Richiami su serie e trasformata di Fourier

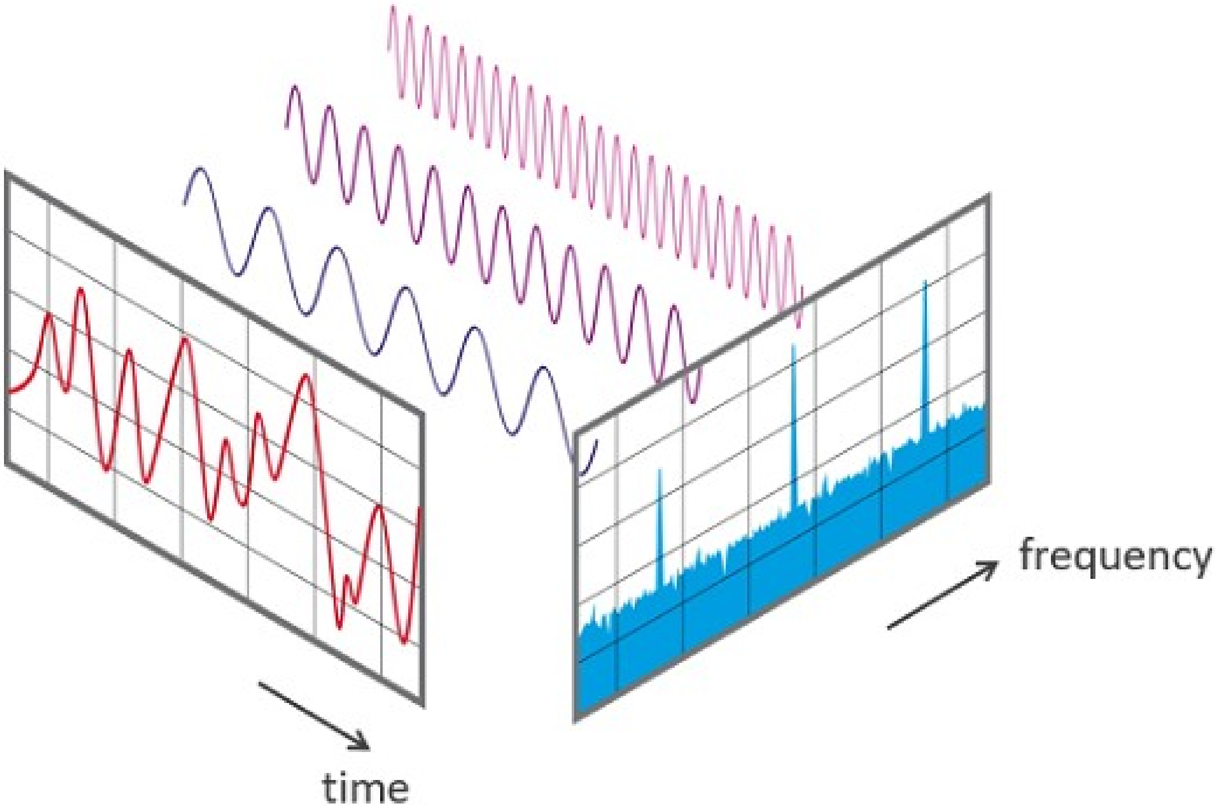
Strumentazione biomedica e bioimmagini

Laurea in

Ingegneria Informatica, Biomedica e delle Telecomunicazioni

Fabio Baselice

Serie di Fourier - Richiami



Decomponiamo un segnale periodico in una somma di fasori.

http://www.jezzamon.com/fourier/

Serie di Fourier - Richiami

Consideriamo un segnale periodico $x(t)$ di periodo T.

La sua frequenza fondamentale sarà $f_0 = 1/T$.

Il segnale può essere scritto con somma di fasori, ciascuno con una propria frequenza (nf_0), ampiezza ($|c_n|$) e fase ($\measuredangle c_n$).

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i 2\pi n f_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-i 2\pi n f_0 t} dt$$

Serie di Fourier - Richiami

Le equazioni di Analisi e di Sintesi permettono di stabilire un legame biunivoco tra il segnale e i coefficienti complessi della serie.

La conoscenza del segnale in ambito temporale è equivalente alla conoscenza dei coefficienti complessi in ambito frequenziale.

Serie di Fourier - Richiami

Le equazioni di Analisi e di Sintesi permettono di stabilire un legame biunivoco tra il segnale e i coefficienti complessi della serie.

La conoscenza del segnale in ambito temporale è equivalente alla conoscenza dei coefficienti complessi in ambito frequenziale.

