

Trasformata di Fourier 2D

Strumentazione biomedica e bioimmagini

***Laurea in
Ingegneria Informatica, Biomedica e delle Telecomunicazioni***

Fabio Baselice



Sommario

- Trasformata di Fourier 2D



Trasformata Discreta di Fourier - 2D

La Trasformata bidimensionale di Fourier (FT) è usata principalmente per 3 scopi nell'elaborazione delle immagini:

- Studiare ed evitare le distorsioni introdotte dal sottocampionamento.
- Riduzione di alcuni tipi di rumore e deblurring.
- Feature detection (es. detection dei bordi) e miglioramento dell'immagine.

Trasformata Continua di Fourier - Richiamo

La trasformata continua di Fourier per un segnale monodimensionale $f(x)$ è definita dall'equazione:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi u x} dx$$

Mentre l'antitrasformata è pari a:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{+i2\pi u x} du$$

Trasformata Continua di Fourier - 2D

Possiamo proiettare un segnale bidimensionale $f(x, y)$ nello spazio degli esponenziali complessi bidimensionali $e^{-i 2\pi(ux + vy)}$, ottenendo

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i 2\pi(ux + vy)} dx dy$$

e come antitrasformata

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{+i 2\pi(ux + vy)} du dv$$

Trasformata Discreta di Fourier - 1D

Un segnale discreto h_k di N campioni ($k=0,1,2,\dots,N-1$) può essere rappresentato come somma di N esponenziali complessi $e^{-i2\pi kn/N}$, $n=0,1,2,\dots,N-1$

$$h_k = \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{i2\pi kn/N}$$

dove gli H_n sono i coefficienti di Fourier, ovvero le proiezioni del segnale h_k sugli esponenziali:

$$H_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi kn/N}$$

Trasformata Discreta di Fourier - 2D

Rispetto alla trasformata monodimensionale di Fourier, le basi del dominio trasformato sono esponenziali complessi bidimensionali

$$e^{+i2\pi\frac{kn}{N}} \quad \longrightarrow \quad e^{+i2\pi\left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M}\right)}$$

Eq. sintesi

$$h_{mn} = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} H_{lk} e^{+i2\pi\left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M}\right)}$$

Eq. analisi

$$H_{lk} = \frac{1}{M N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h_{mn} e^{-i2\pi\left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M}\right)}$$

per h_{mn} ad energia finita.



Trasformata Discreta di Fourier - 2D



La trasf. 2D continua assume che l'immagine sia una porzione di un piano infinito.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{+i2\pi(ux+vy)} du dv$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Trasformata Discreta di Fourier - 2D



La trasf. 2D discreta assume che l'immagine esista su una superficie chiusa, un toroide.

$$h_{mn} = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} H_{lk} e^{+i2\pi \left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M} \right)}$$
$$H_{lk} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h_{mn} e^{-i2\pi \left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M} \right)}$$

Frequenze Spaziali

Gli esponenziali complessi bidimensionali (il kernel della DFT) sono sinusoidi e cosinusoidi 2D. Dato che le immagini sono definite nello spazio, parliamo di frequenze spaziali

$$e^{+i2\pi\left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M}\right)} = \left[\cos\left(2\pi\frac{kn}{N}\right) + i \sin\left(2\pi\frac{kn}{N}\right) \right] \cdot \left[\cos\left(2\pi\frac{lm}{M}\right) + i \sin\left(2\pi\frac{lm}{M}\right) \right]$$

Frequency: The number of times that a periodic function repeats the same sequence of values during a unit variation of the independent variable.

Webster's New Collegiate Dictionary

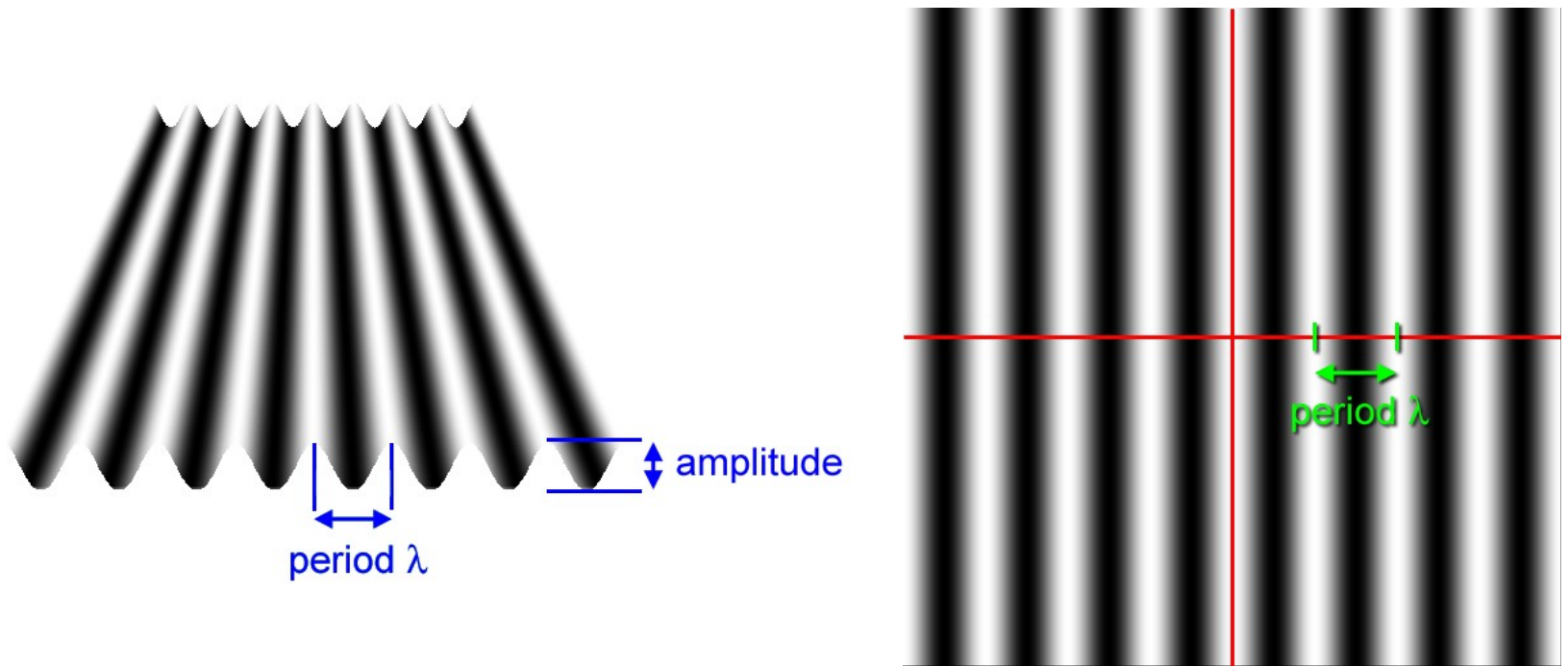


Frequenze Spaziali



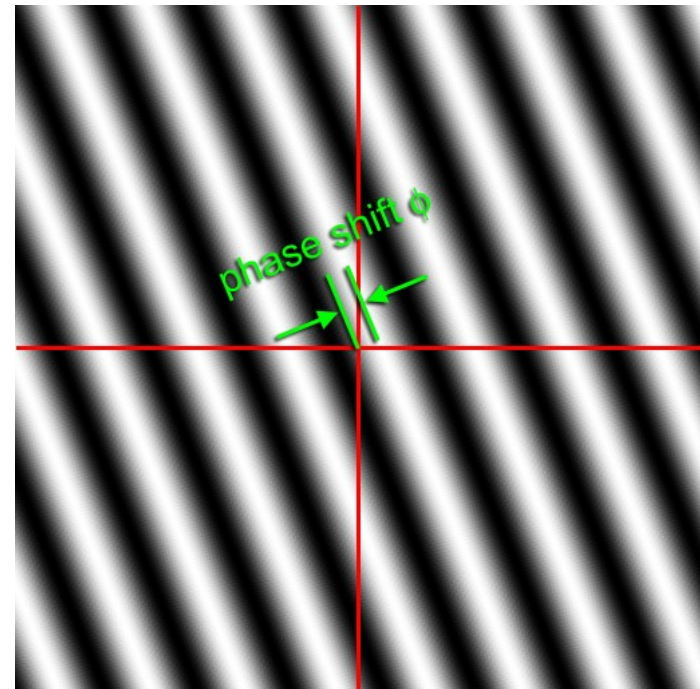
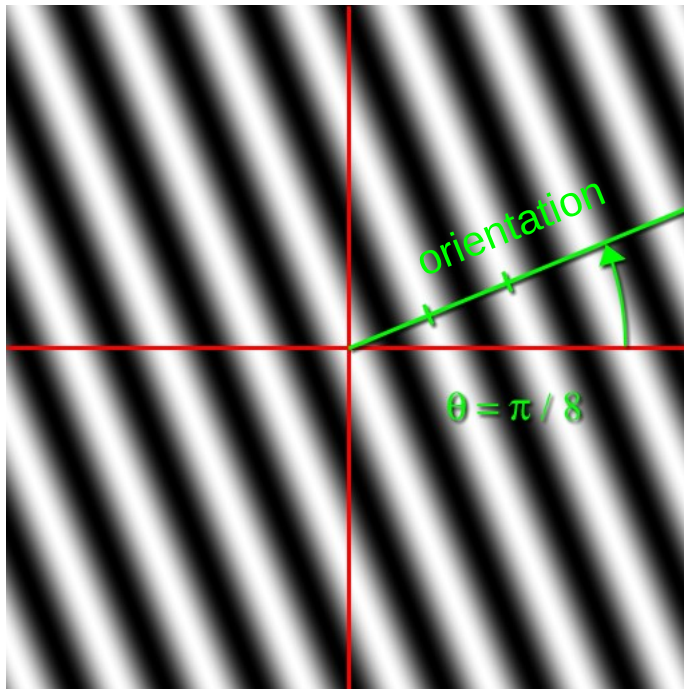
Frequenze Spaziali

Cosinusoide spaziale bidimensionale.

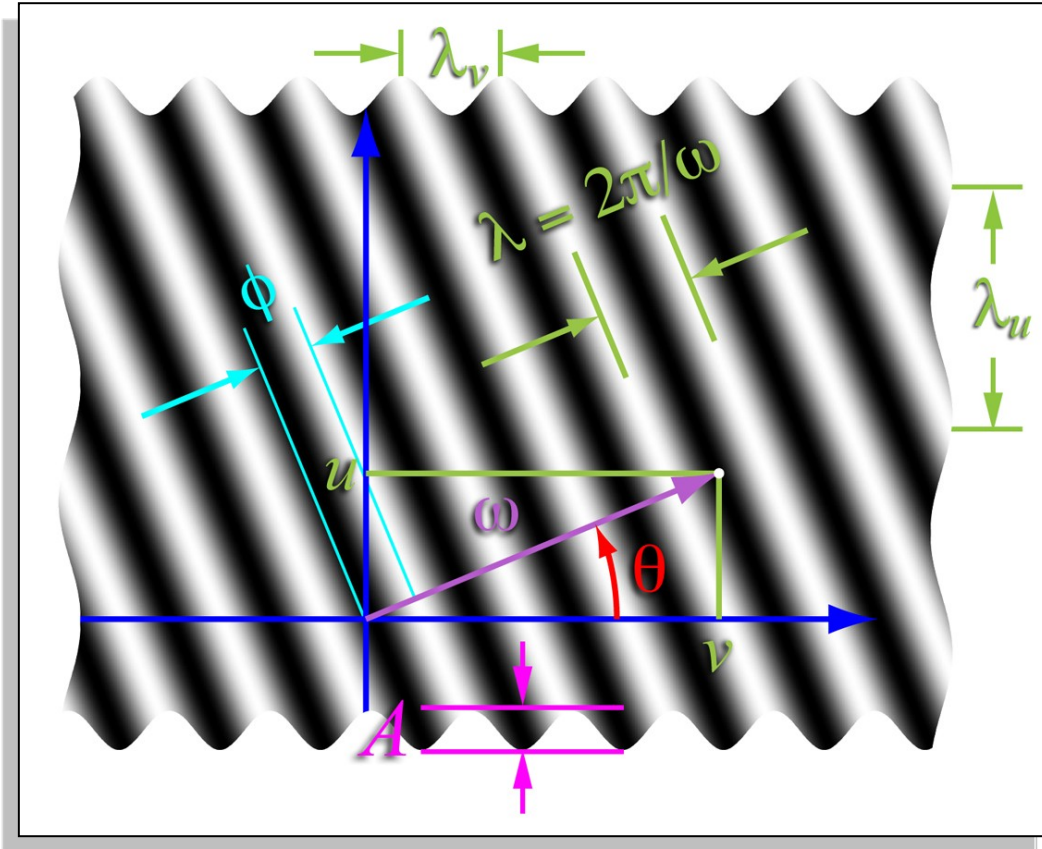


Frequenze Spaziali

Differenti orientamento e sfasamento.



