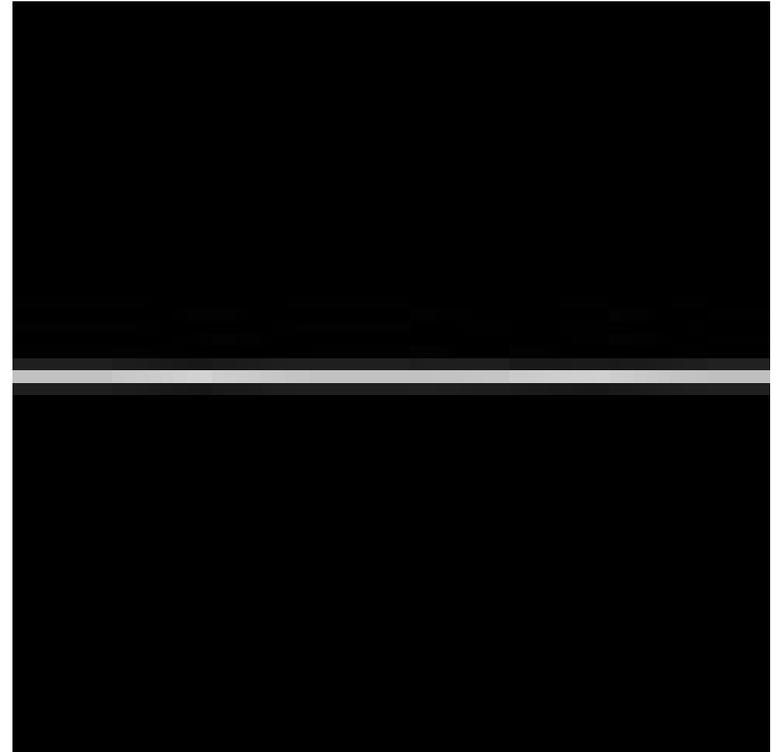
(f)