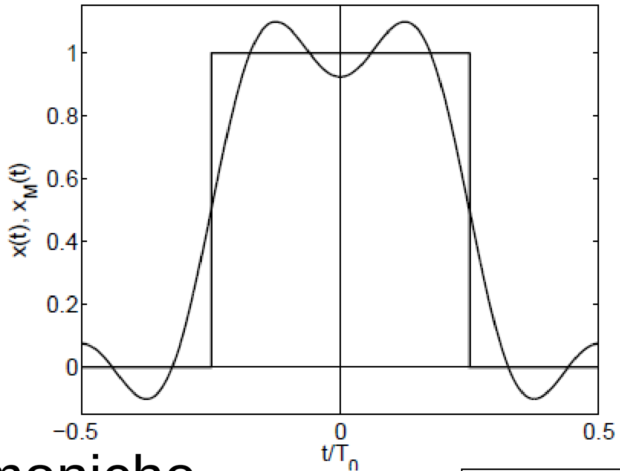
I coefficienti della serie sono in generale complessi. Per rappresentarli si decompongono in modulo e fase.

La rappresentazione della sequenza dei moduli in funzione di *n* prende il nome di Spettro di Ampiezza.

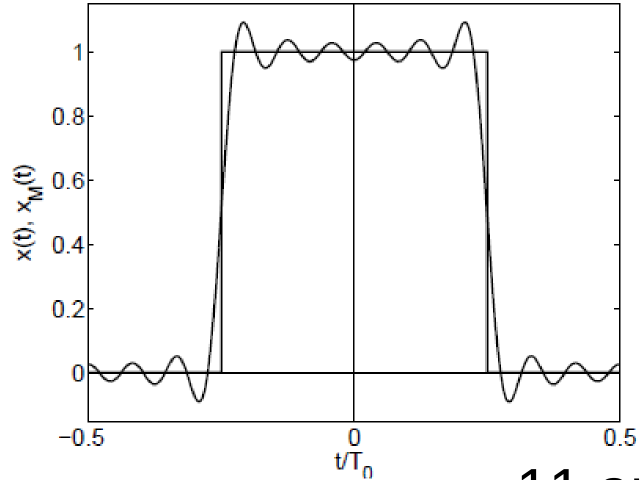
La rappresentazione della sequenza delle fasi in funzione di *n* prende il nome di Spettro di Fase.

Serie di Fourier - Richiami

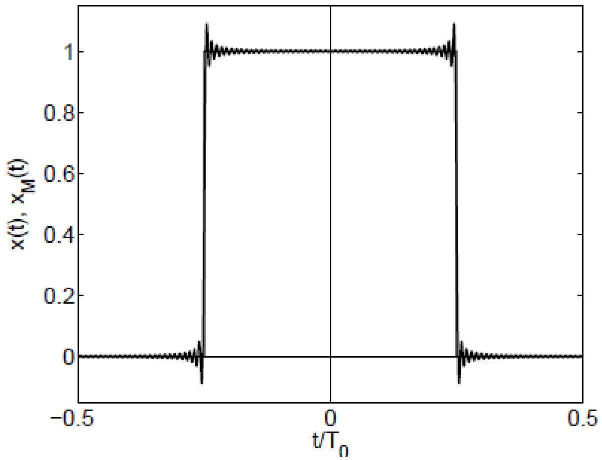
In base al tipo di segnale, può essere necessario un numero molto grande di fasori ($n \rightarrow \infty$).