Frequenze Spaziali



Il valore complesso della trasformata alle frequenze (v, u) indica il modulo A e la fase ϕ dell'esponenziale complesso con periodo $\lambda = 1/\sqrt{u^2 + v^2}$ ed orientamento $\theta = \tan^{-1}(v/u)$.

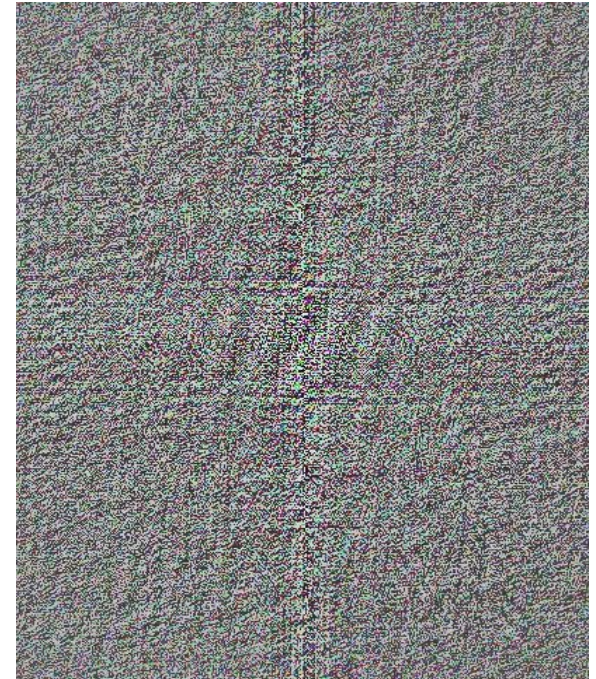
Spettro



$$f(x, y)$$



$$\Re\{F(u, v)\}$$

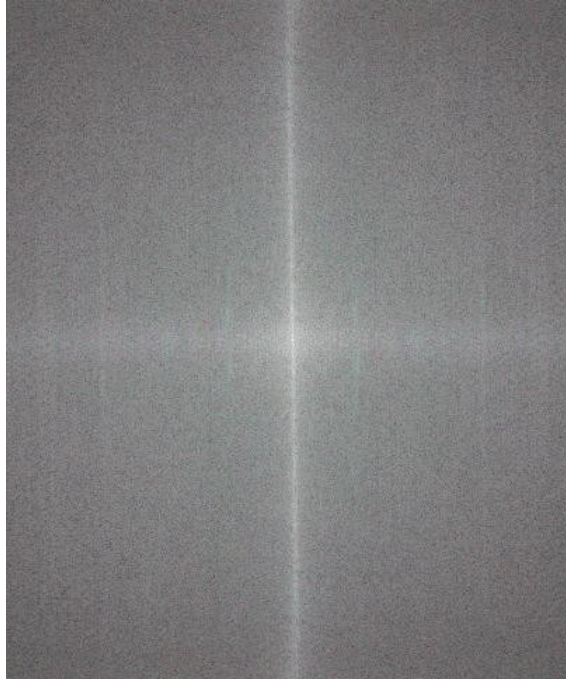


$$\Im\{F(u, v)\}$$

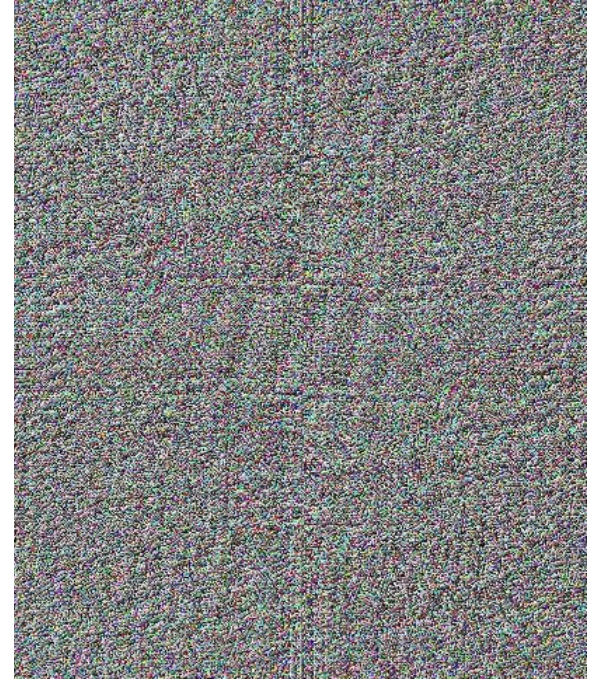
Spettro



$$f(x, y)$$



$$|F(u, v)|$$



$$\angle F(u, v)$$

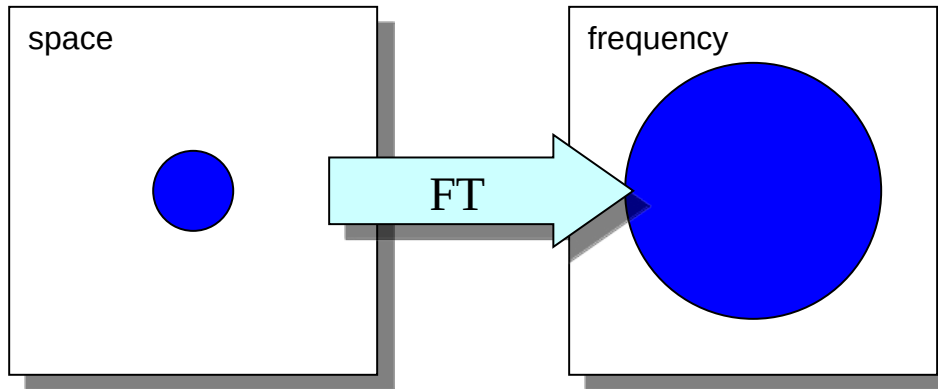
Spettro di Potenza

Lo spettro di potenza di un segnale è il modulo della sua trasformata di Fourier

$$|F(u, v)|^2 = F(u, v) F^*(u, v) = [\Re(F(u, v))]^2 + [\Im(F(u, v))]^2$$

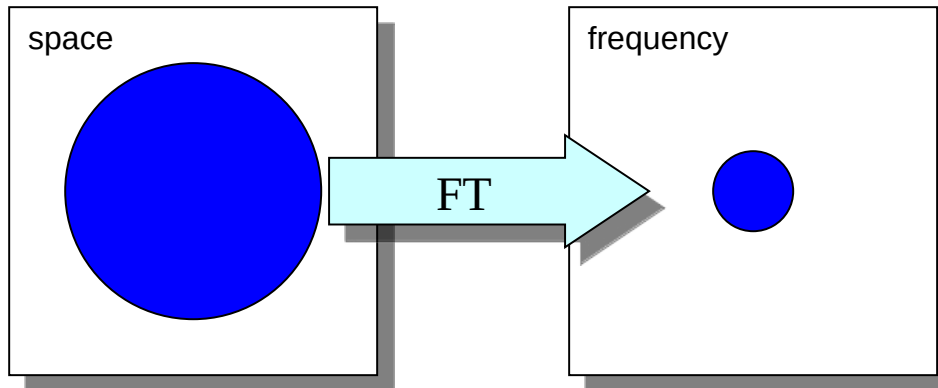
Indica, per ogni coppia di frequenze spaziali (v, u) , il quadrato dell'intensità della componente frequenziale con periodo $\lambda = 1/\sqrt{u^2 + v^2}$ ed orientamento $\theta = \tan^{-1}(v/u)$.

Principio di Indeterminazione



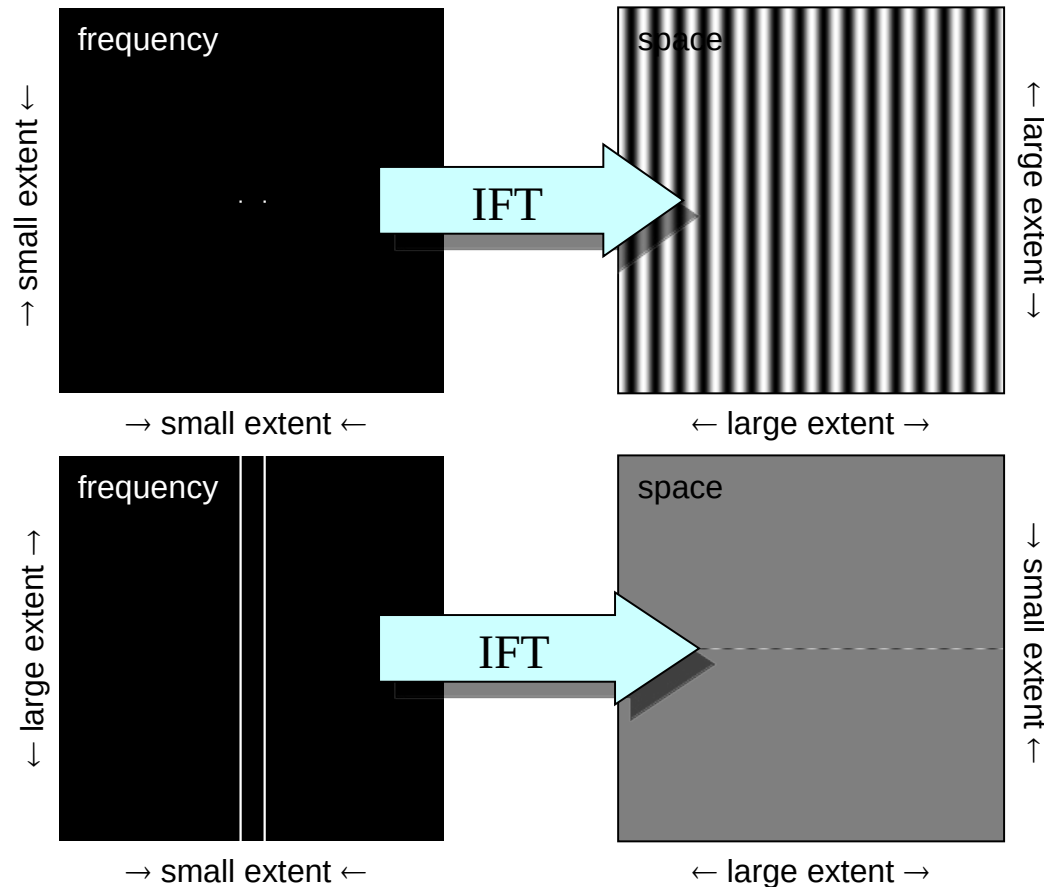
Se $\Delta x \Delta y$ è l'estensione di un oggetto nello spazio e $\Delta u \Delta v$ la sua estensione in frequenza, allora

$$\Delta x \Delta y \cdot \Delta u \Delta v \geq \frac{1}{16\pi^2}$$



Oggetto piccolo ha una grande estensione in frequenza e viceversa

Principio di Indeterminazione



Una coppia di impulsi simmetrici nel dominio della frequenza corrisponde ad una sinusoide nel dominio spaziale.

Una coppia di linee simmetriche nel dominio della frequenza corrisponde ad una linea sinusoidale nel dominio spaziale.