Sinogramma

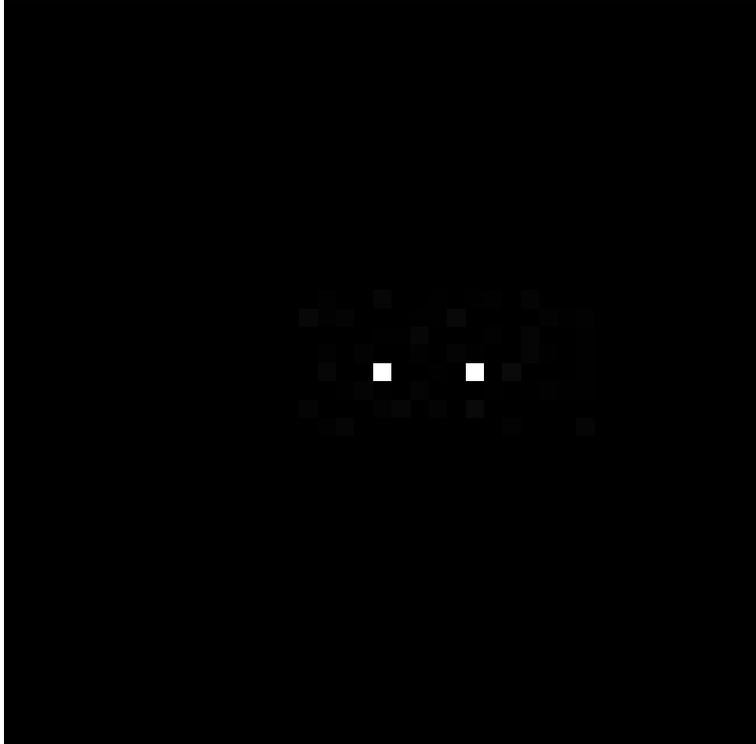


oggetto



sinogramma

Sinogramma

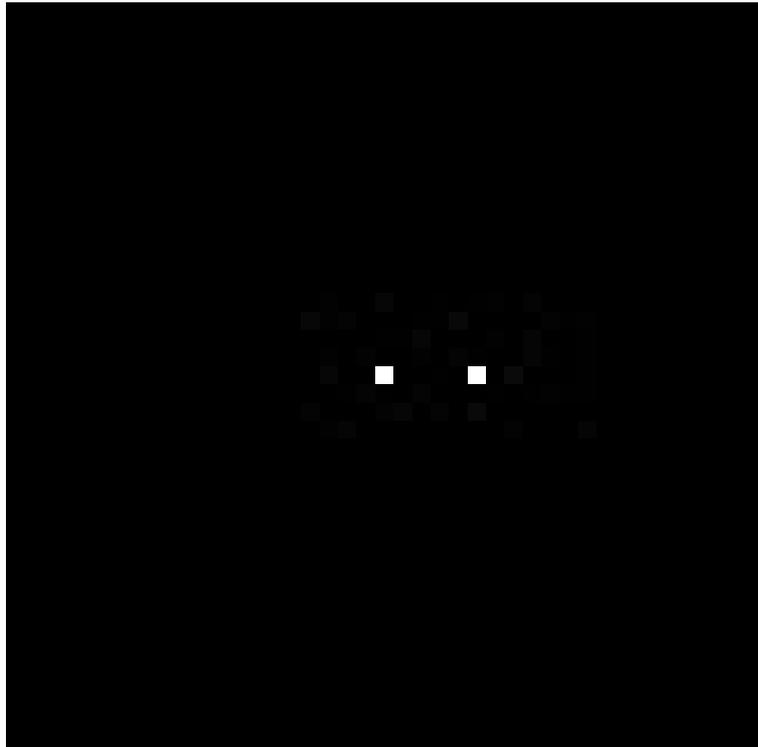


oggetto

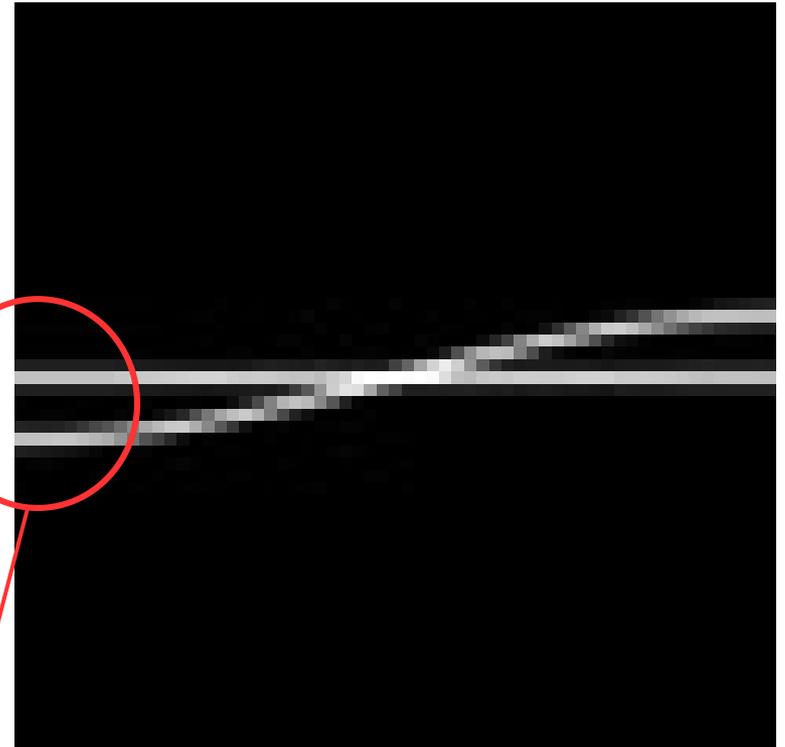


sinogramma

Sinogramma



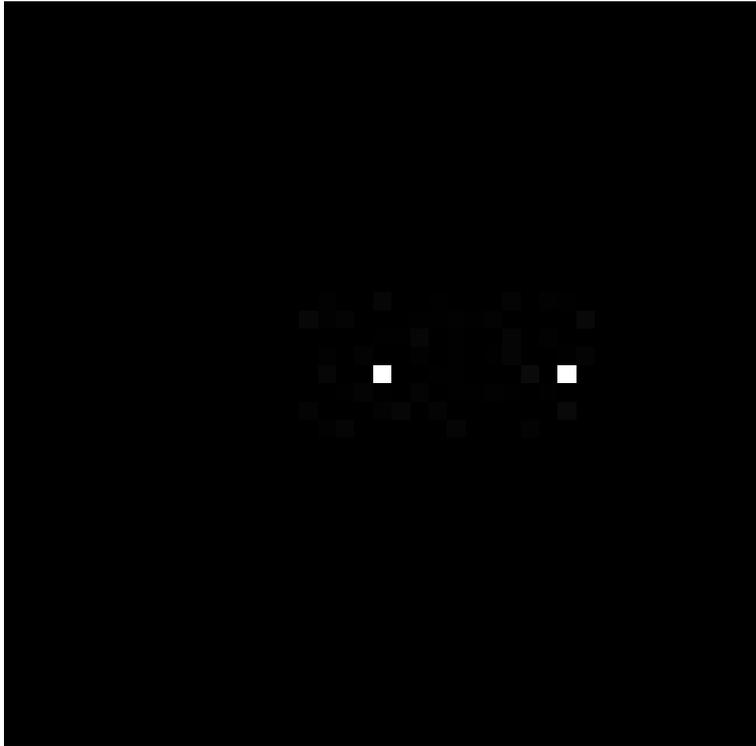
oggetto



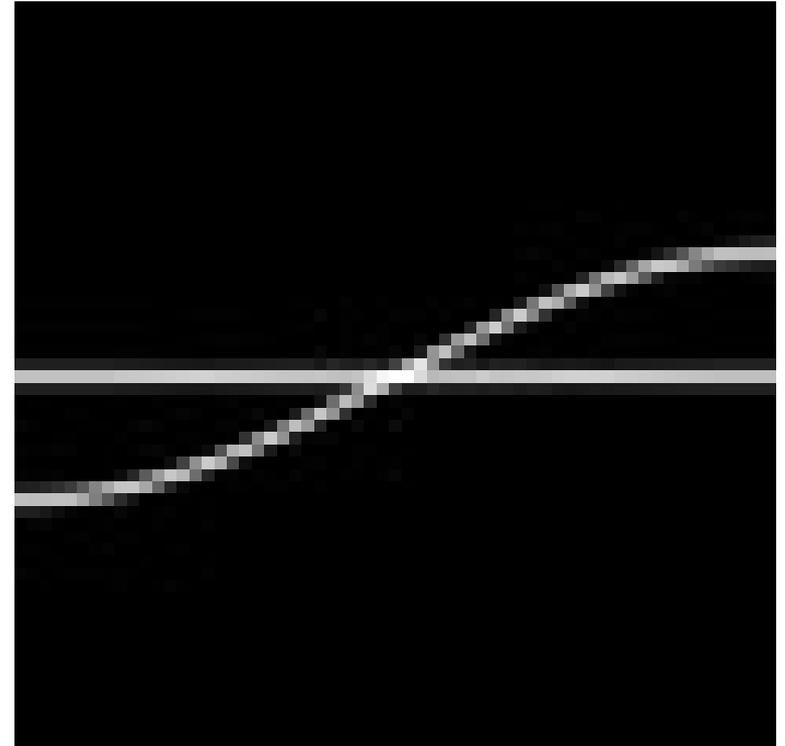
sinogramma

Massimo scostamento
quando proiettiamo a 0 e π

Sinogramma

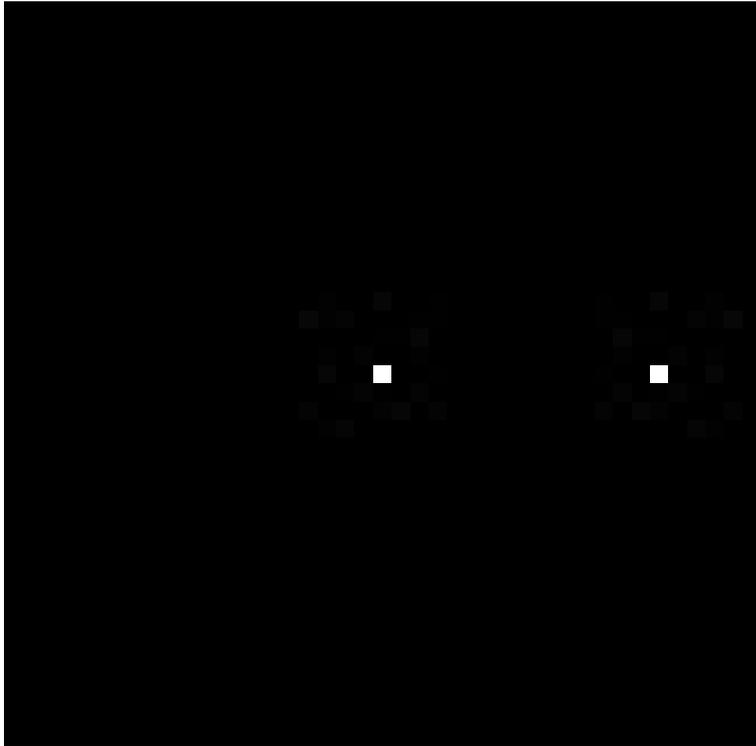


oggetto

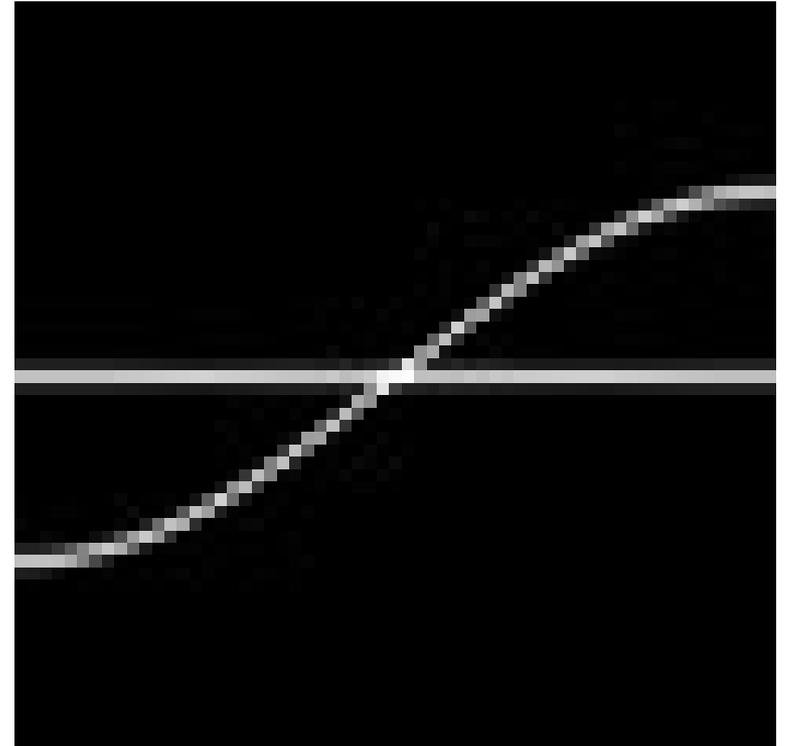


sinogramma

Sinogramma

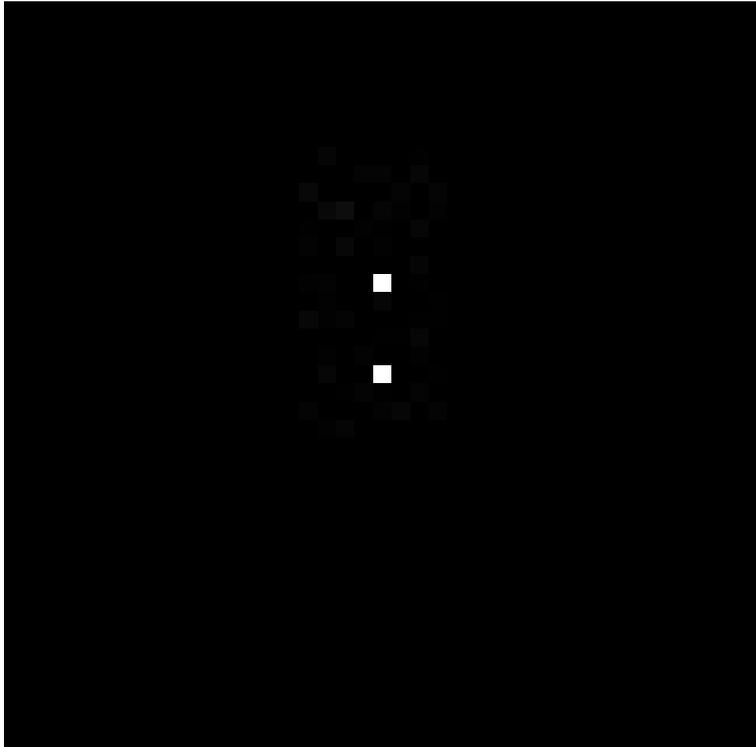


oggetto

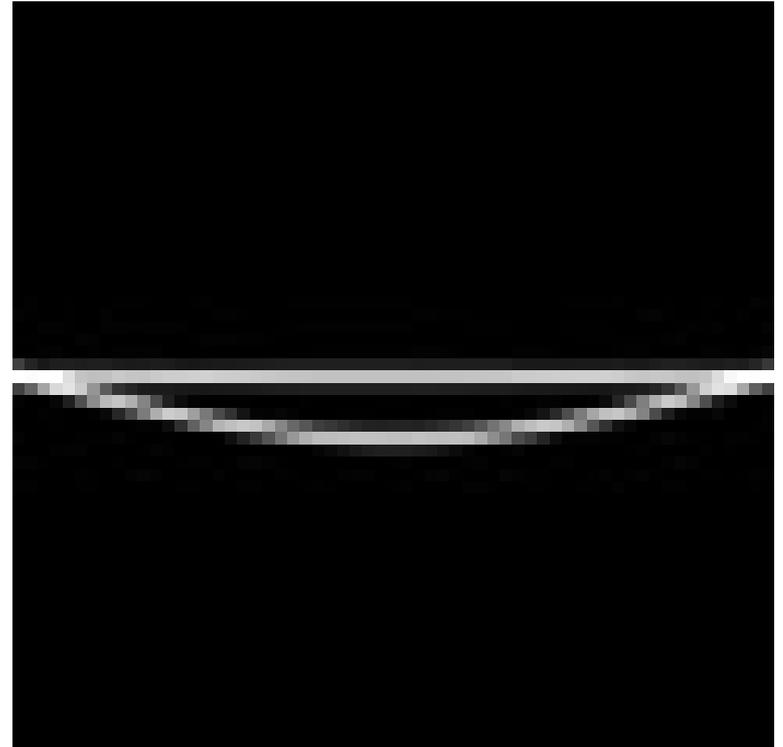