Fast Fourier Transform

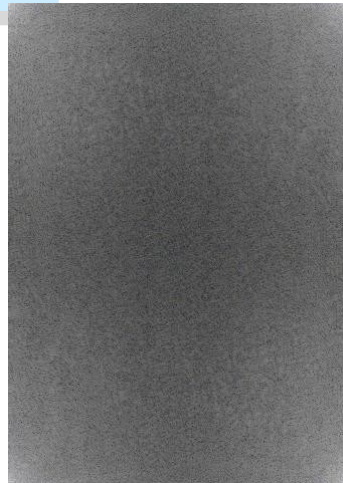
La prima frequenza che viene calcolata è (0,0), che andrà ad occupare la posizione in alto a sinistra dello spettro.

$$H_{lk} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h_{mn} e^{-i2\pi \left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M} \right)}$$

`F = fft2(f):`

origin

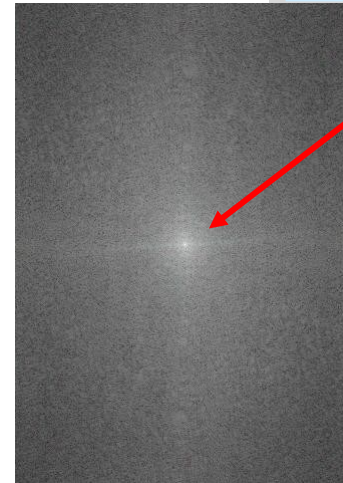
*from FFT2
or ifftshift*



`I = fftshift(F):`

origin

after fftshift



$$F(1,1) \rightarrow I(|R/2| + 1, |C/2| + 1)$$

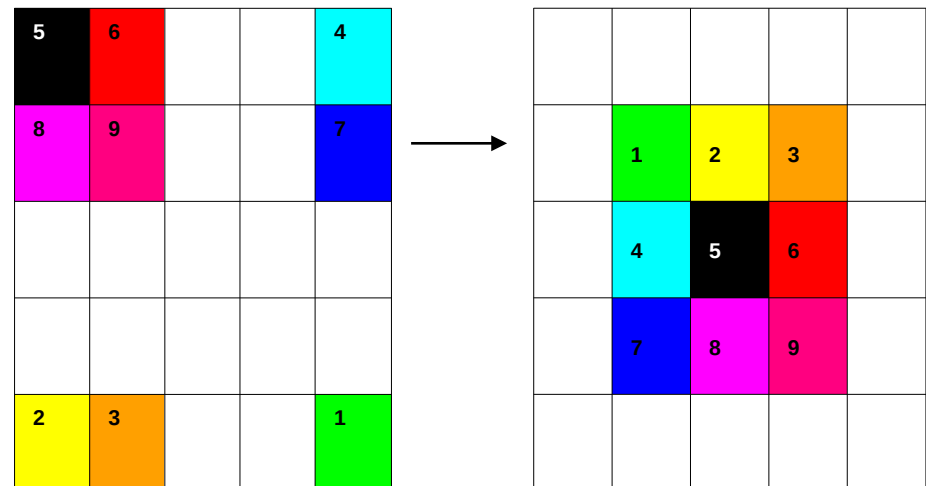
Frequenza Nulla

In Matlab il comando `fft2` calcola la DFT bidimensionale nell'intervallo $0 \leq u < 1$, $0 \leq v < 1$.

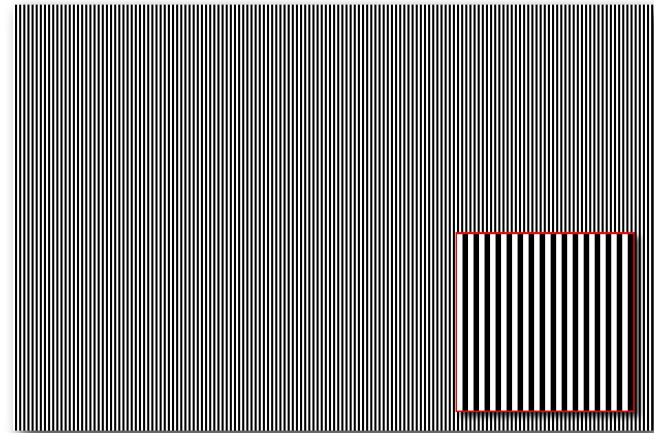
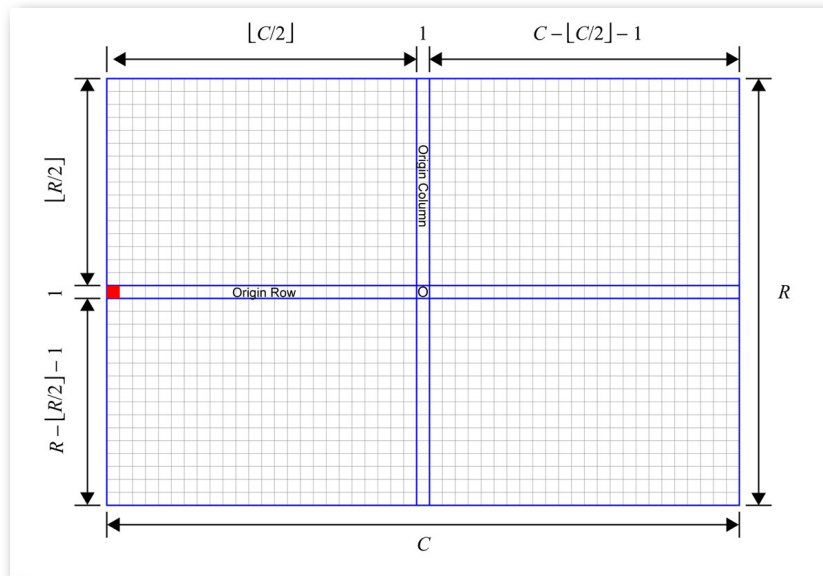
Il comando `fftshift` si occupa di ripristinare la frequenza nulla al centro dello spettro.

```
I = fftshift(F):
```

$$F(1,1) \rightarrow I(|R/2| + 1, |C/2| + 1)$$

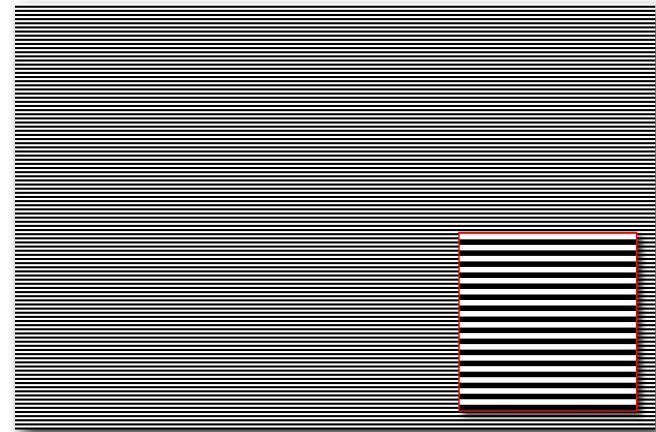
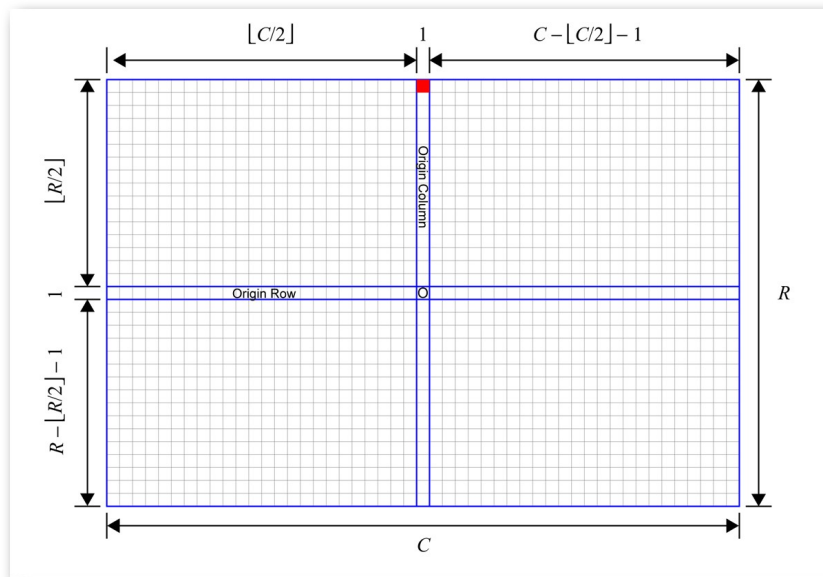


Trasformate Inverse di impulsi



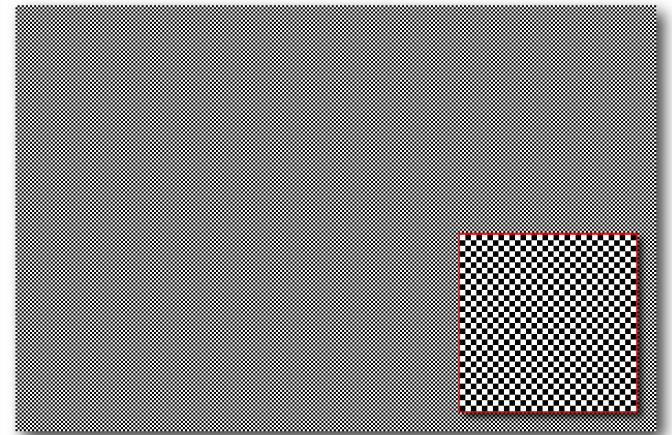
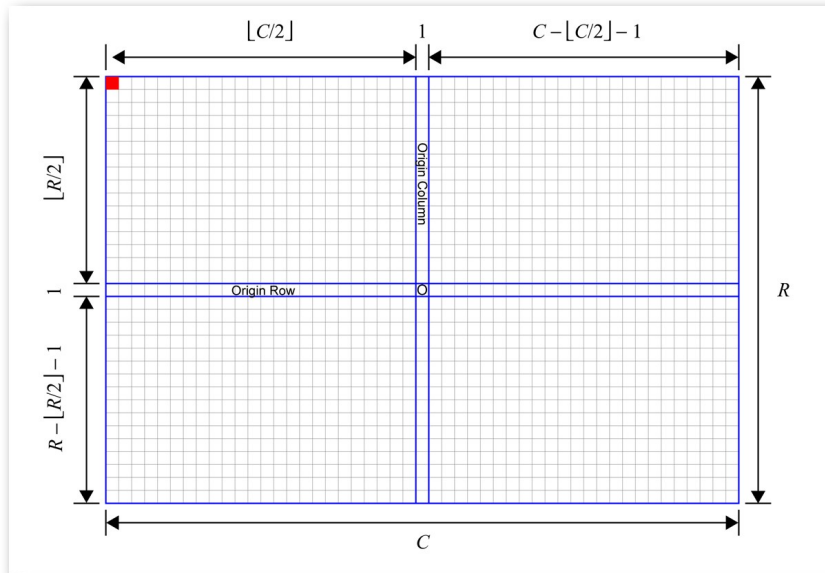
Sinusoide orizzontale alla massima frequenza

Trasformate Inverse di impulsi



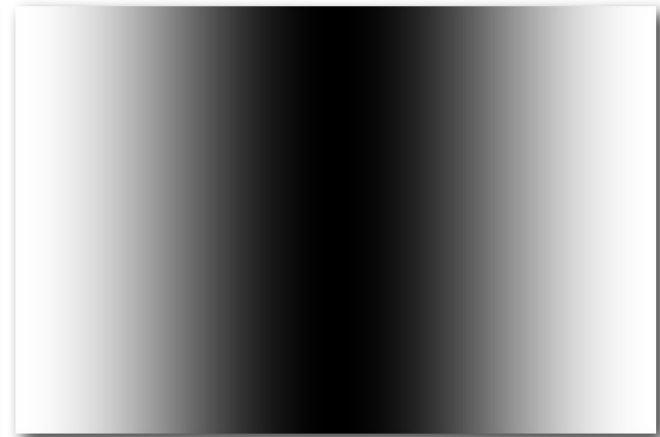
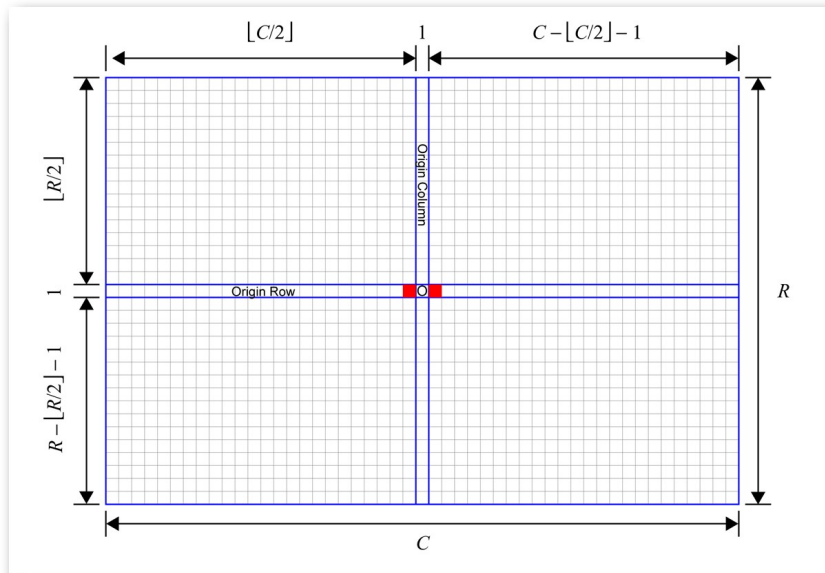
Sinusoide verticale alla massima frequenza

Trasformate Inverse di impulsi



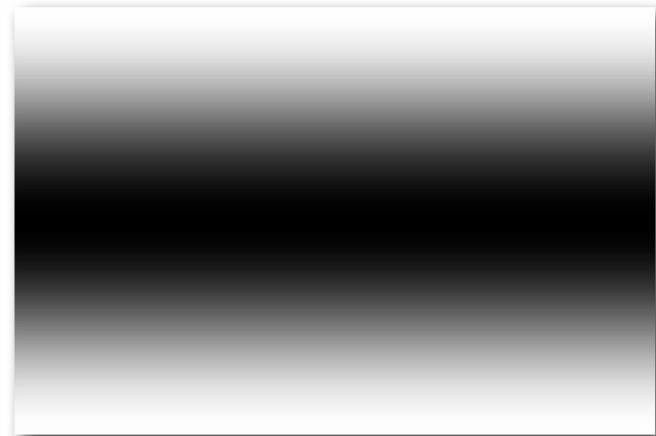
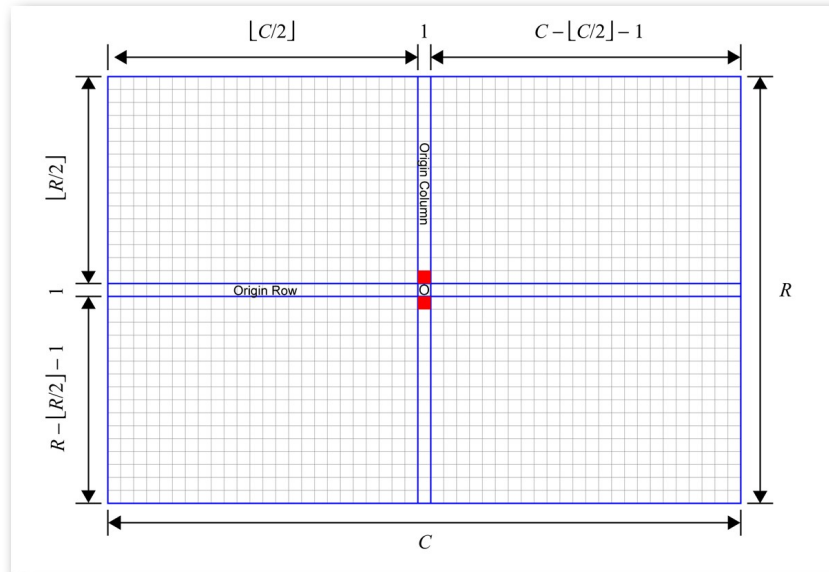
Sinusoide alle massime frequenza orizzontale e verticale

Trasformate Inverse di impulsi



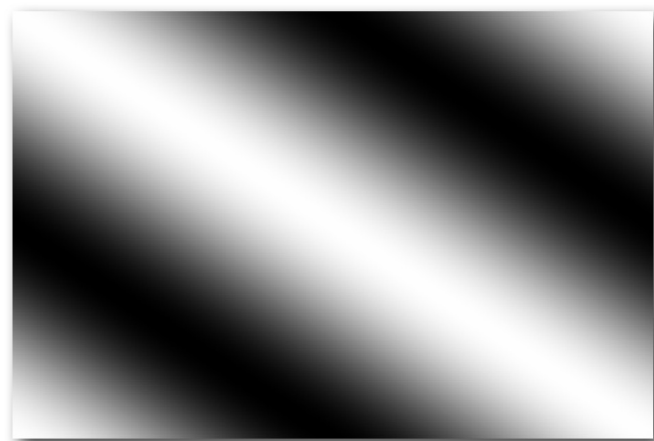
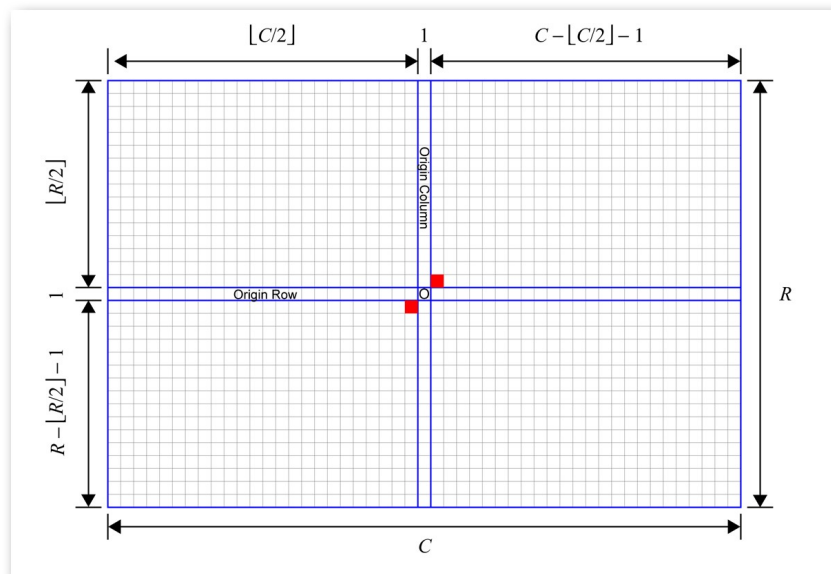
Sinusoide orizzontale alla minima frequenza

Trasformate Inverse di impulsi



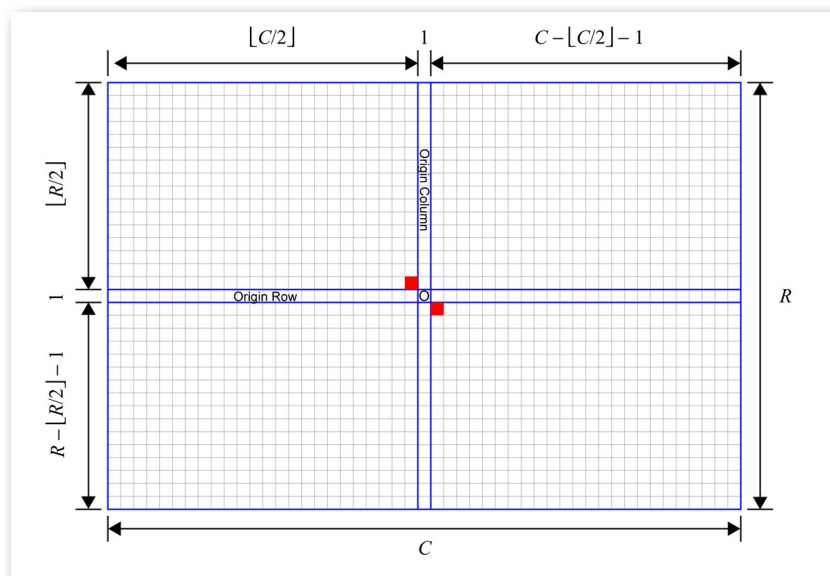
Sinusoide verticale alla minima frequenza

Trasformate Inverse di impulsi



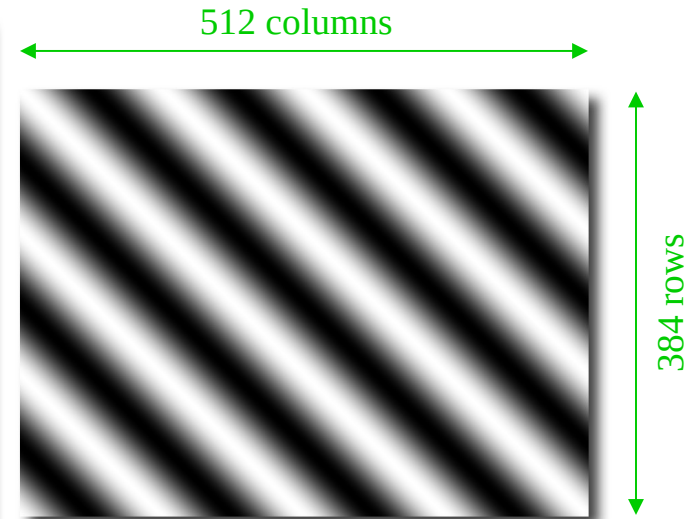
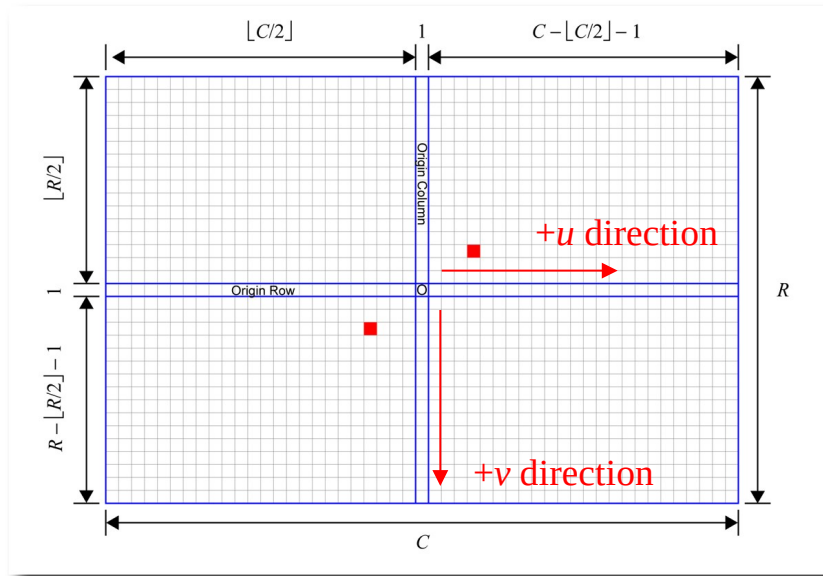
Sinusoide alle minime frequenze orizzontale e verticale
(diagonale negativa)

Trasformate Inverse di impulsi

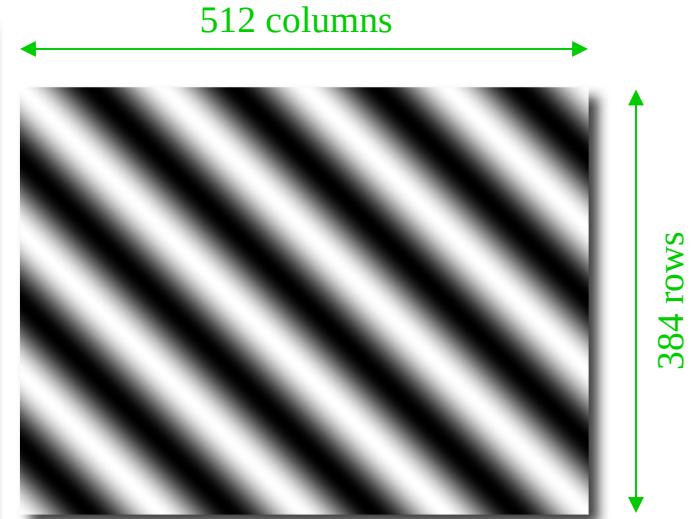
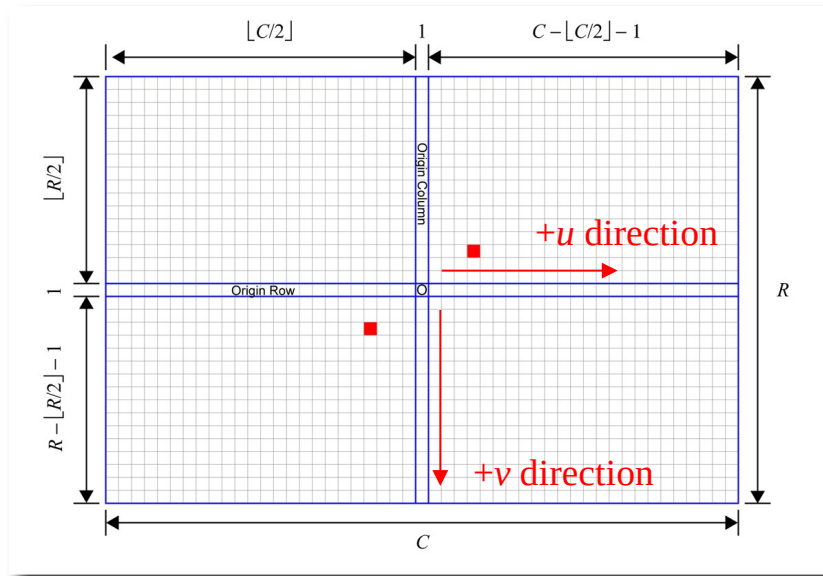


Sinusoide alle minime frequenze orizzontale e verticale
(diagonale positiva)