sinogramma

Sinogramma

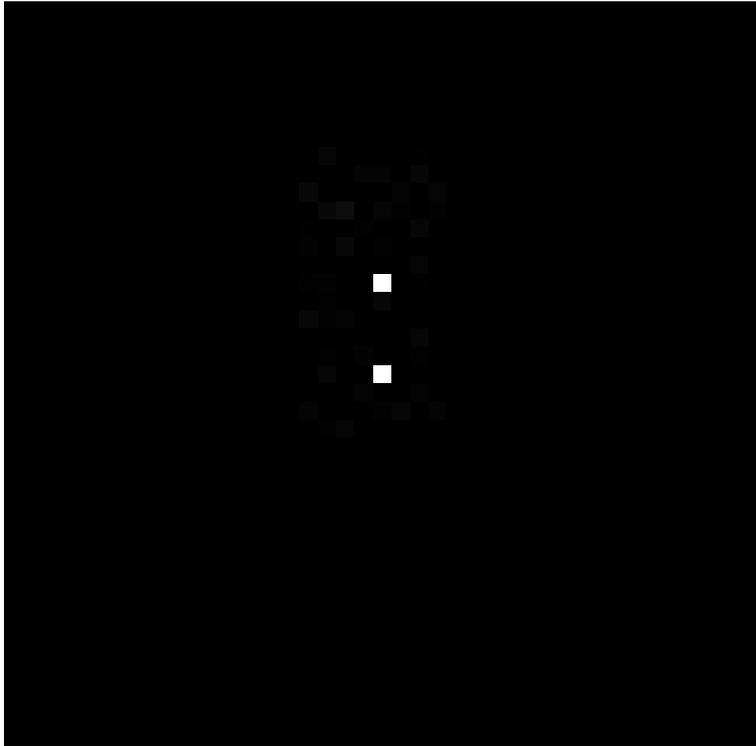


oggetto

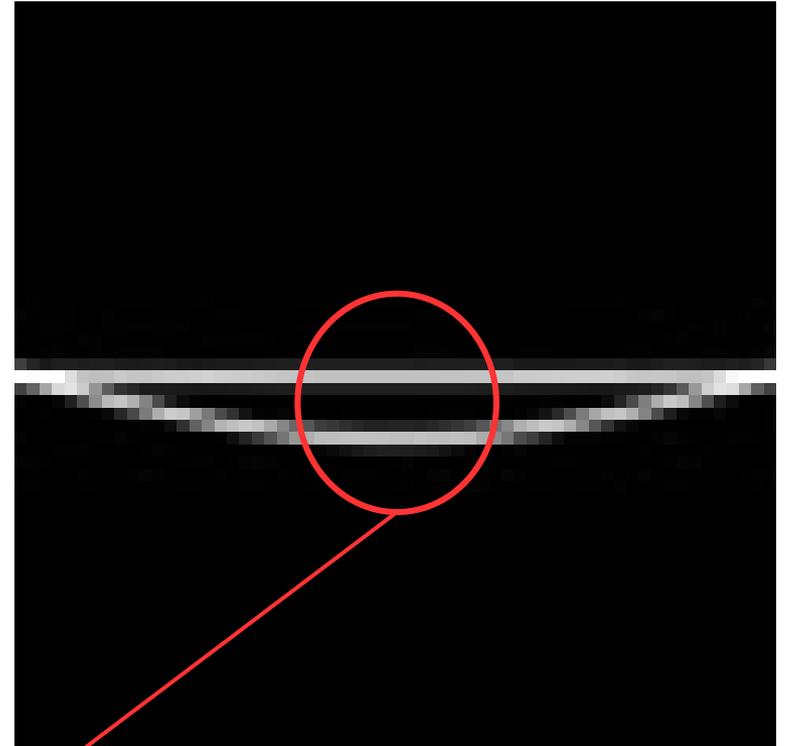


sinogramma

Sinogramma



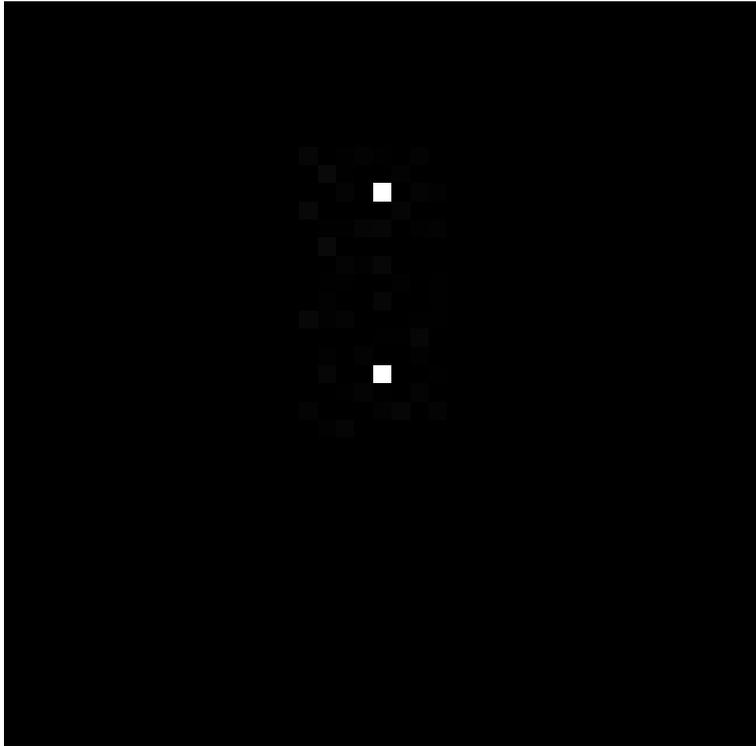
oggetto



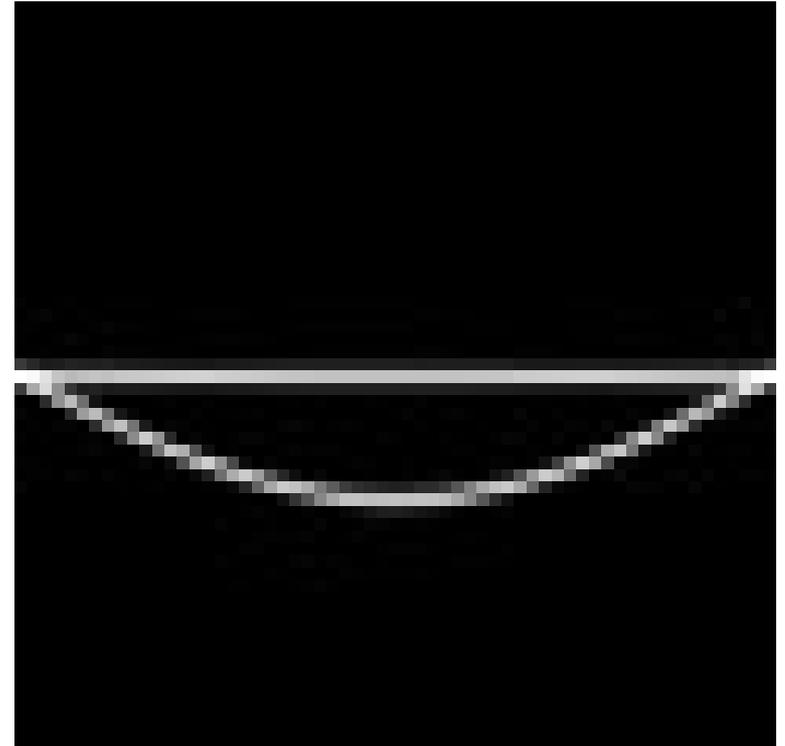
sinogramma

Massimo scostamento
quando proiettiamo a $\frac{\pi}{2}$

Sinogramma

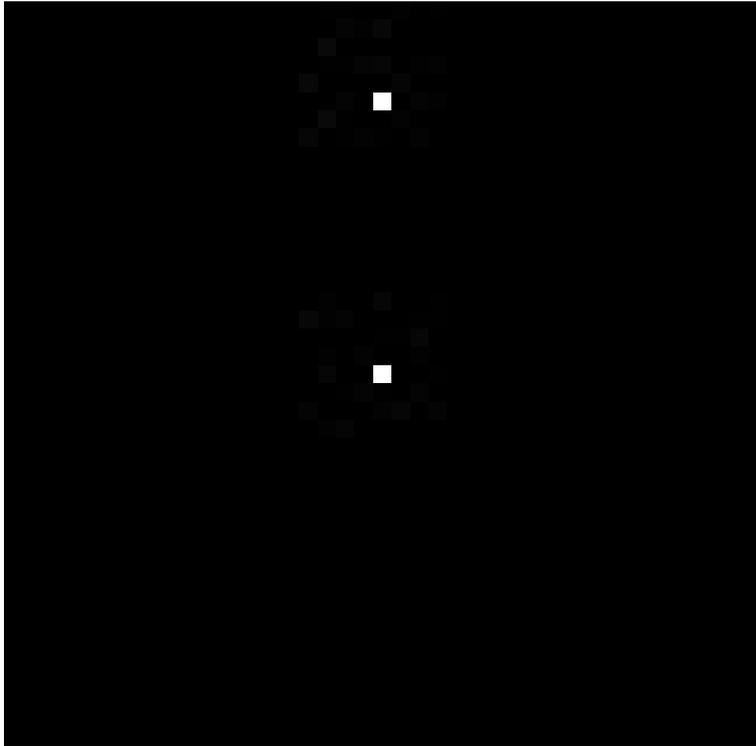


oggetto

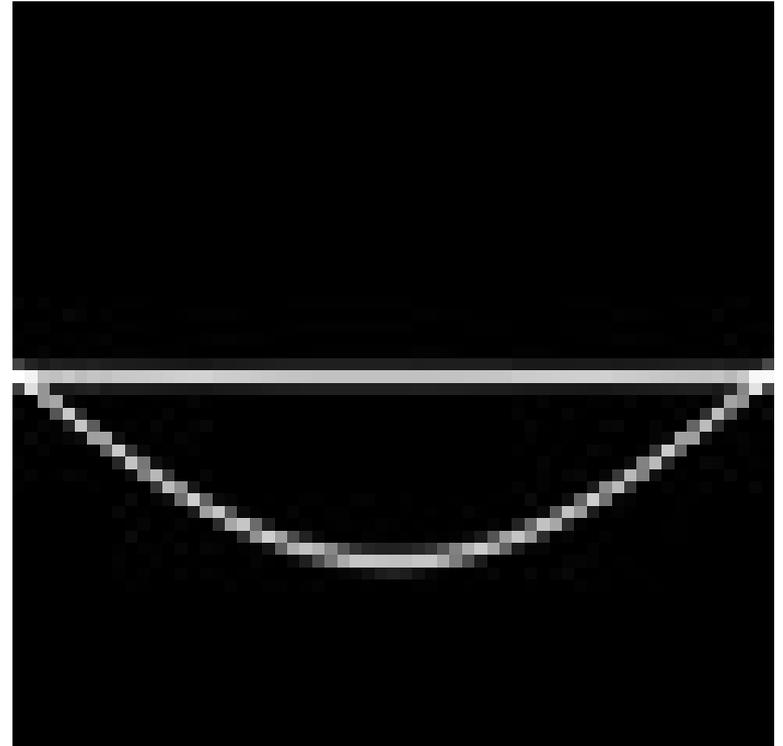


sinogramma

Sinogramma

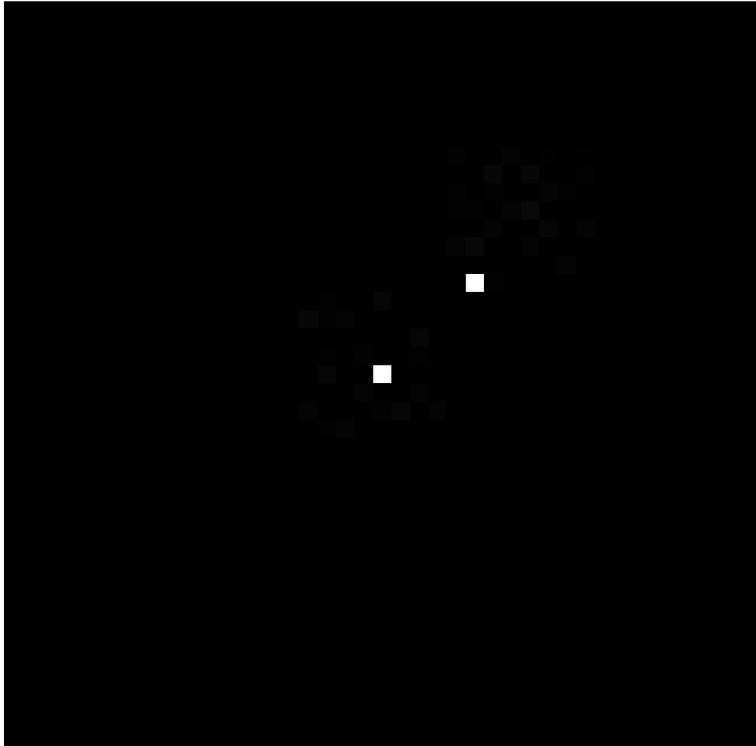


oggetto

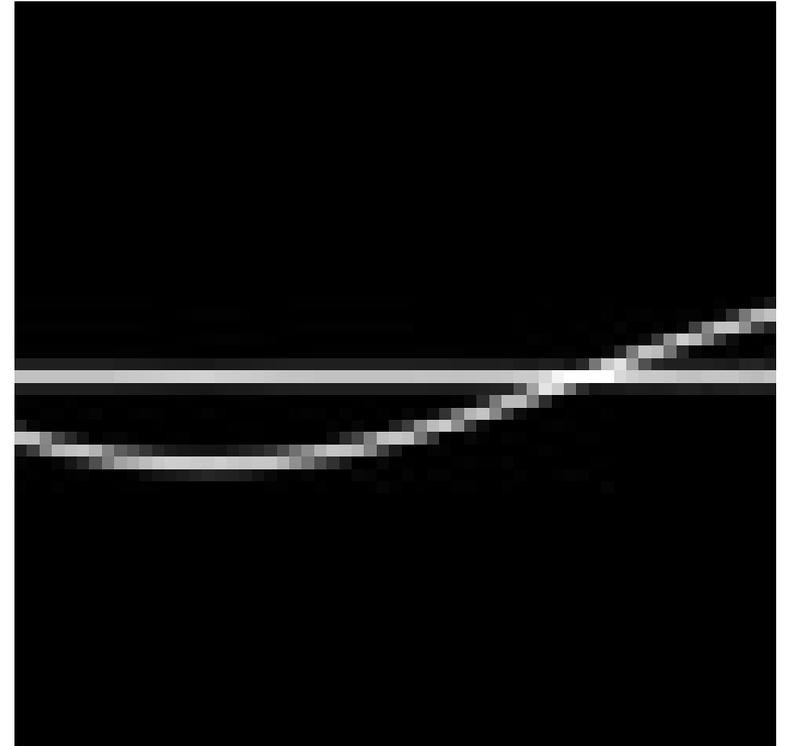


sinogramma

Sinogramma