Trasformate Inverse di impulsi

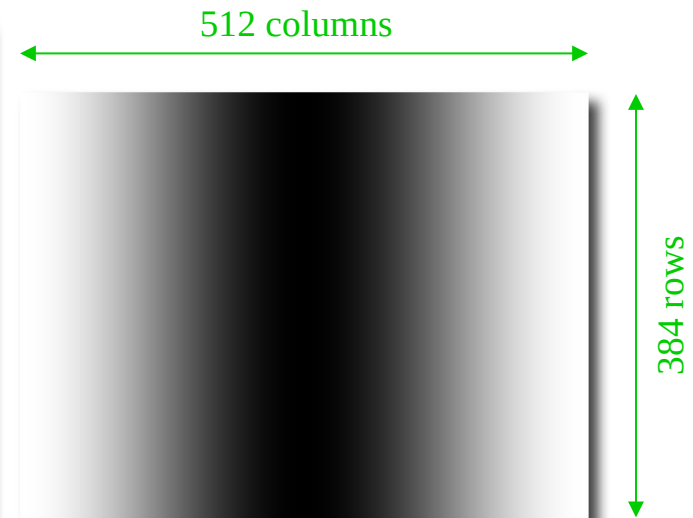
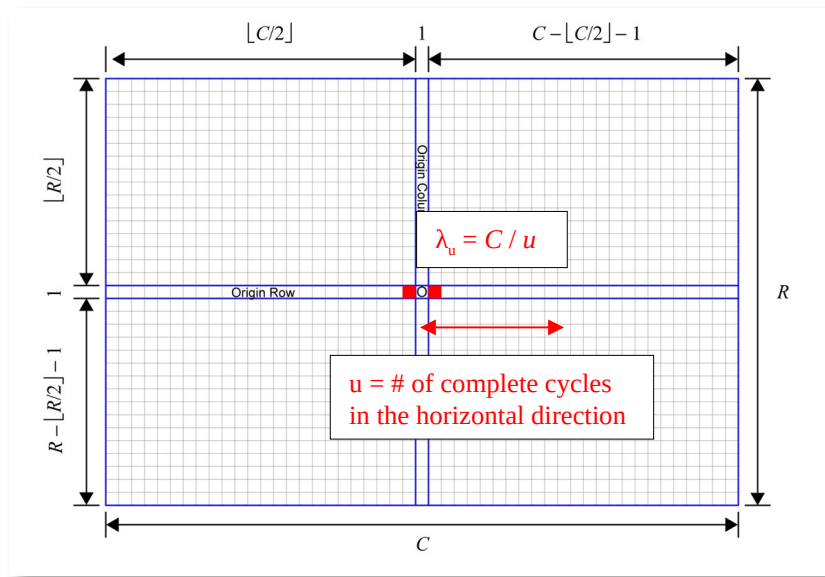


Trasformate Inverse di impulsi

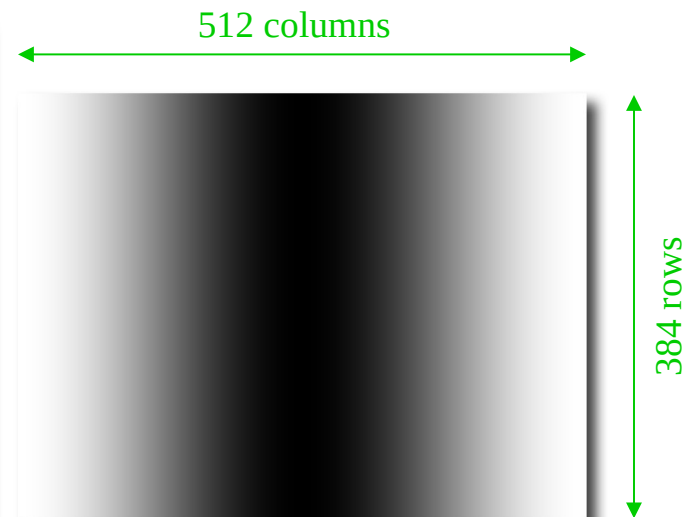
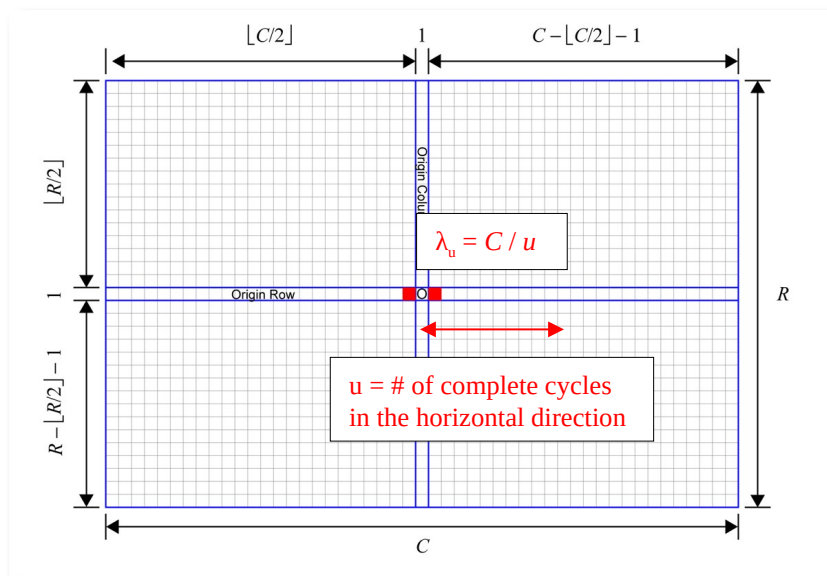


Frequenze: $(u, v) = (4, 3)$
 Lunghezze d'onda: $(\lambda_u, \lambda_v) = (128, 128)$

Trasformate Inverse di impulsi

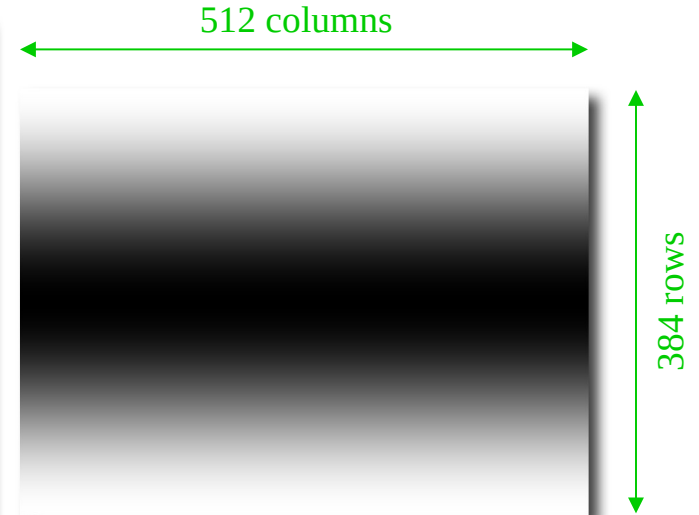
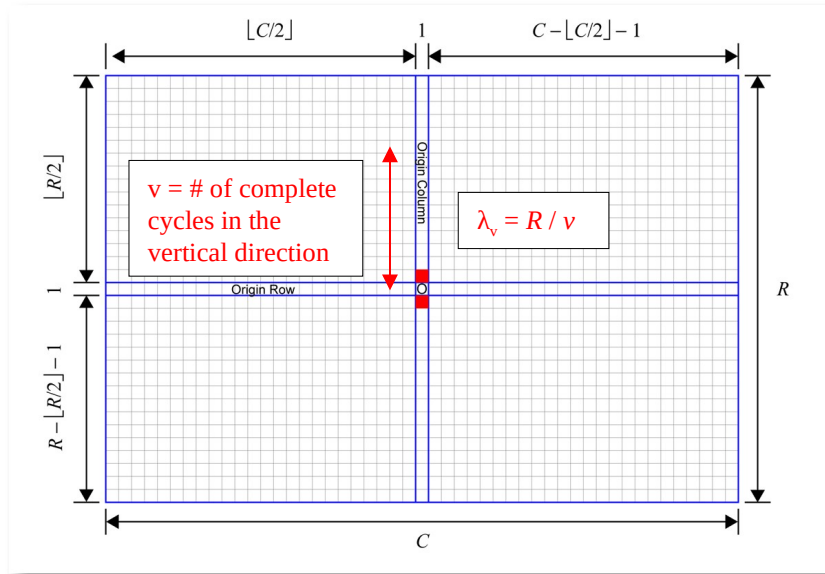


Trasformate Inverse di impulsi

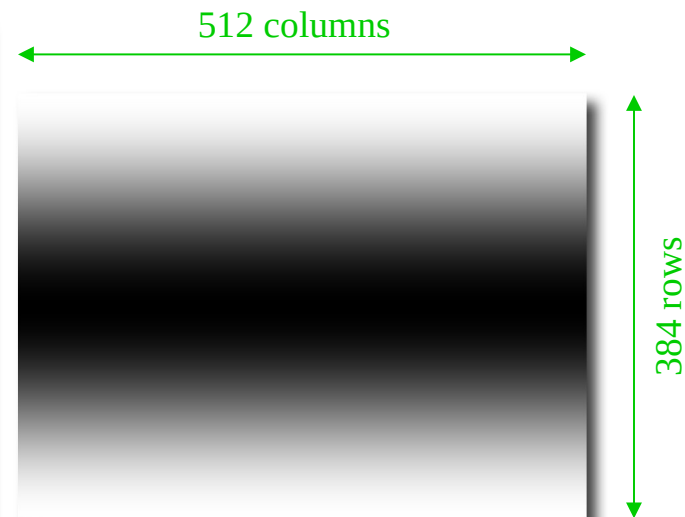
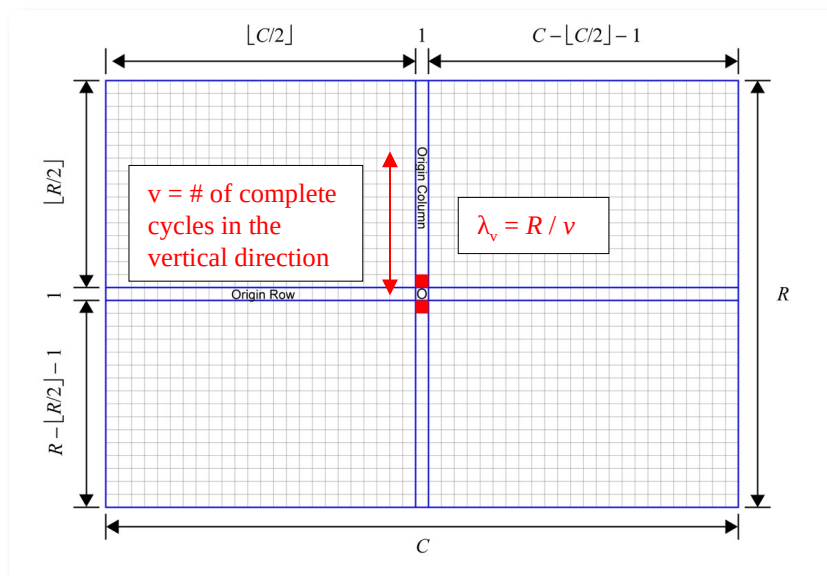


Frequenze: $(u, v) = (1, 0)$
 Lunghezze d'onda: $(\lambda_u, \lambda_v) = (512, \infty)$

Trasformate Inverse di impulsi

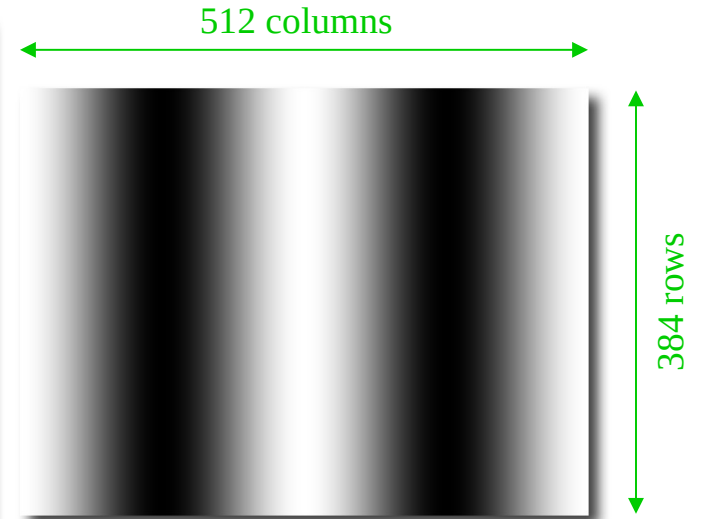
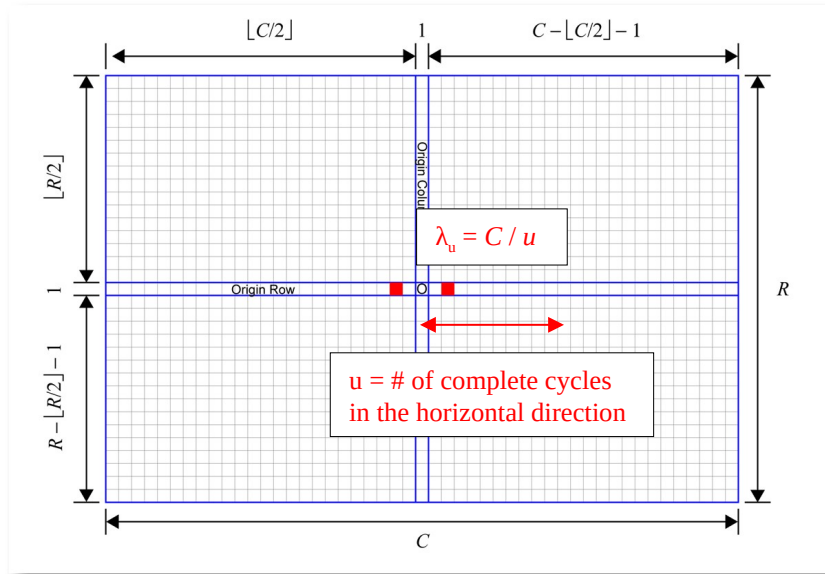