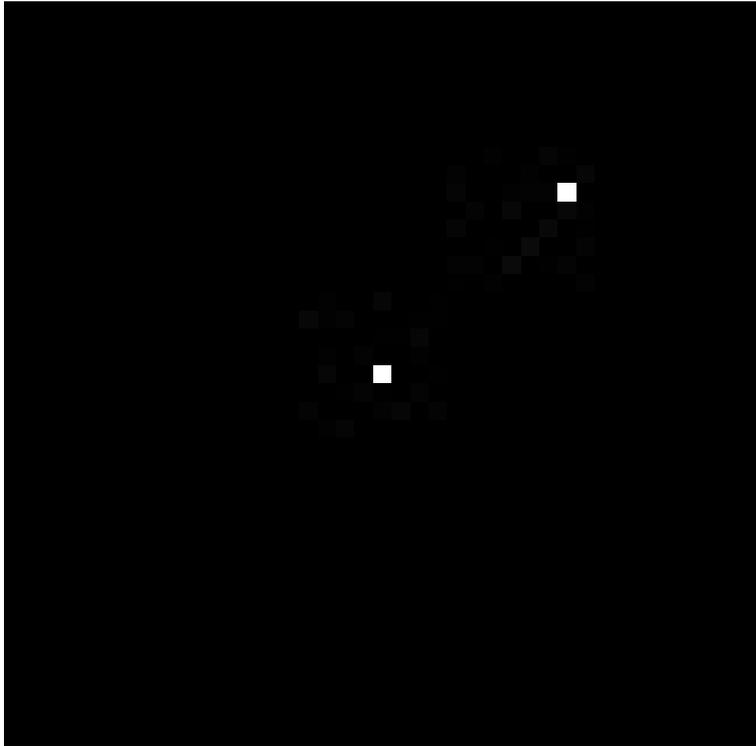


oggetto

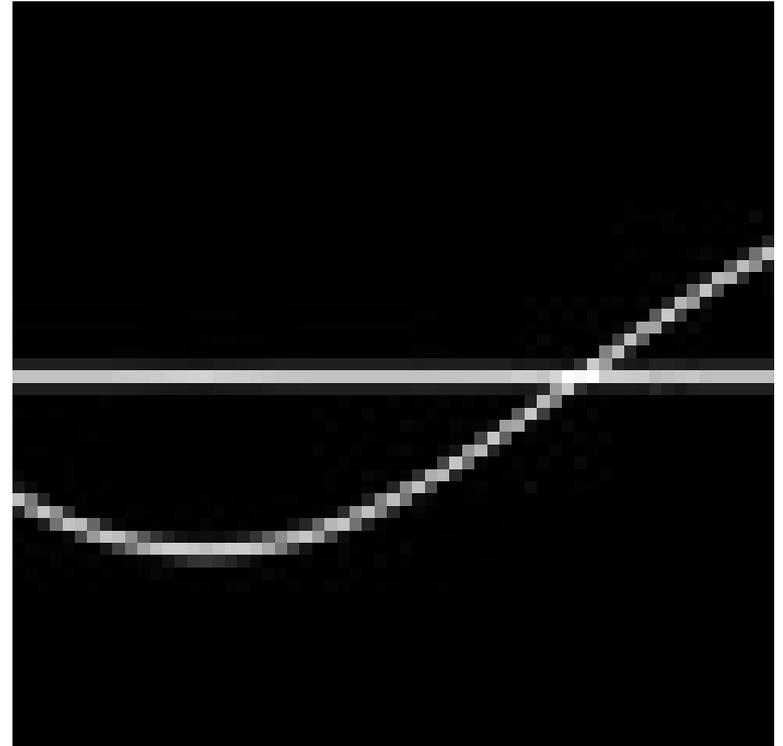


sinogramma

Sinogramma

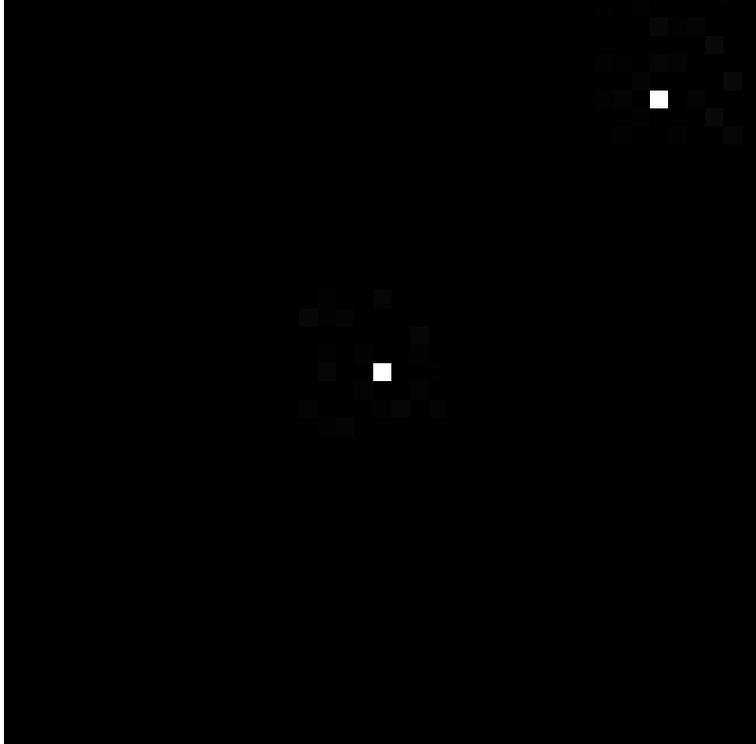


oggetto

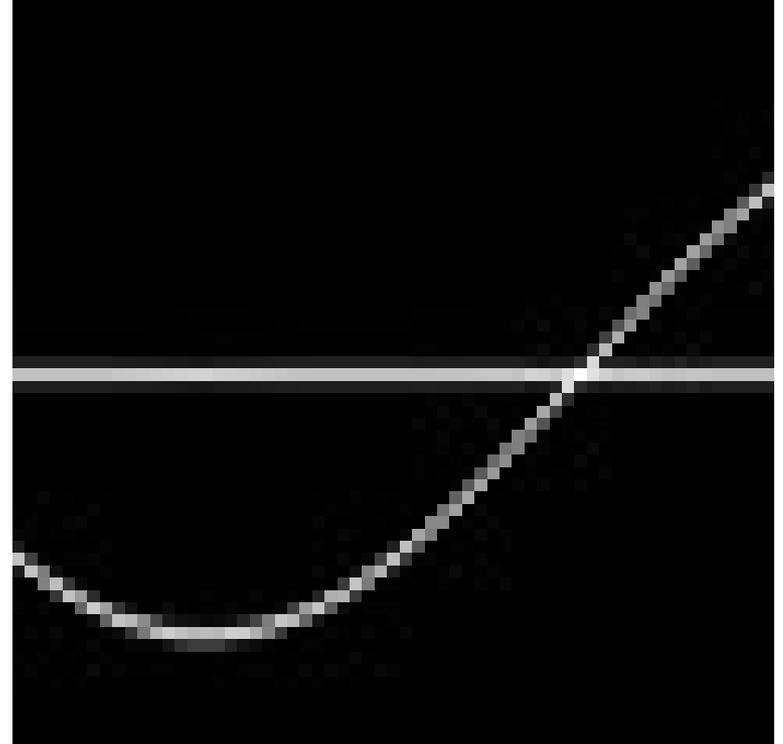


sinogramma

Sinogramma

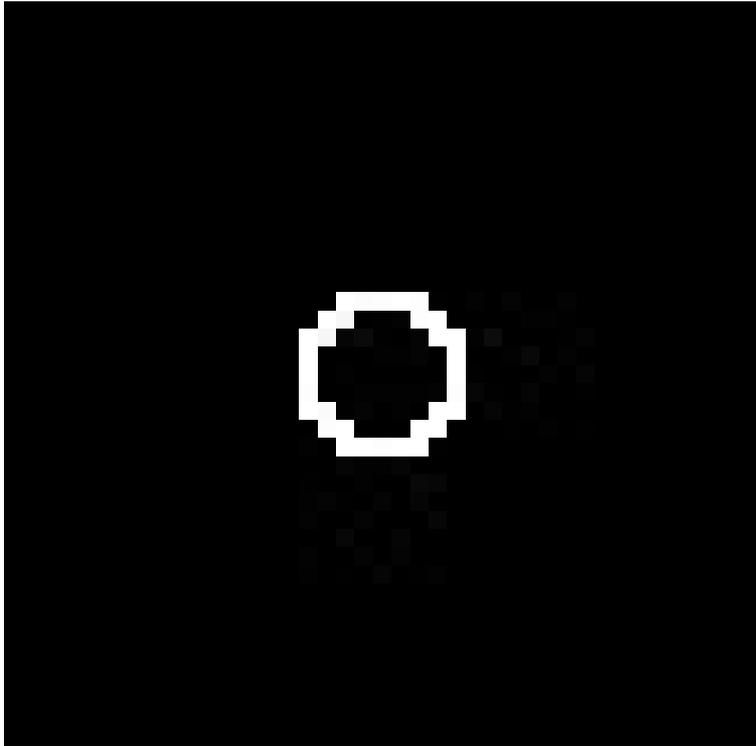


oggetto

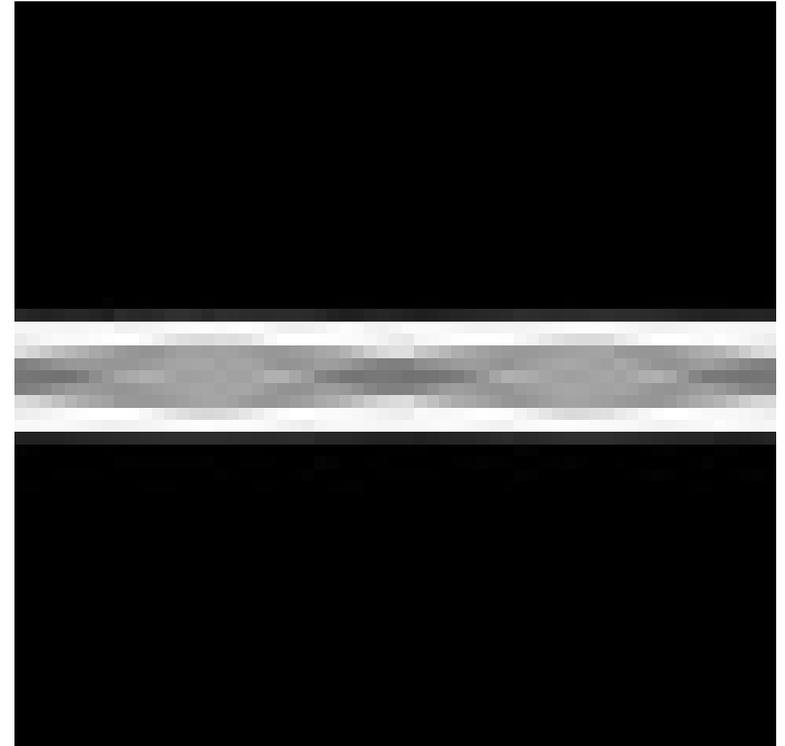


sinogramma

Sinogramma

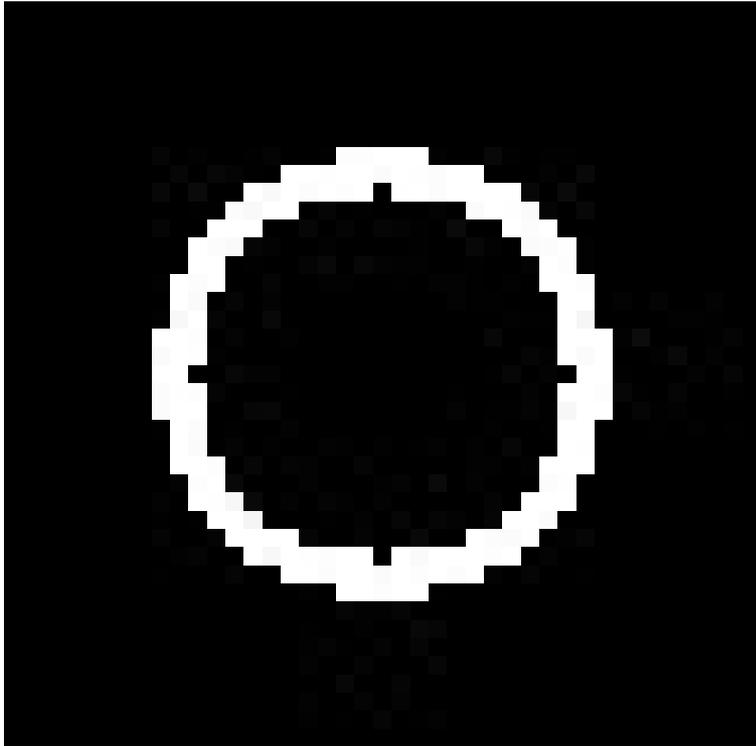


oggetto

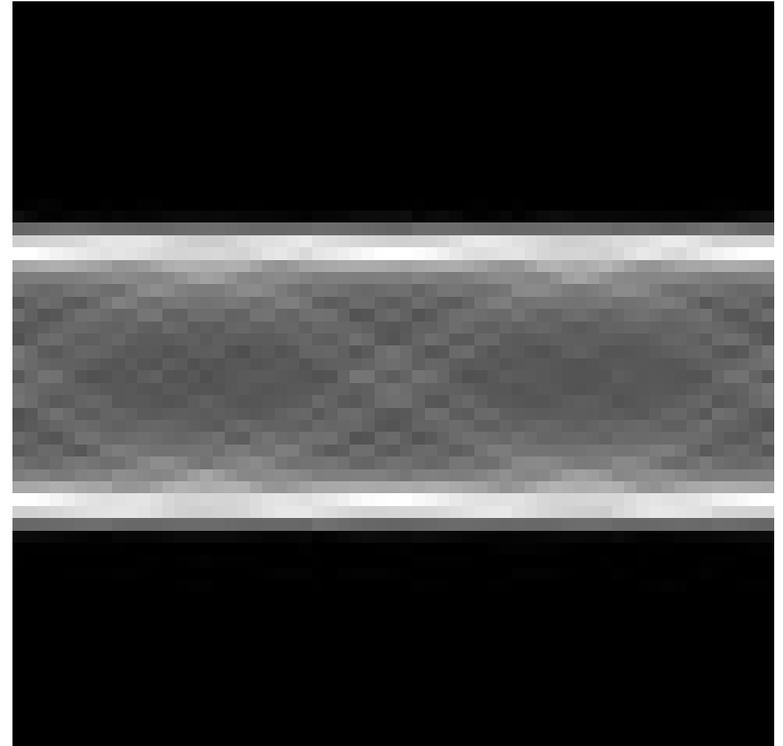


sinogramma

Sinogramma

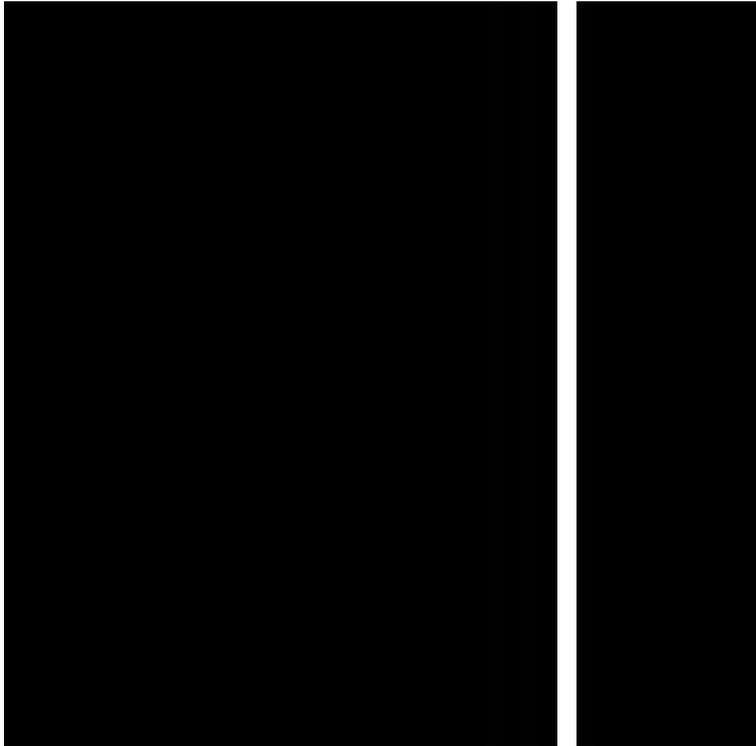


oggetto

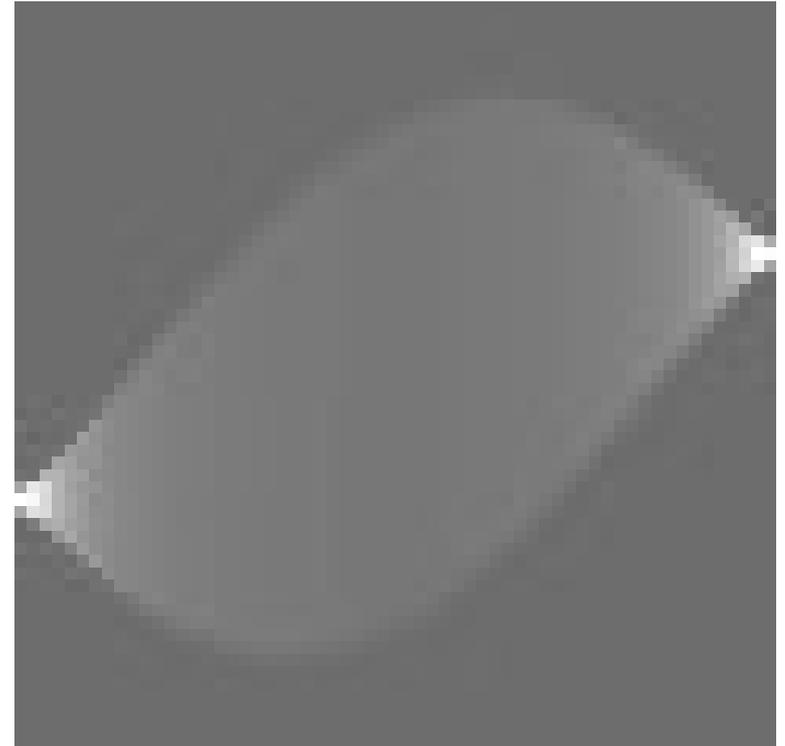


sinogramma

Sinogramma



oggetto