Trasformate Inverse di impulsi

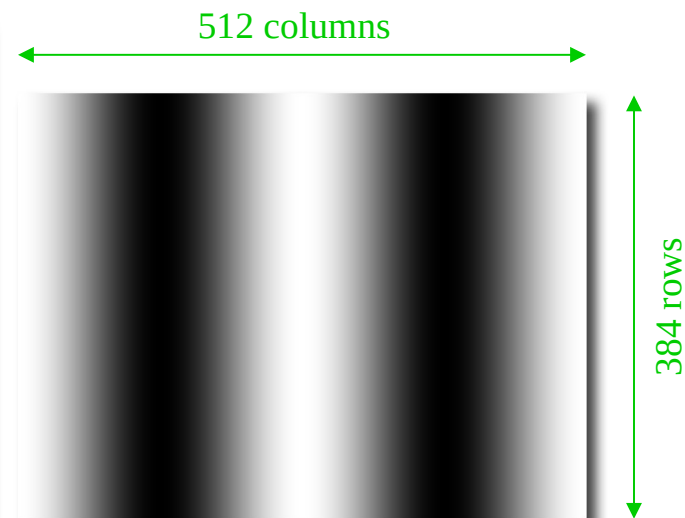
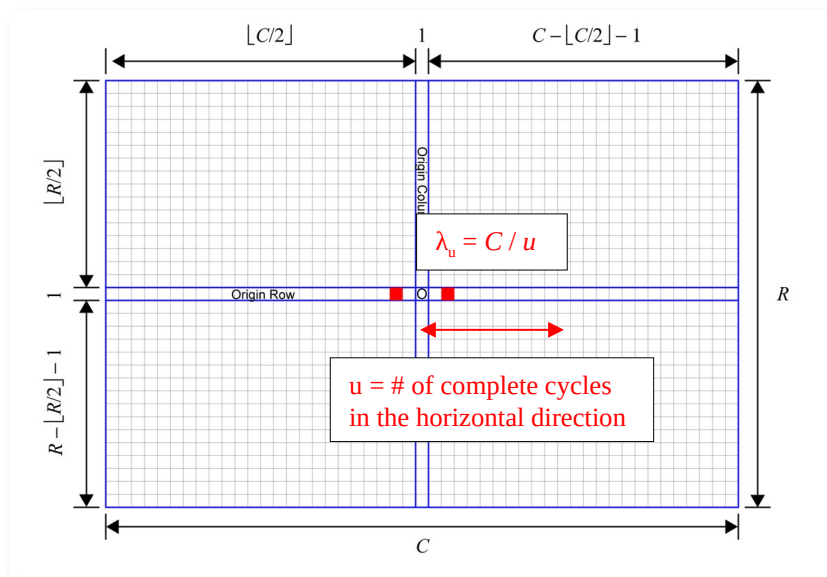


Frequenze: $(u, v) = (0, 1)$
 Lunghezze d'onda: $(\lambda_u, \lambda_v) = (\infty, 384)$

Trasformate Inverse di impulsi

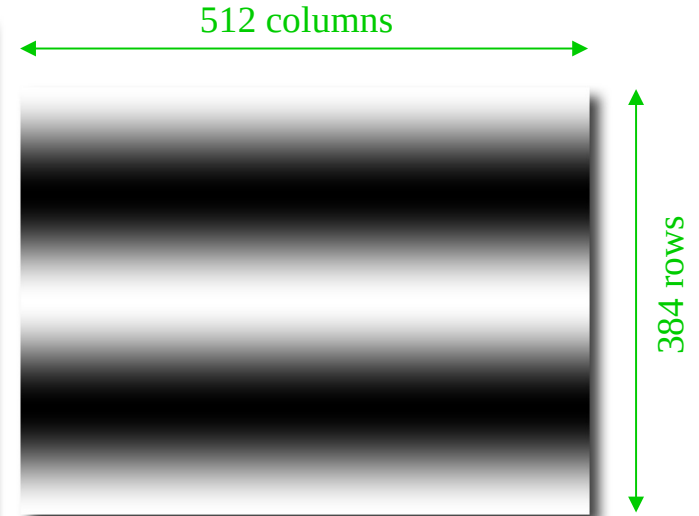
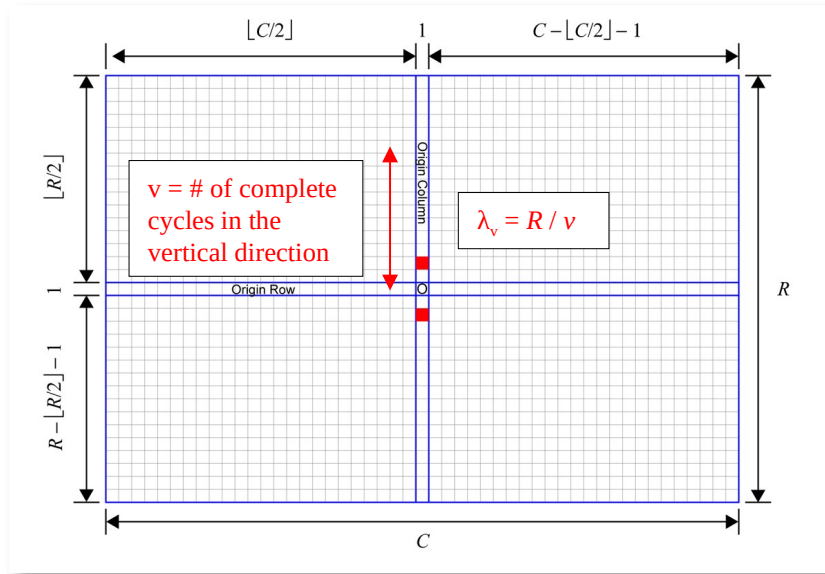


Trasformate Inverse di impulsi

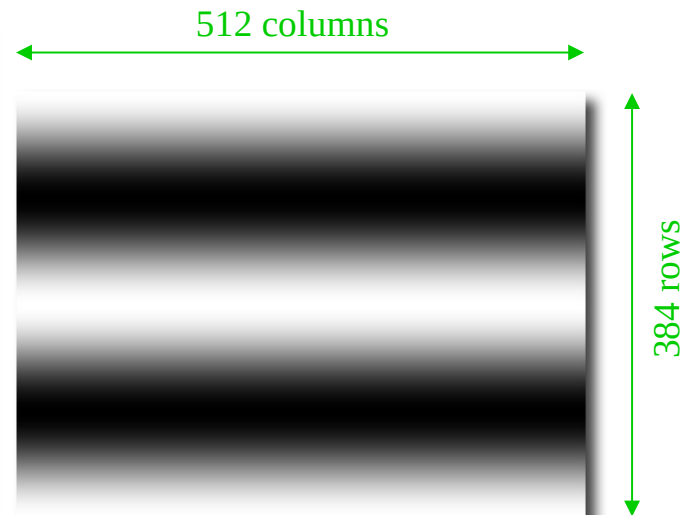
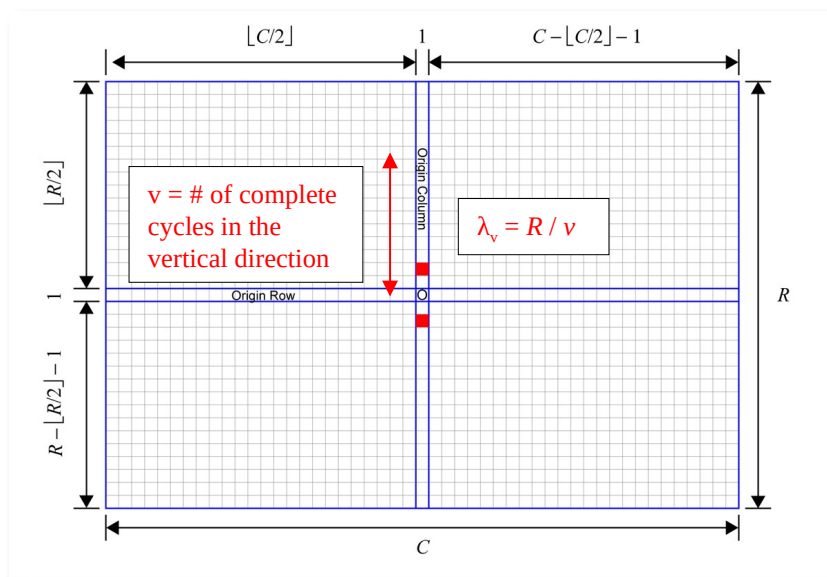


Frequenze: $(u, v) = (2, 0)$
 Lunghezze d'onda: $(\lambda_u, \lambda_v) = (256, \infty)$

Trasformate Inverse di impulsi



Trasformate Inverse di impulsi



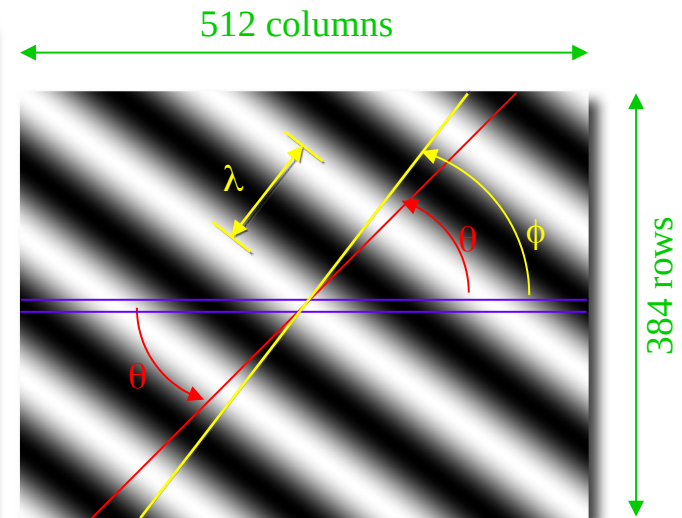
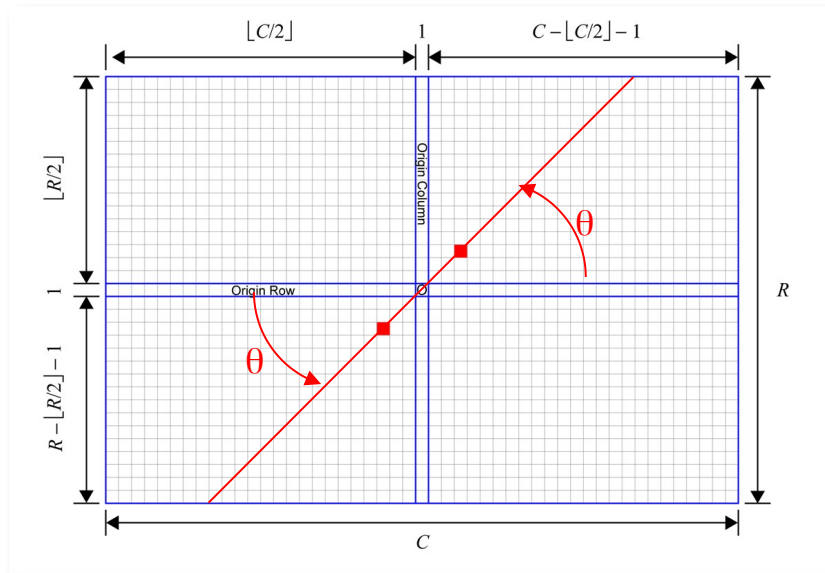
Frequenze: $(u, v) = (0, 2)$
 Lunghezze d'onda: $(\lambda_u, \lambda_v) = (\infty, 192)$