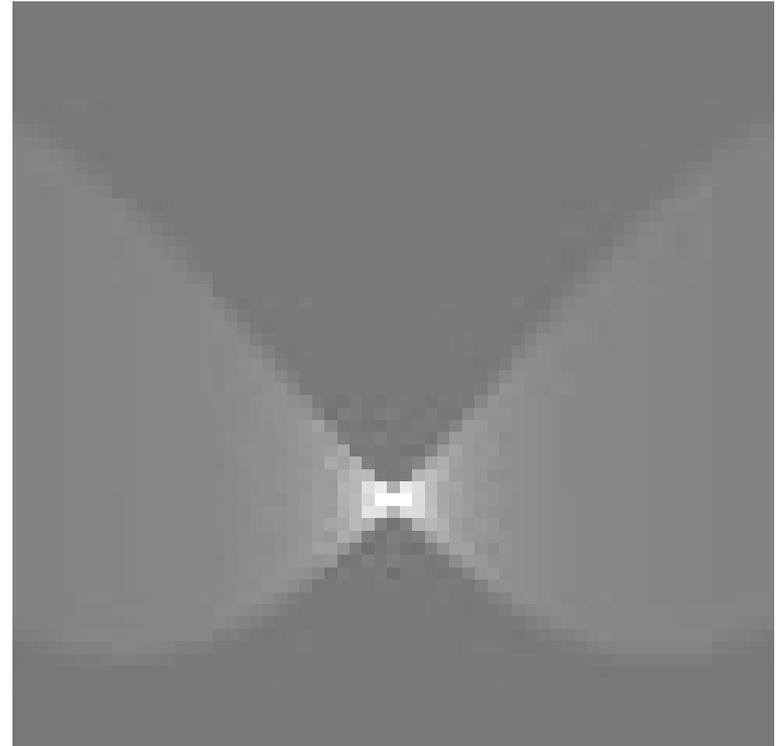


sinogramma

Sinogramma



oggetto

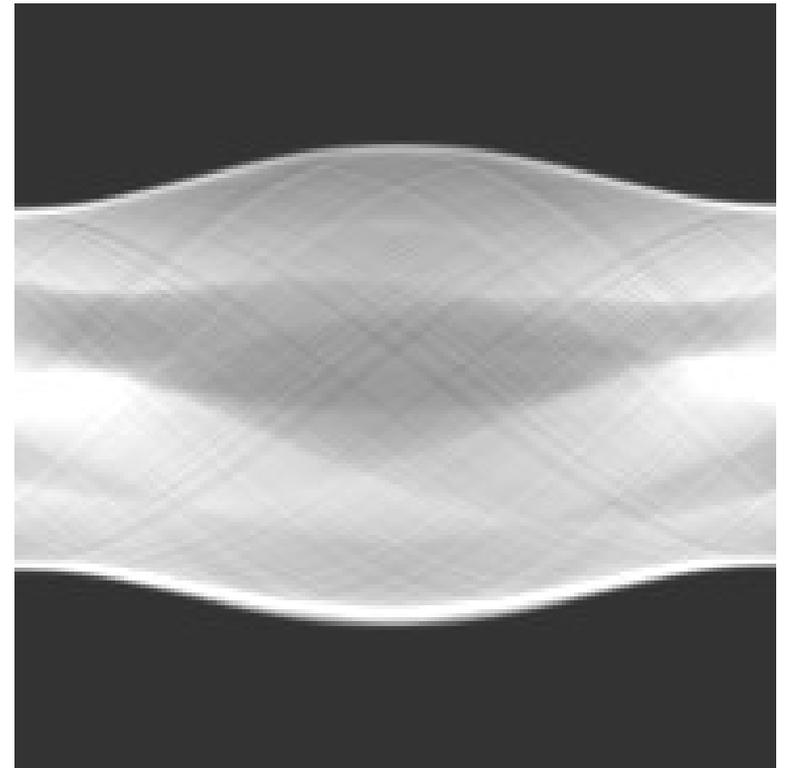


sinogramma

Sinogramma

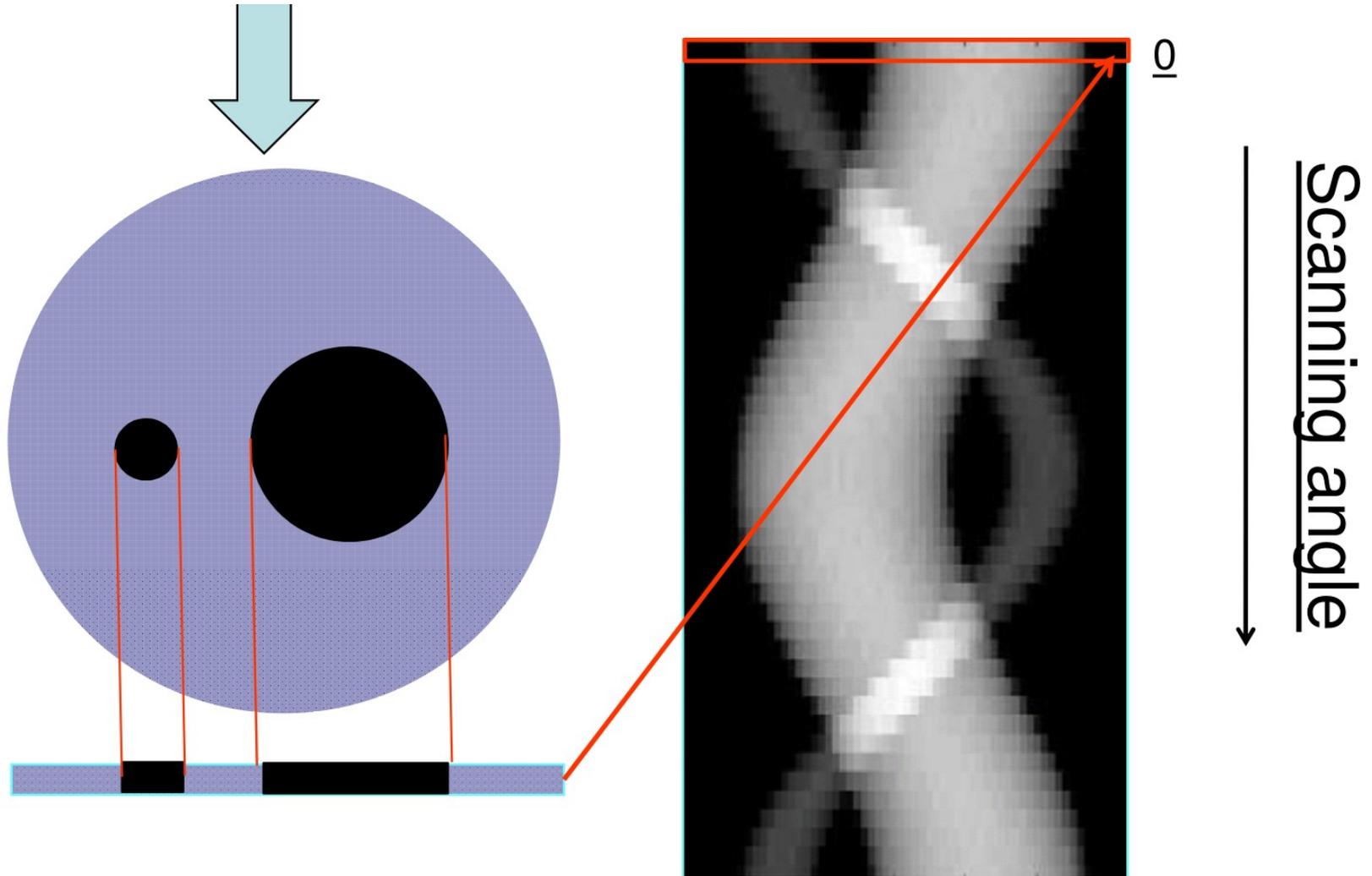


oggetto

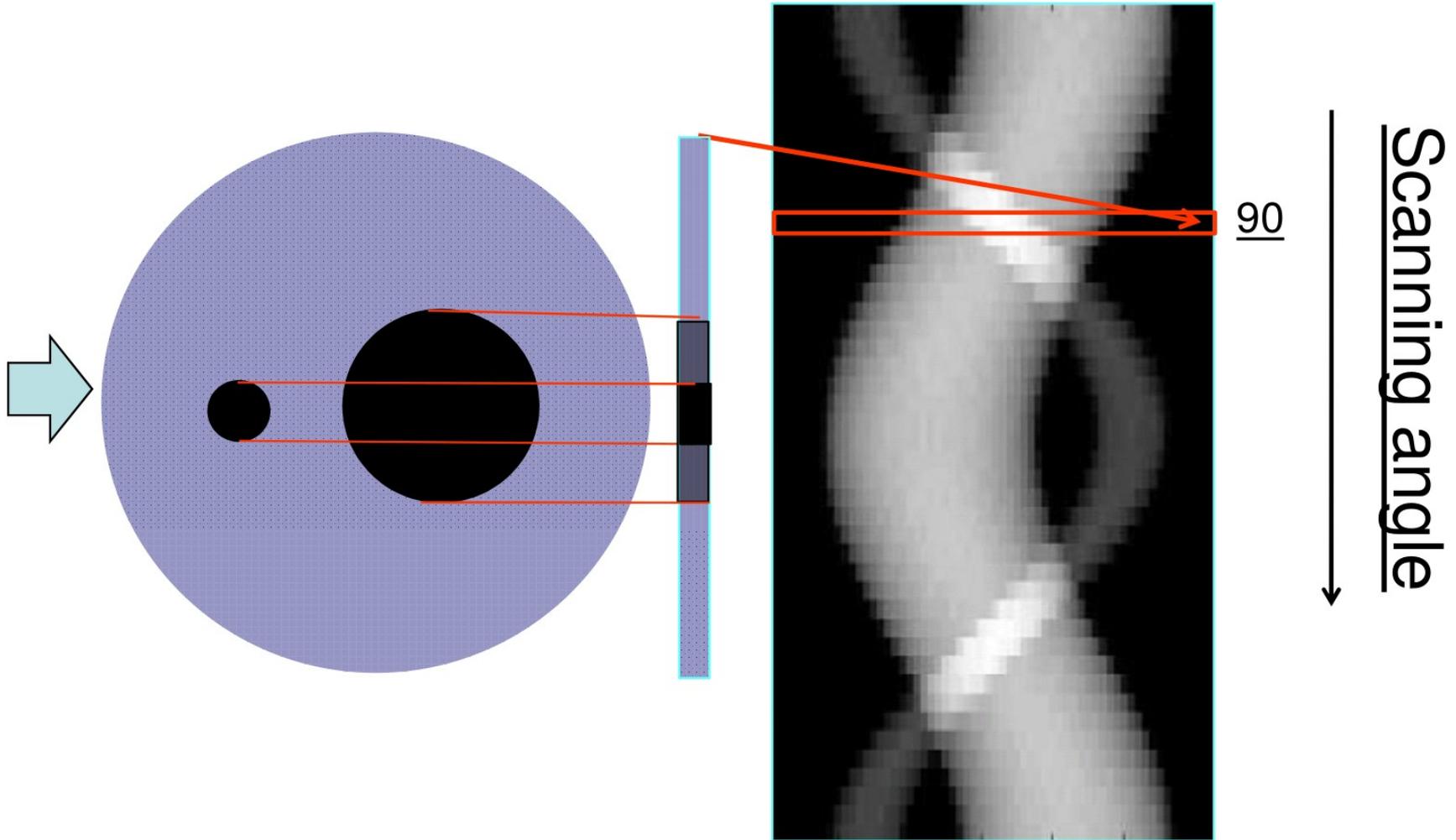


sinogramma

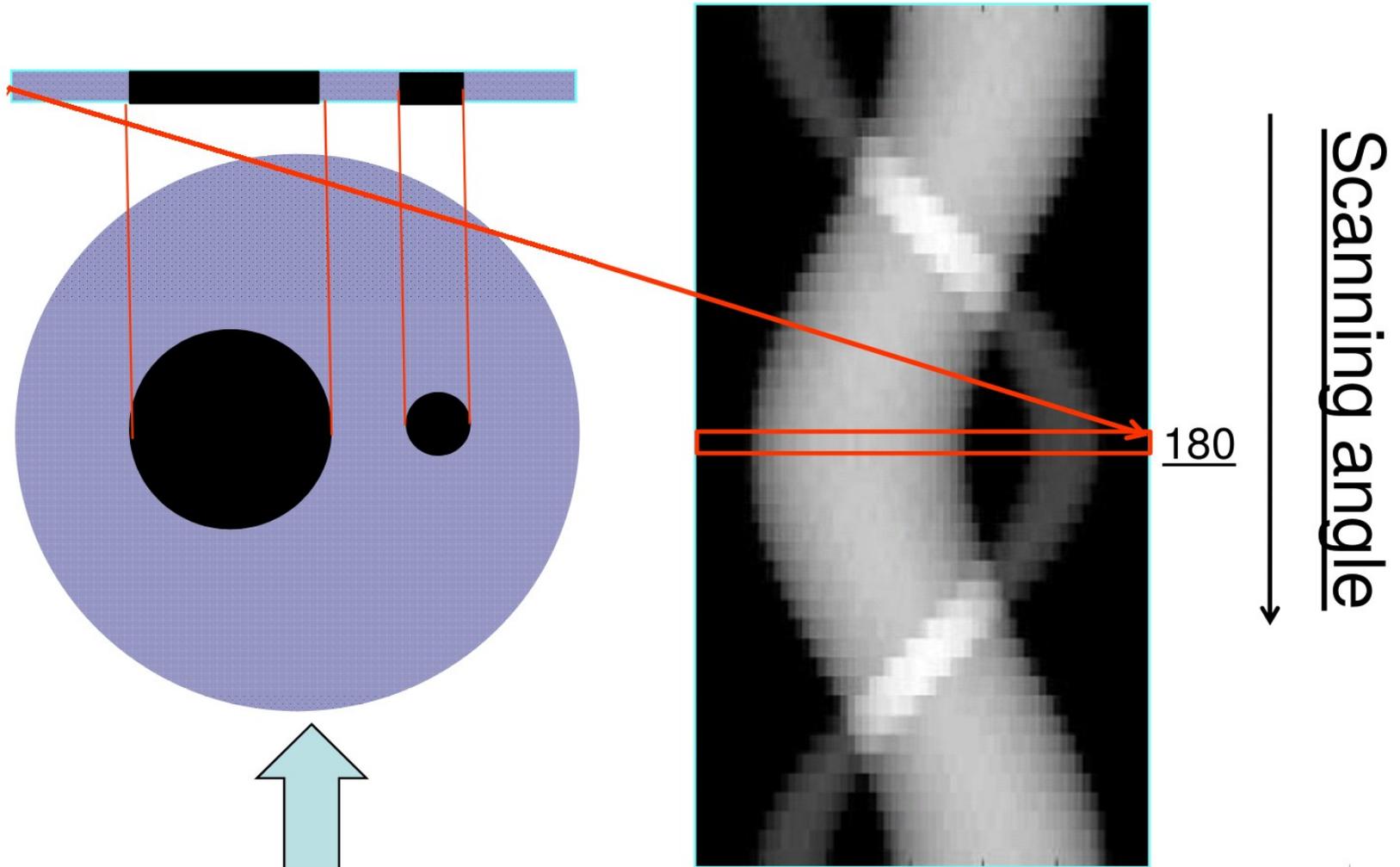
Sinogramma



Sinogramma



Sinogramma



Trasformata inversa

Partiamo dall'antitrasformata di Fourier 2D

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}[F(\omega_x, \omega_y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) \exp[i(x\omega_x + y\omega_y)] d\omega_x d\omega_y$$

Trasformata inversa

Partiamo dall'antitrasformata di Fourier 2D

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}[F(\omega_x, \omega_y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) \exp[i(x\omega_x + y\omega_y)] d\omega_x d\omega_y$$

Passando alle coordinate polari:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |J| d\omega d\varphi$$

Trasformata inversa

Partiamo dall'antitrasformata di Fourier 2D

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}[F(\omega_x, \omega_y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) \exp[i(x\omega_x + y\omega_y)] d\omega_x d\omega_y$$

Passando alle coordinate polari:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |J| d\omega d\varphi$$

dove lo Jacobiano è:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\omega \sin \varphi & \omega \cos \varphi \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \varphi + \omega \sin^2 \varphi = |\omega|$$



Trasformata inversa

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |\omega| d\omega d\varphi$$



Trasformata inversa

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |\omega| d\omega d\varphi$$

ricordando che, dal teorema della proiezione:

$$F(\omega, \varphi) = P_\varphi(\omega)$$

Trasformata inversa

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |\omega| d\omega d\varphi$$

ricordando che, dal teorema della proiezione:

$$F(\omega, \varphi) = P_{\varphi}(\omega)$$

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi$$



Trasformata inversa

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |\omega| d\omega d\varphi$$

ricordando che, dal teorema della proiezione:

$$F(\omega, \varphi) = P_{\varphi}(\omega)$$

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi$$

Antitrasformata di Fourier



Trasformata inversa

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \varphi) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] |\omega| d\omega d\varphi$$

ricordando che, dal teorema della proiezione:

$$F(\omega, \varphi) = P_{\varphi}(\omega)$$

otteniamo:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi$$

di un prodotto

Antitrasformata di Fourier



Trasformata inversa

pertanto:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^{*}(x') d\varphi$$

Trasformata inversa

pertanto:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

dove:

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

Trasformata inversa

pertanto:

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

dove:

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

riunendo:

$$\hat{f}(x, y) = \beta \{ \wp \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \} \} = \mathfrak{R}^{-1} \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \}$$

Trasformata inversa

pertanto:

Proiezione filtrata

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

dove:

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

riunendo:

$$\hat{f}(x, y) = \beta \{ \wp \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \} \} = \mathfrak{R}^{-1} \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \}$$

Trasformata inversa

pertanto:

Proiezione filtrata

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

operatore di retroproiezione

dove:

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

riunendo:

$$\hat{f}(x, y) = \beta \{ \wp \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \} \} = \mathfrak{R}^{-1} \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \}$$

Trasformata inversa

pertanto:

Proiezione filtrata

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

dove:

segnale ricostruito

operatore di retroproiezione

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

riunendo:

$$\hat{f}(x, y) = \beta \{ \wp \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \} \} = \mathfrak{R}^{-1} \{ \mathfrak{R}[f(x, y)] \}$$

Trasformata inversa

pertanto:

Proiezione filtrata

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

dove:

segnale ricostruito

operatore di retroproiezione

segnale trasformato

operatore di filtraggio

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] \equiv \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

riunendo:

$$\hat{f}(x, y) = \beta \{ \wp \{ \mathcal{R}[f(x, y)] \} \} = \mathcal{R}^{-1} \{ \mathcal{R}[f(x, y)] \}$$

Trasformata inversa

pertanto:

Proiezione filtrata

$$\hat{f}(r, \theta) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\omega d\varphi = \int_0^{\pi} p_{\varphi}^*(x') d\varphi$$

dove:

segnale ricostruito

operatore di retroproiezione

segnale trasformato

operatore di filtraggio

$$p_{\varphi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P_{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x') d\omega = \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega| P_{\varphi}(\omega)] \equiv \mathcal{F}_1^{-1}[|\omega|] * p_{\varphi}(x')$$

riunendo:

$$\hat{f}(x, y) = \beta \{ \wp \{ \mathcal{R}[f(x, y)] \} \} = \mathcal{R}^{-1} \{ \mathcal{R}[f(x, y)] \}$$

operatore di retroproiezione

Trasformata Radon

operatore di filtraggio



Algoritmo Filtered BackProjection (FBP)

1. Proiezione del dato originale (sinogramma).
2. Trasformazione del dato nel dominio di Fourier.
3. Filtraggio del dato nel dominio delle frequenze.
4. Trasformazione nel dominio spaziale (trasformata inversa di Fourier).
5. Retroproiezione.

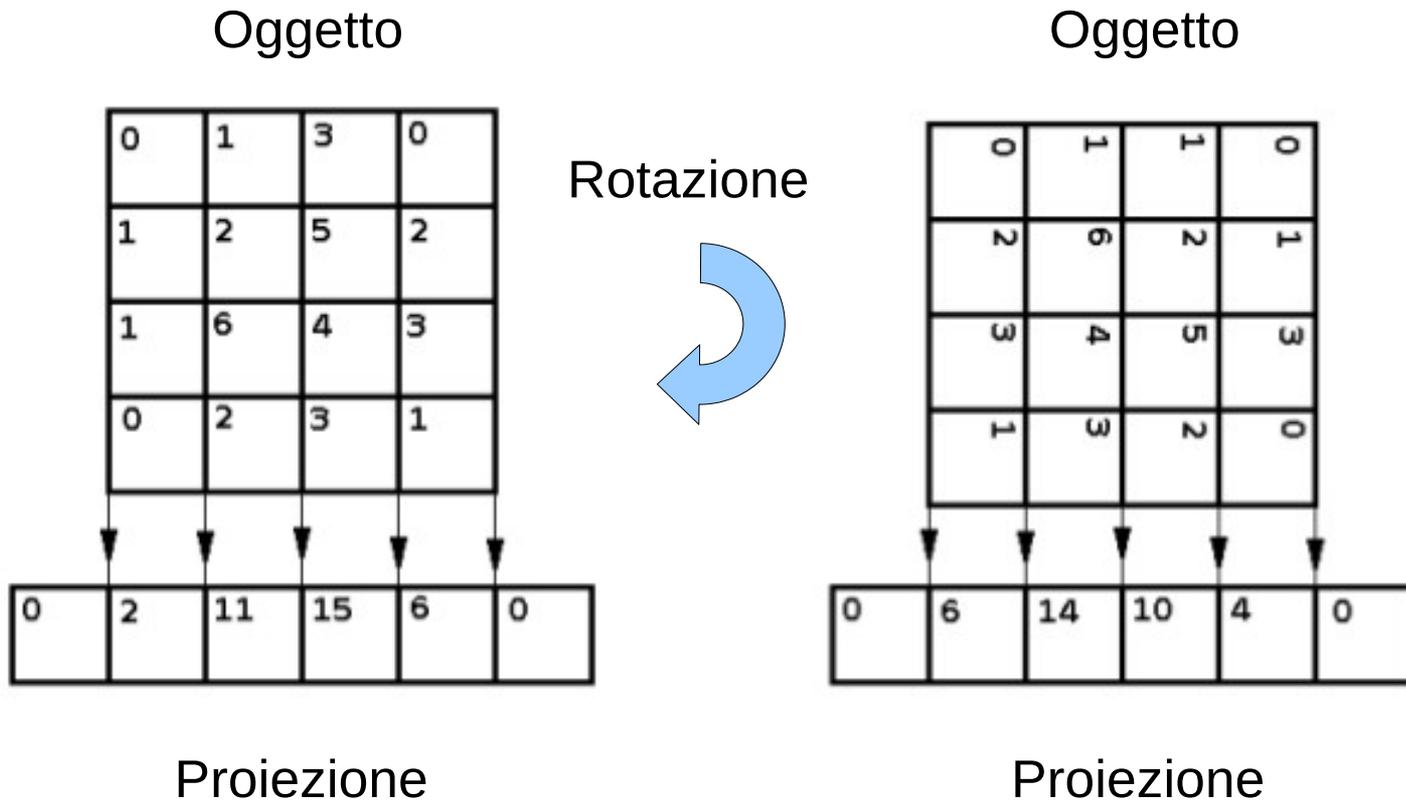


Perché filtrare

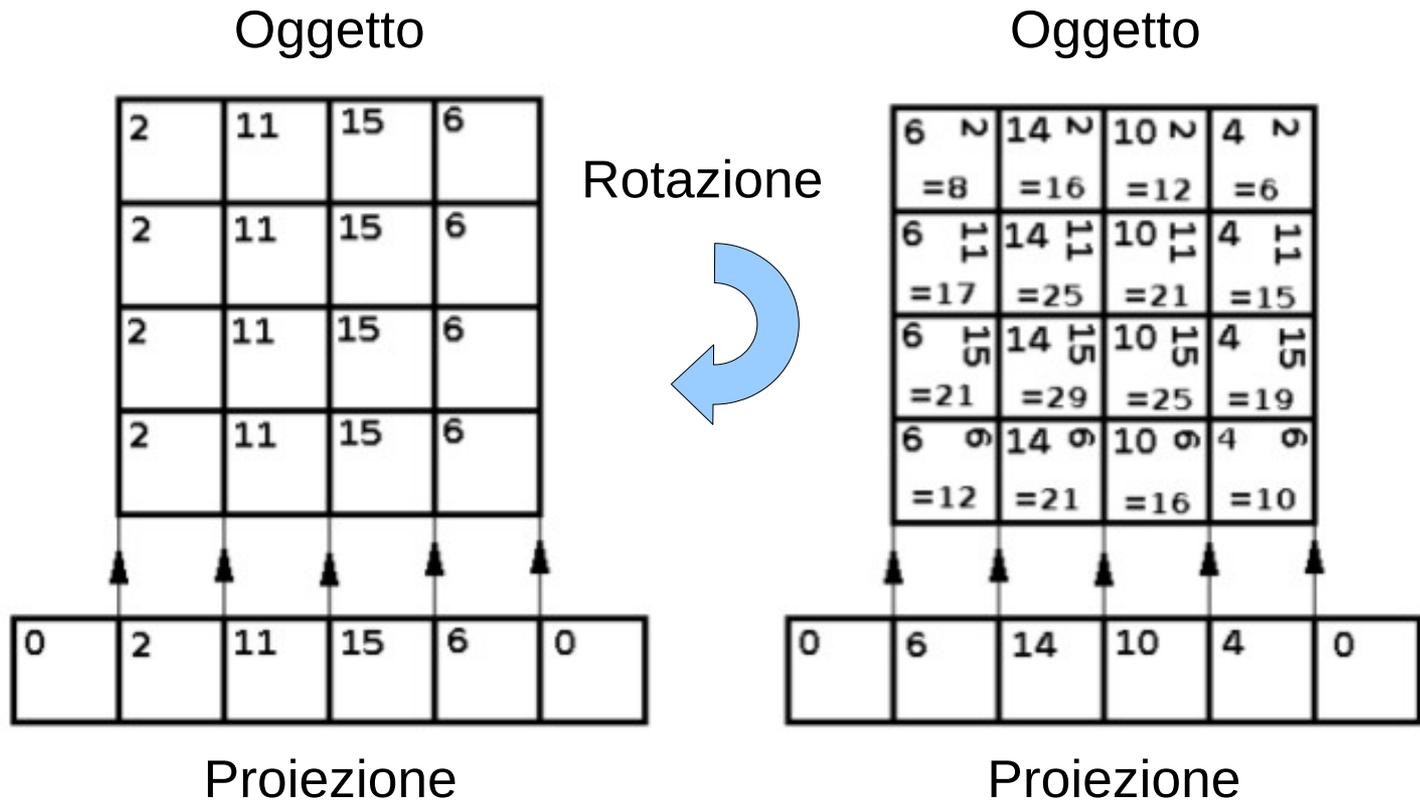
1. FBP intrinsecamente amplifica i segnali a bassa frequenza.
2. Rumore associato al dato (natura stocastica delle onde ionizzanti).
3. Filtrare nel dominio di Fourier è più efficiente rispetto al dominio spaziale.