Trasformate Inverse di impulsi

In un piano quadrato
l'inclinazione si manterrebbe.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = 45^\circ$$

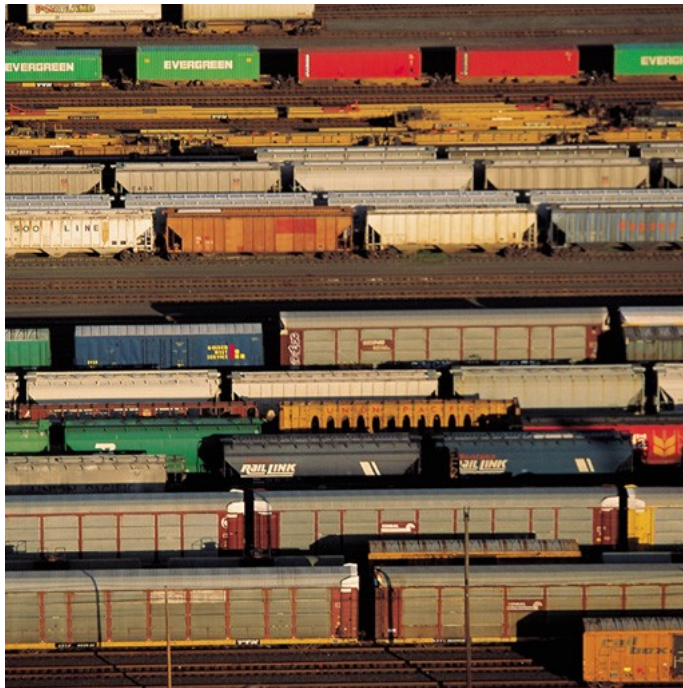
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{512/3}{384/3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ$$



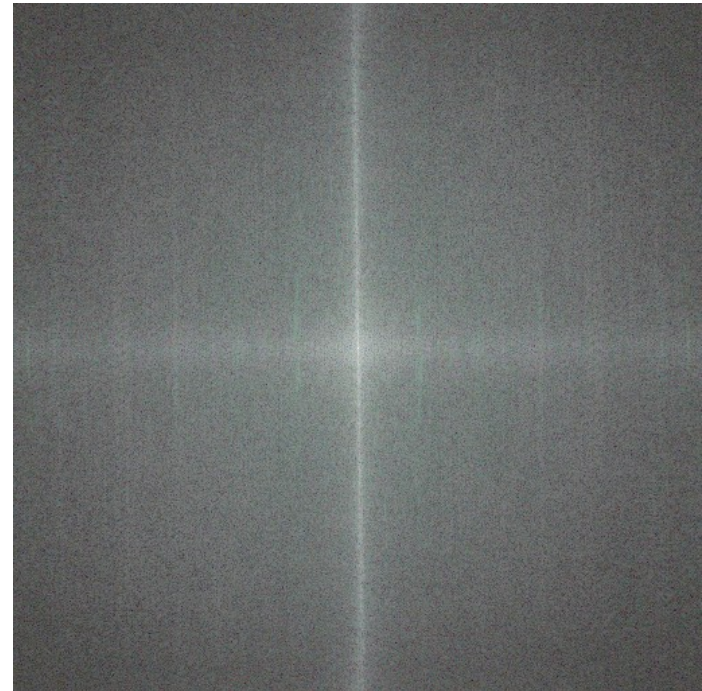
Frequenze: $(u, v) = (3, 3)$

Lunghezze d'onda: $(\lambda_u, \lambda_v) = \left(\frac{512}{3}, 128\right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{512}\right)^2 + \left(\frac{1}{128}\right)^2}} = 102.4$