Esempio di Trasformata Radon

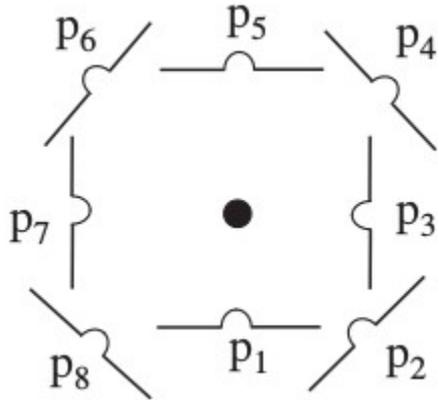


Esempio di Antitrasformata Radon

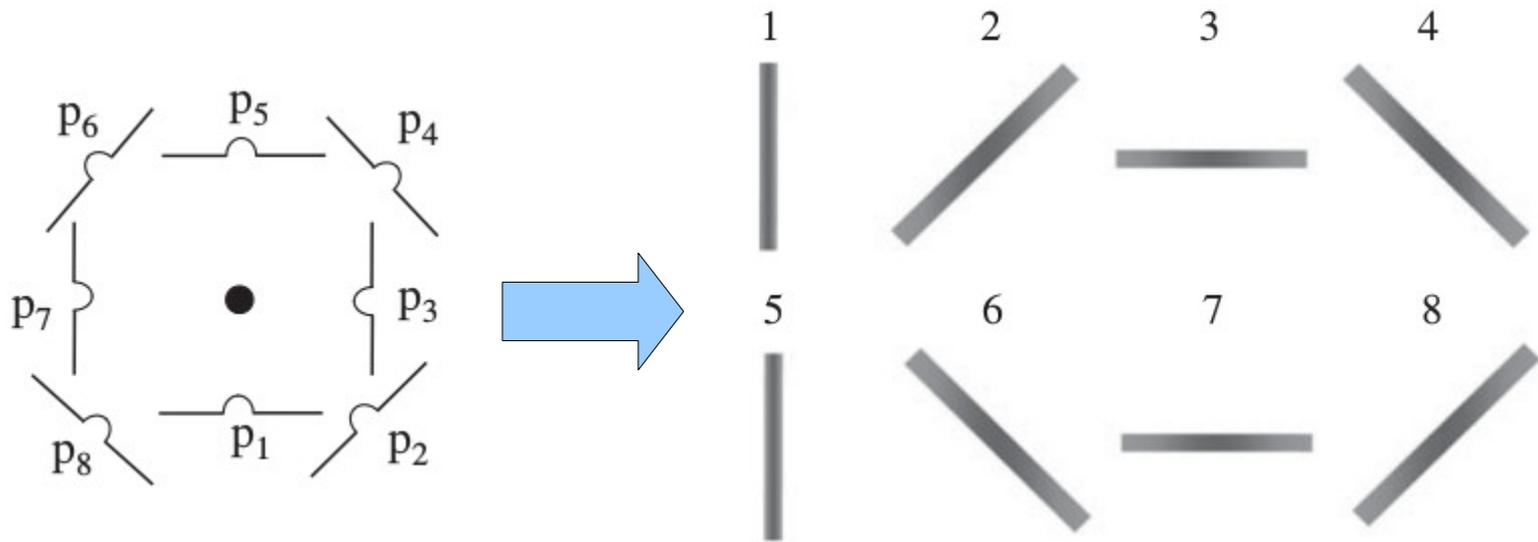


Caso senza filtraggio

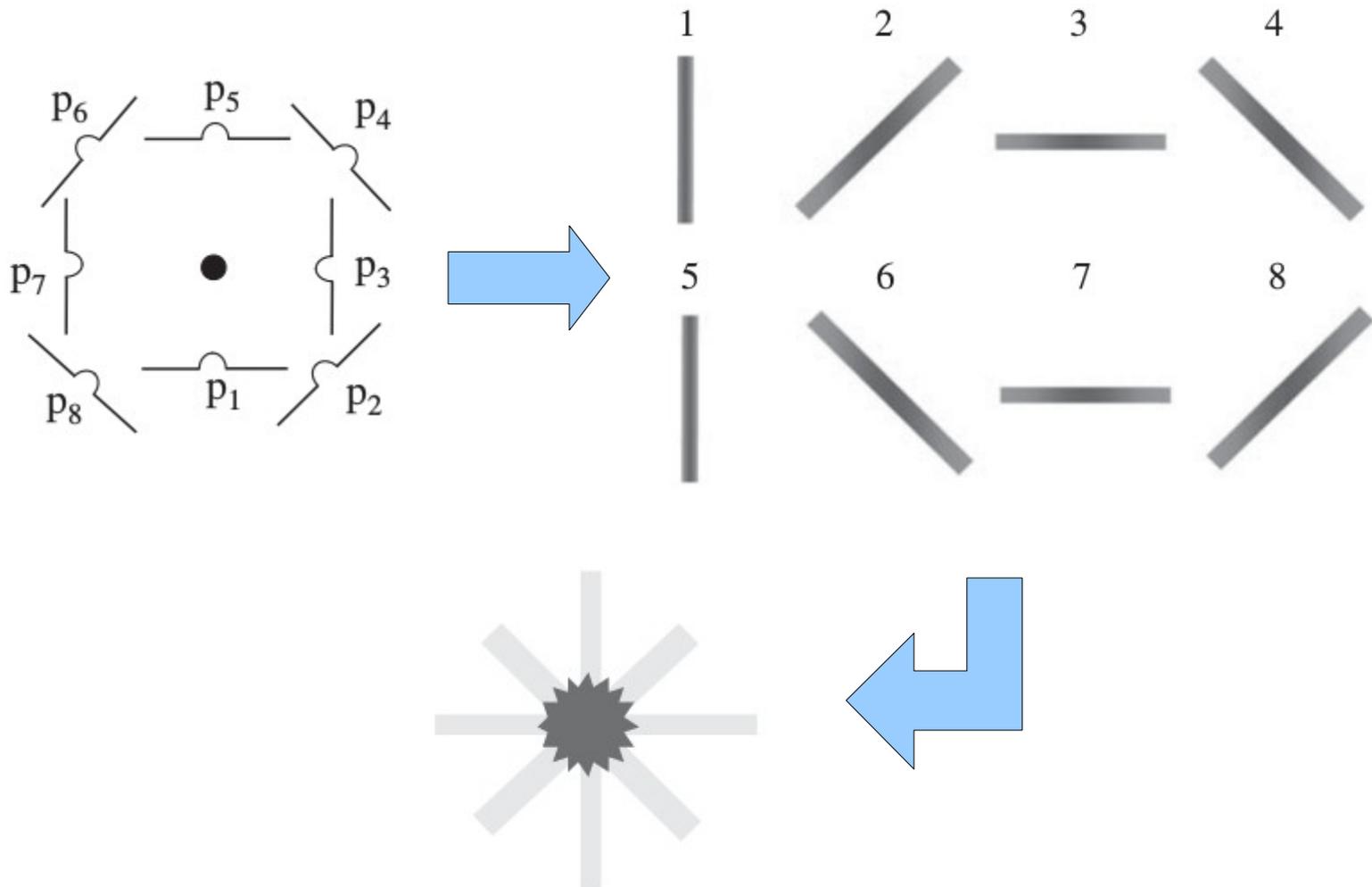
Esempio di Antitrasformata Radon



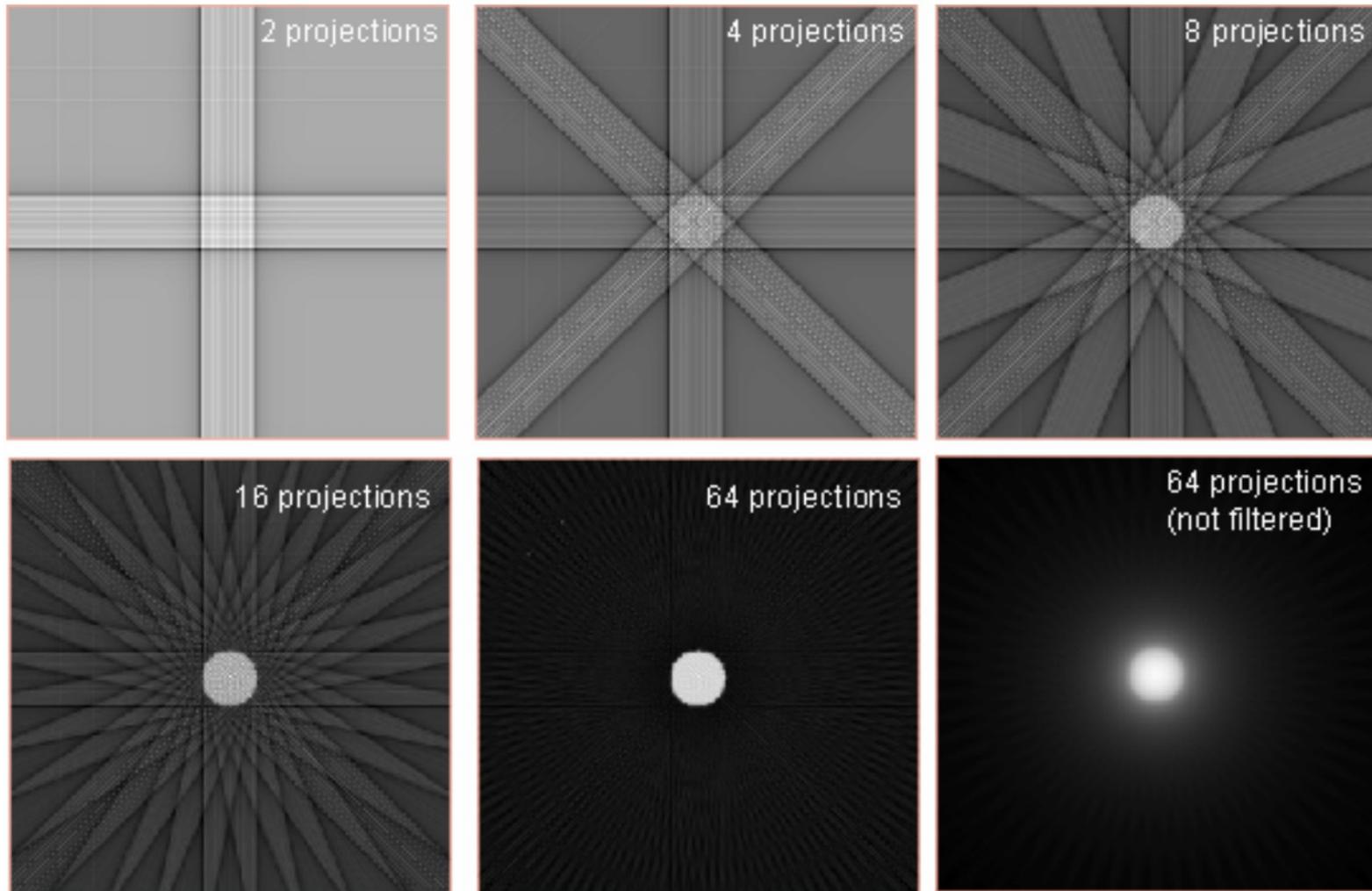
Esempio di Antitrasformata Radon



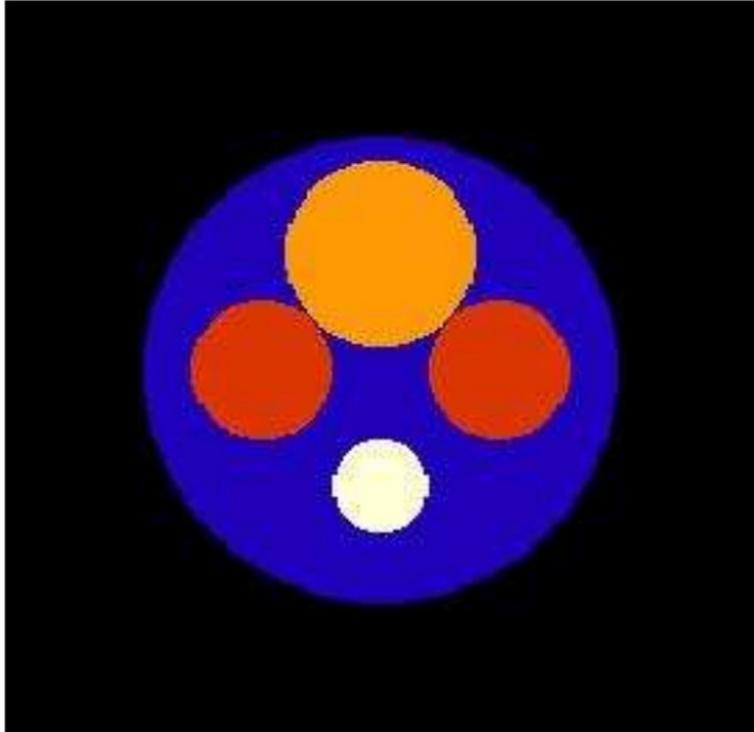
Esempio di Antitrasformata Radon



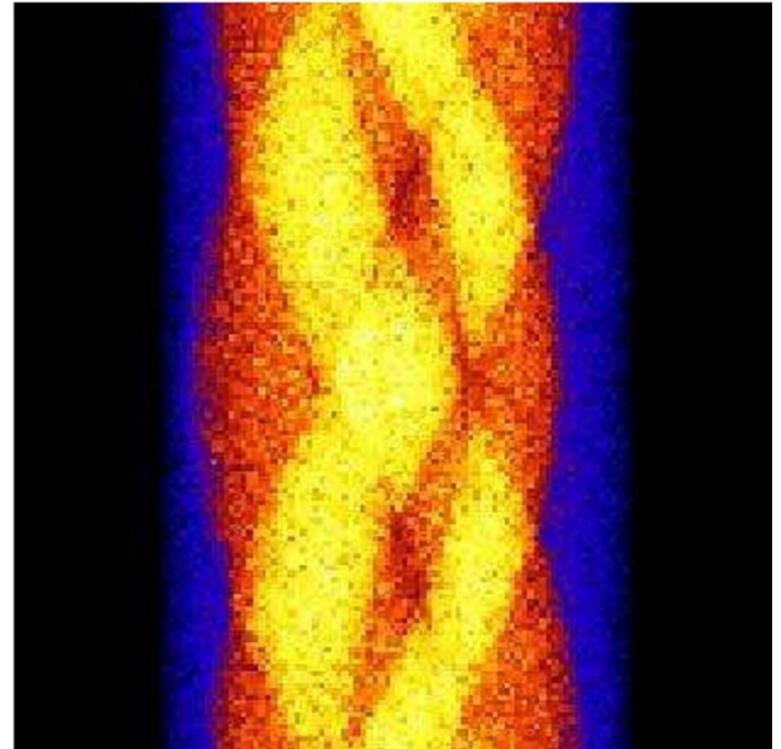
Esempio di Antitrasformata Radon



Sinogramma

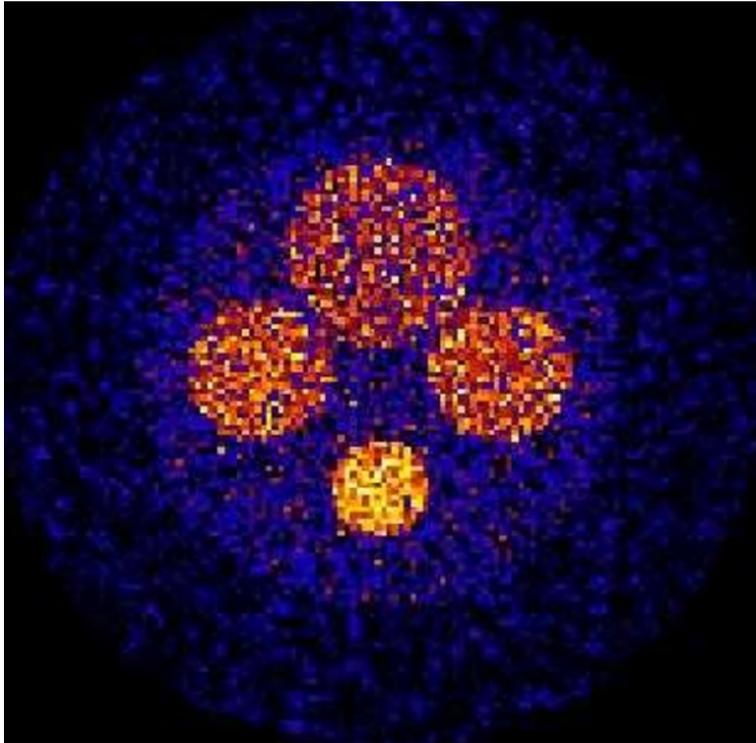


oggetto

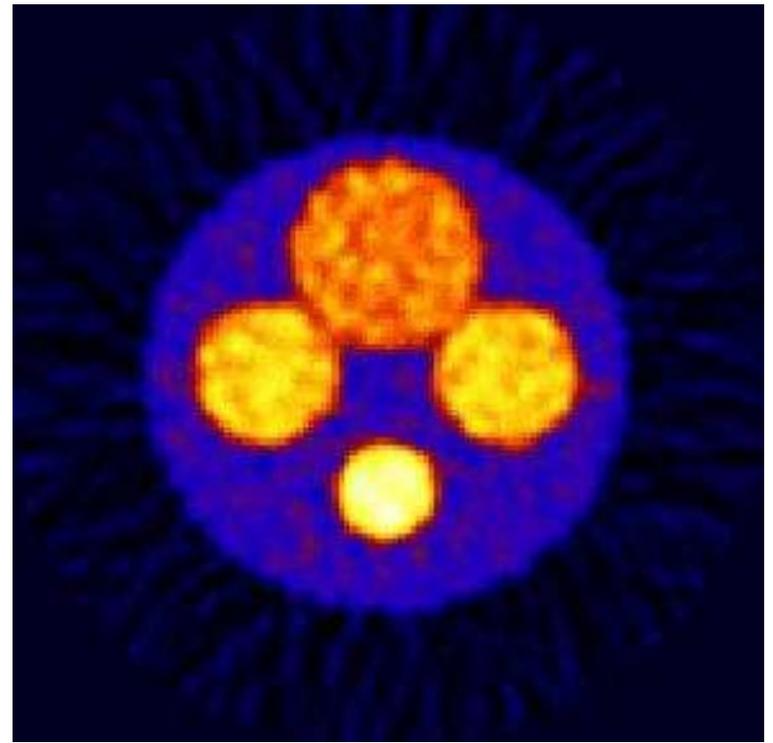


sinogramma

Filtered Back-Projection



Non filtrato



filtrato

Finestre di Filtraggio

Filtro di Ramachandran – Lakshiminarayanan (“**Ram-Lak**”)

Si applica per ricostruire immagini $f(x, y)$ limitate nello spettro alla frequenza spaziale B .

$$H_{RL}(\omega) = \begin{cases} |\omega|, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Finestre di Filtraggio

Filtro di Ramachandran – Lakshiminarayanan (“**Ram-Lak**”)

Si applica per ricostruire immagini $f(x, y)$ limitate nello spettro alla frequenza spaziale B .

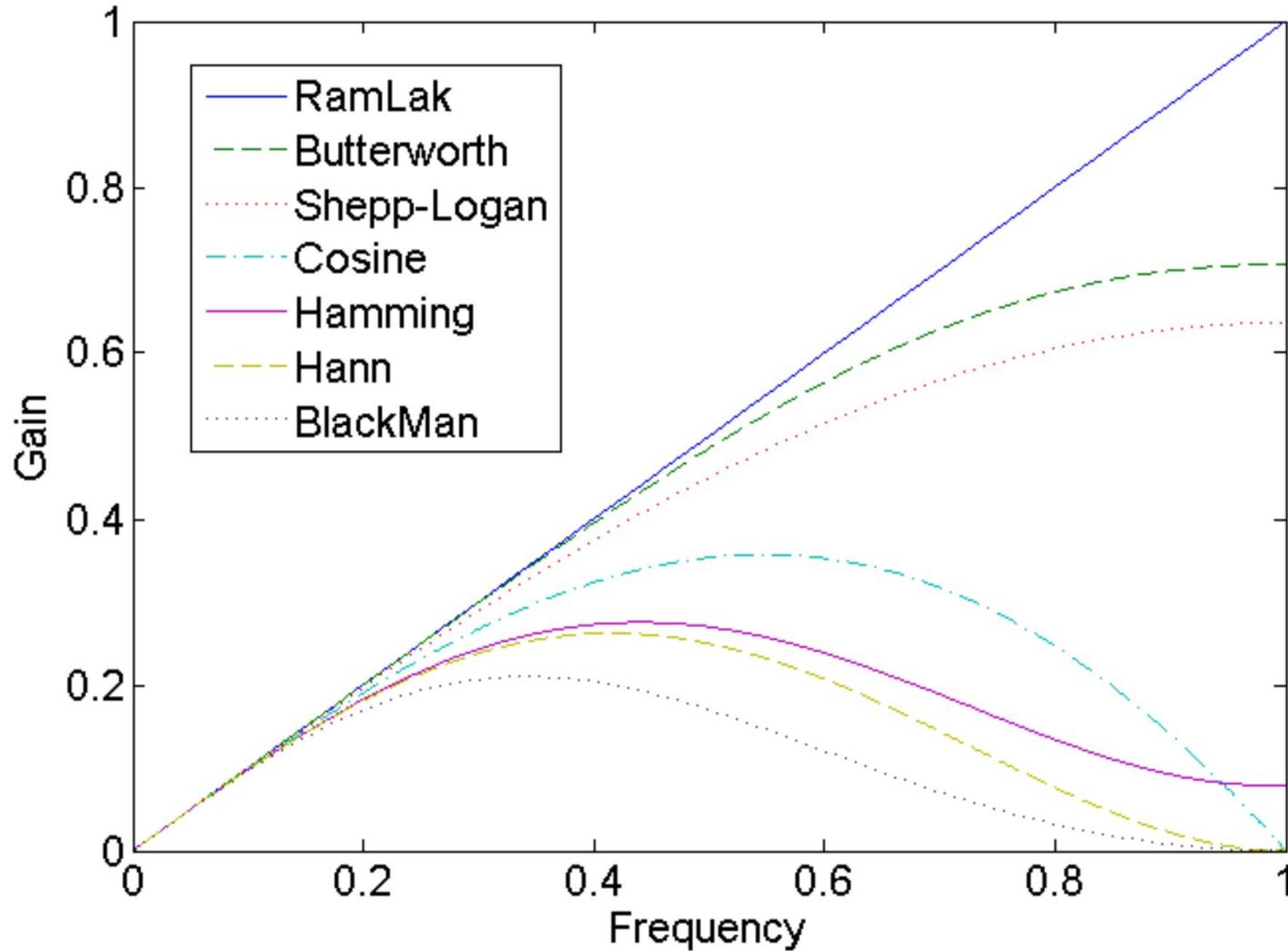
$$H_{RL}(\omega) = \begin{cases} |\omega|, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Filtro di **Shepp – Logan**

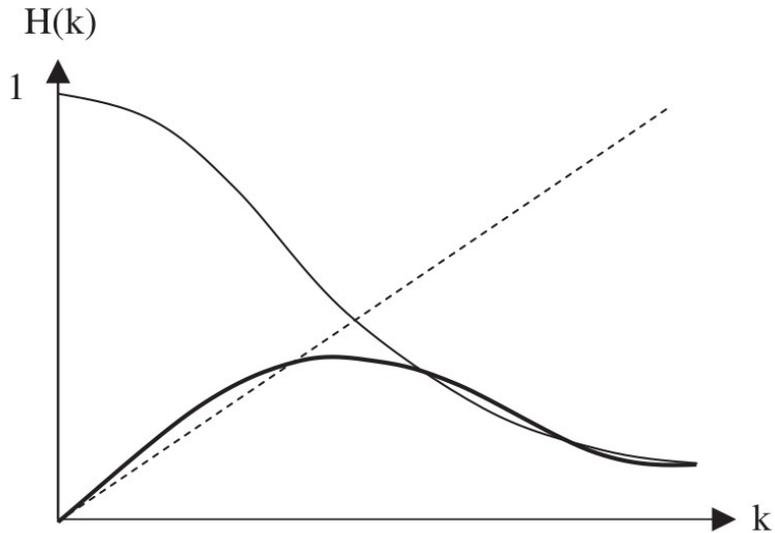
$$H_{SL}(\omega) = \begin{cases} |\omega| \sin\left(\frac{\omega}{4B}\right), & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Finestre di Filtraggio

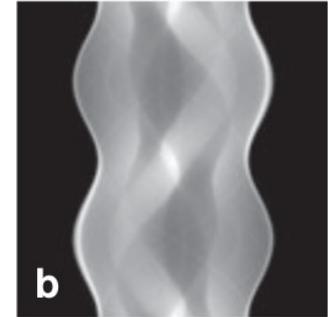


Finestre di Filtraggio



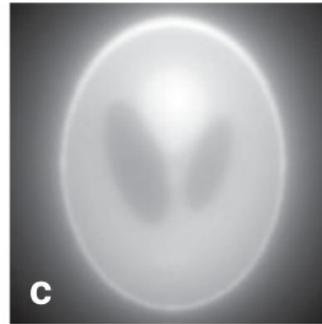
a

Oggetto



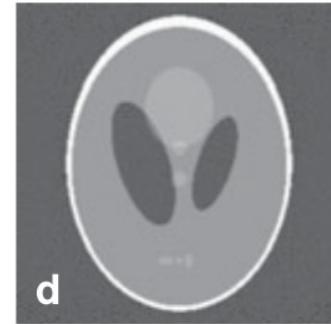
b

Sinogramma



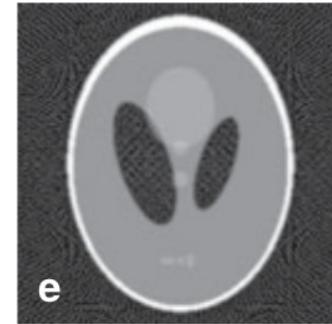
c

Senza
filtro



d

Ram-Lak



e

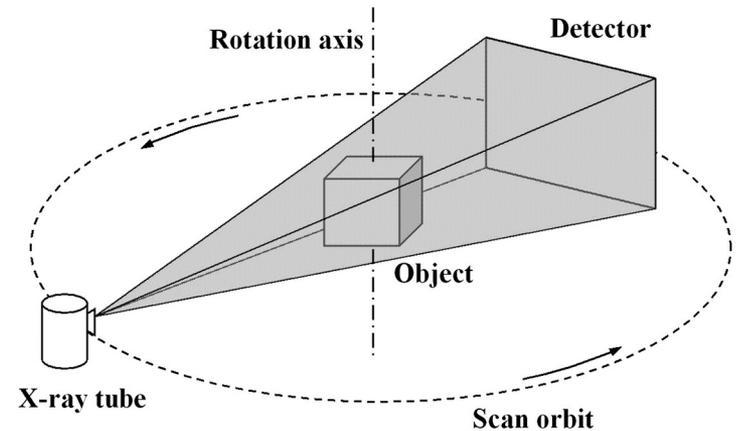
Passa
banda

Algoritmo Backprojection Filtering (BF)

É basato sul filtraggio a valle della retroproiezione. In particolare, a valle del calcolo della retroproiezione si filtra l'effetto $1/r$ blur.

Prima del filtro, avremo:

$$b(x, y) = f(x, y) ** \left(\frac{1}{r} \right)$$



Qualitativamente i risultati sono peggiori rispetto ad FBP.