Caratteristiche dello Spettro di Potenza

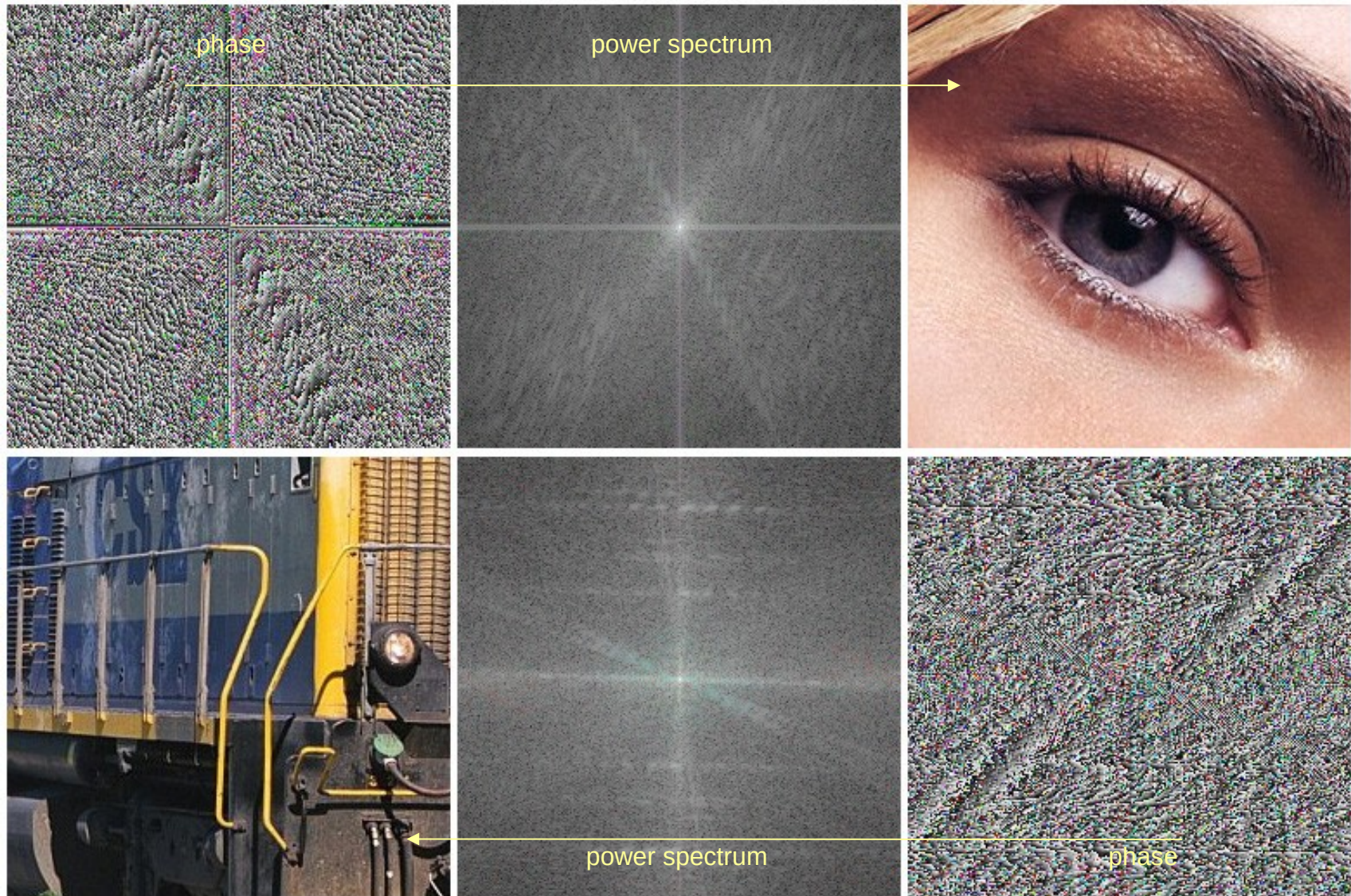


$$f(x, y)$$

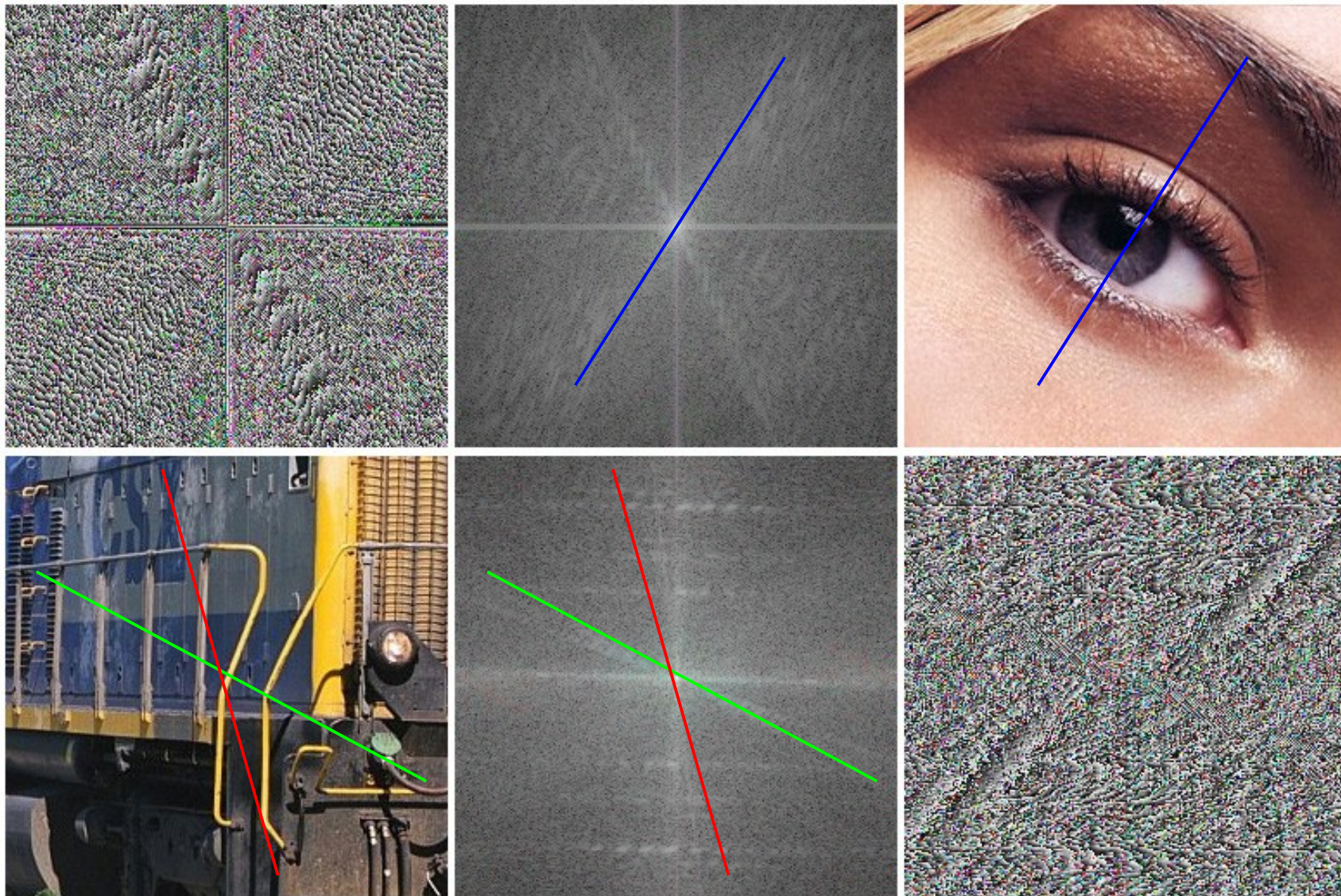


$$|F(u, v)|^2$$

Caratteristiche dello Spettro di Potenza



Caratteristiche dello Spettro di Potenza

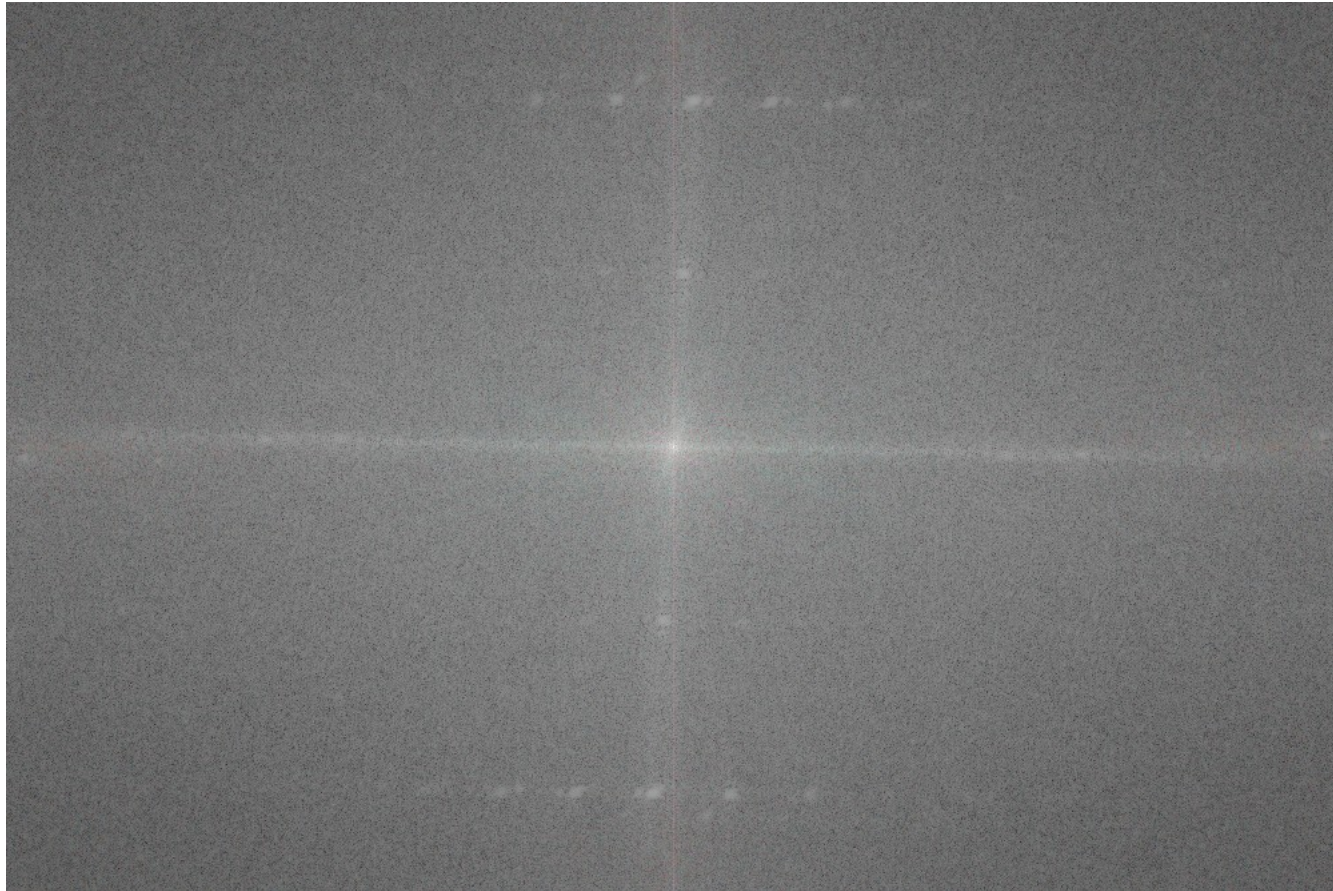


Informazioni nella Trasformata di Fourier



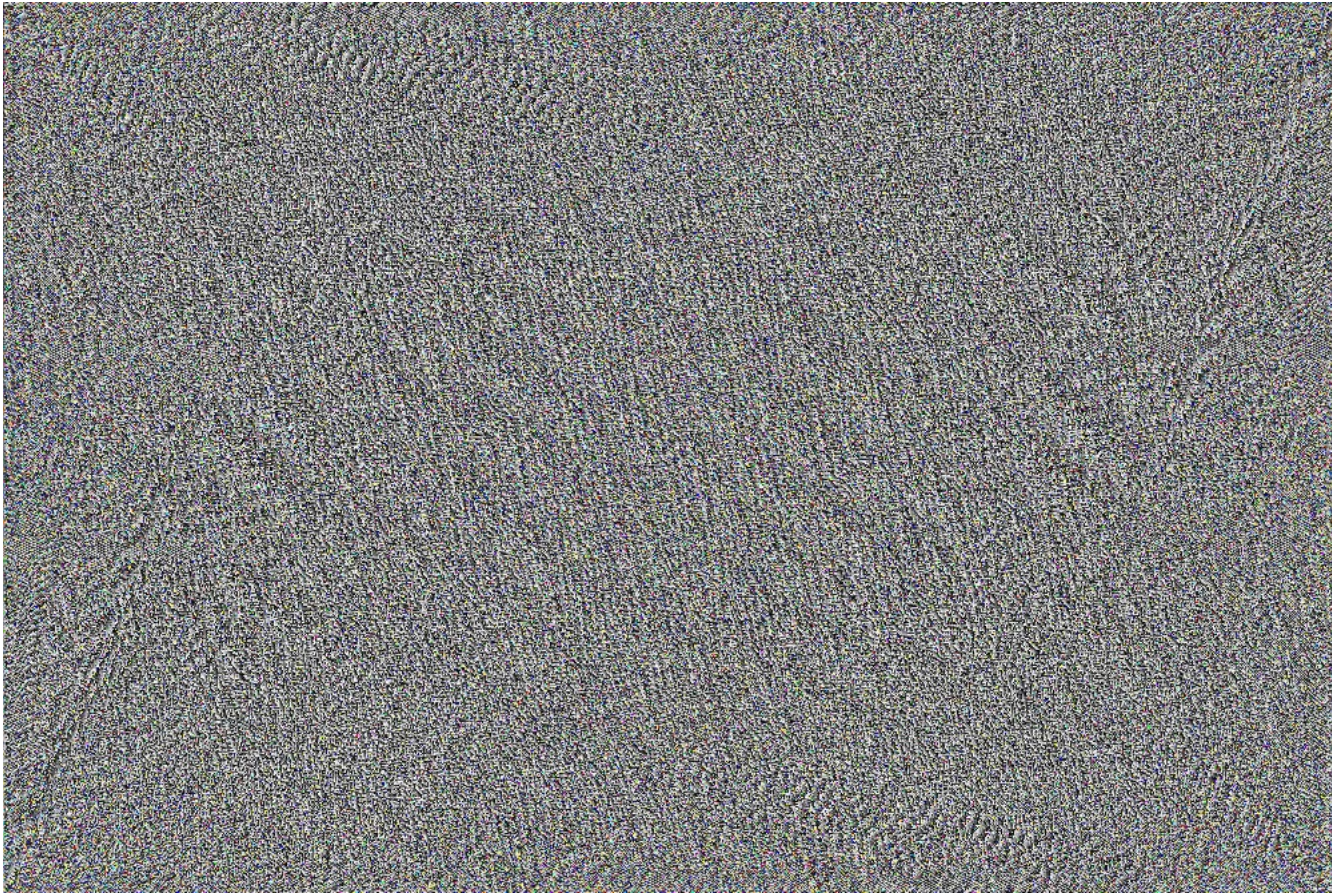
$$f(x, y)$$

Informazioni nella Trasformata di Fourier



$$\log |F(u, v)|$$

Informazioni nella Trasformata di Fourier



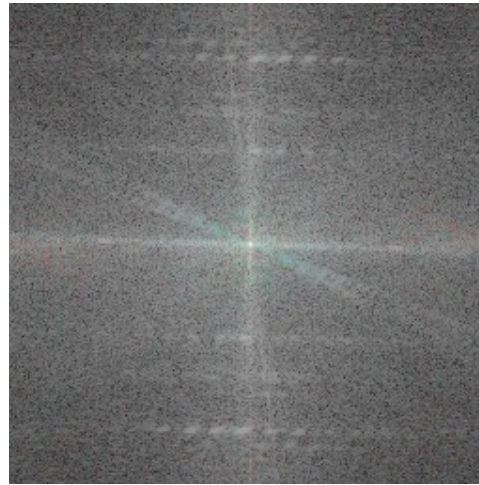
$$\nabla F(u, v)$$

Informazioni nella Trasformata di Fourier

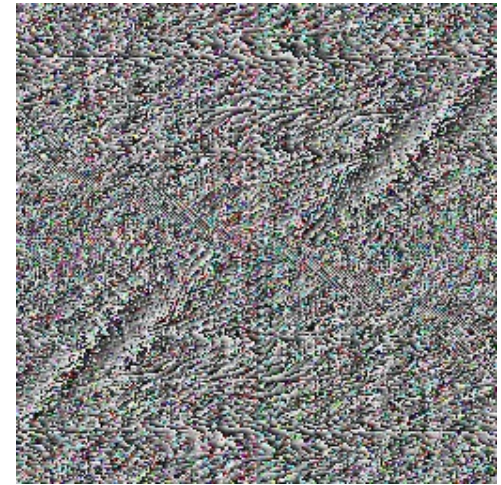
Quale fra ampiezza e fase ha il maggiore contenuto informativo?



$f(x, y)$

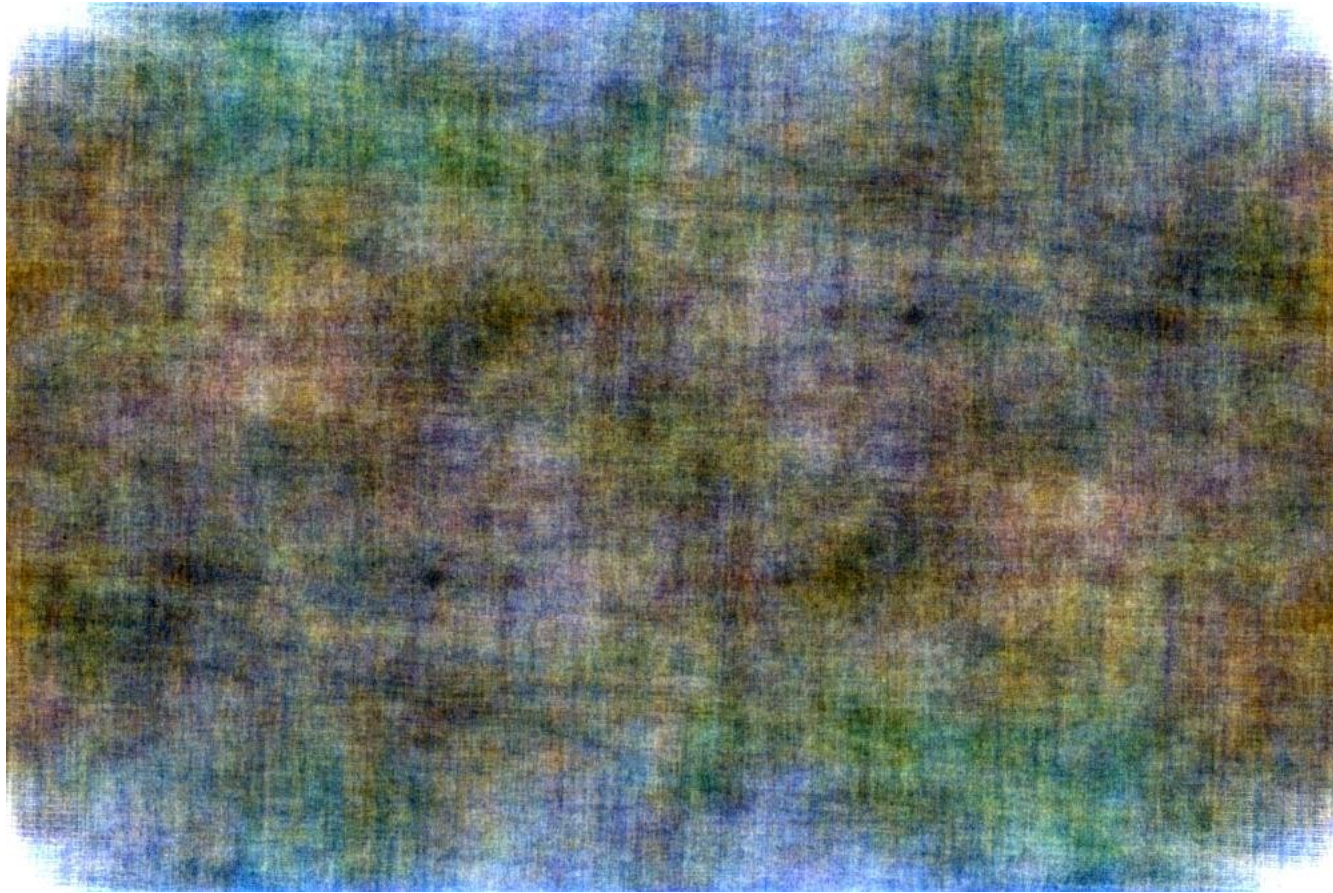


$\log|F(u, v)|$



$\angle F(u, v)$

Informazioni nella Trasformata di Fourier



Risultato della trasformata inversa considerando solo l'ampiezza (fase posta pari a 0).

Informazioni nella Trasformata di Fourier



Risultato della trasformata inversa considerando solo la fase (ampiezza posta pari ad 1).