3 armoniche



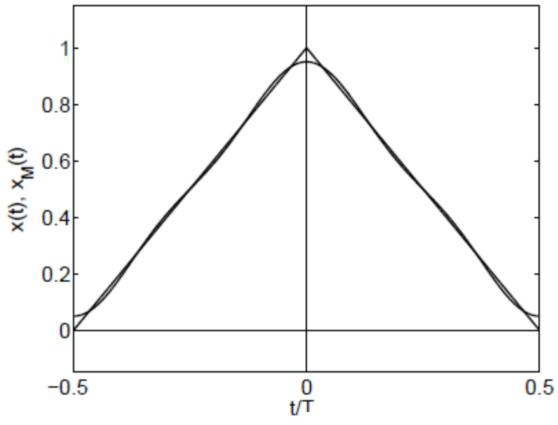
11 armoniche



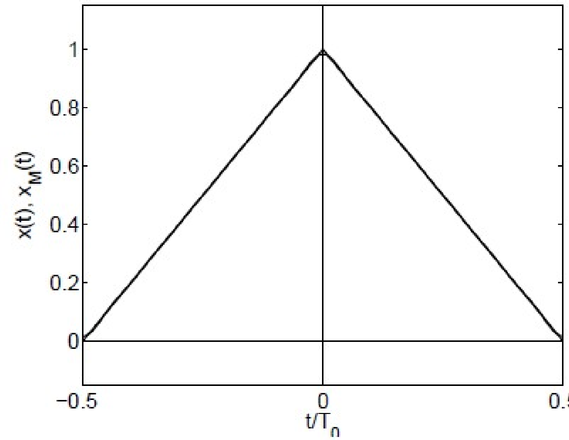
100 armoniche

Serie di Fourier - Richiami

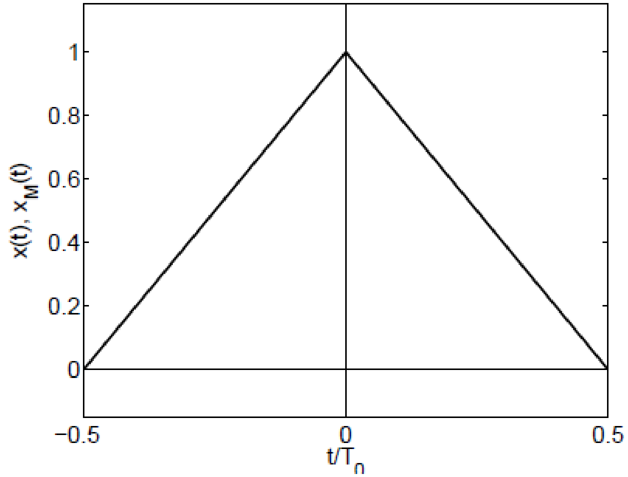
In base al tipo di segnale, può essere necessario un numero molto grande di fasori ($n \rightarrow \infty$).



3 armoniche



11 armoniche



100 armoniche

Trasformata Continua di Fourier - Richiamo

La trasformata continua di Fourier per un segnale monodimensionale $f(x)$ è definita dall'equazione:

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

che equivale a proiettare il segnale nello spazio degli esponenziali complessi monodimensionali $e^{-i2\pi ux}$, anche detto spazio delle frequenze.

Trasformata Continua di Fourier - Richiamo

La trasformata continua di Fourier per un segnale monodimensionale $f(x)$ è definita dall'equazione:

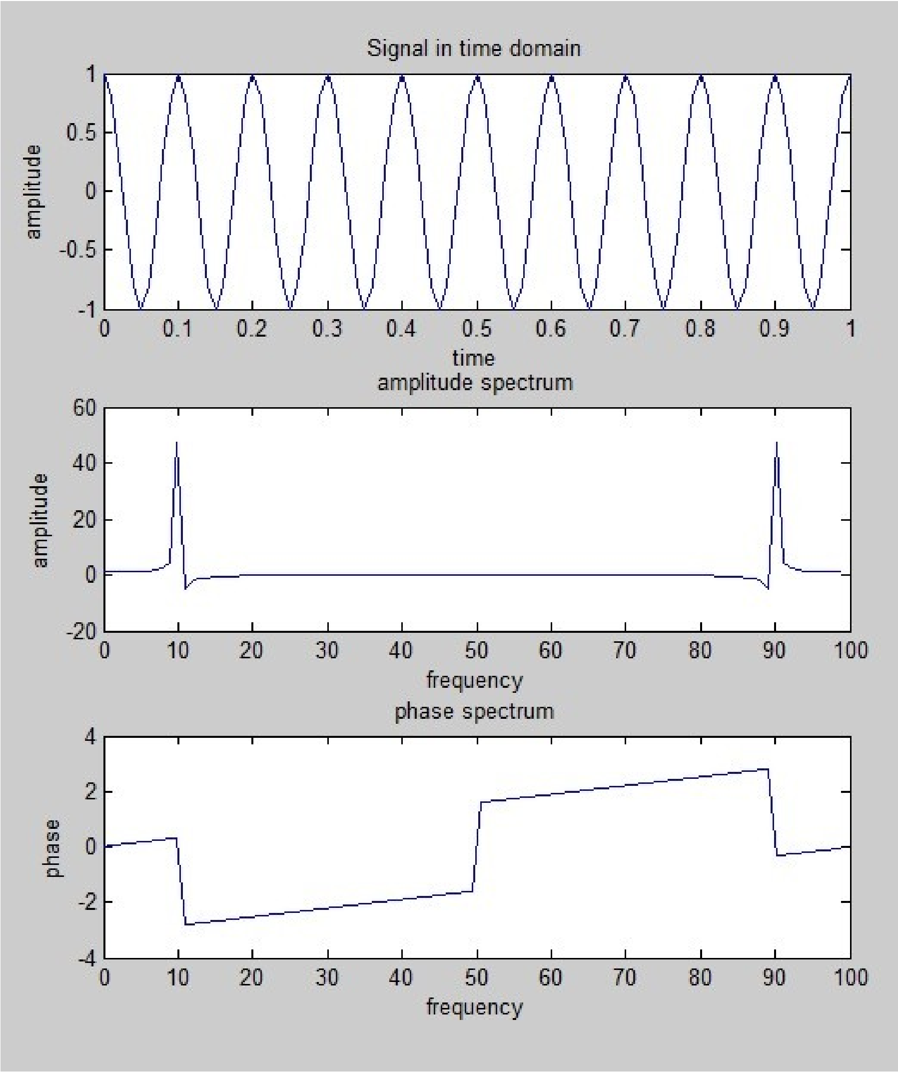
$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi ux}\, dx$$

proiezione

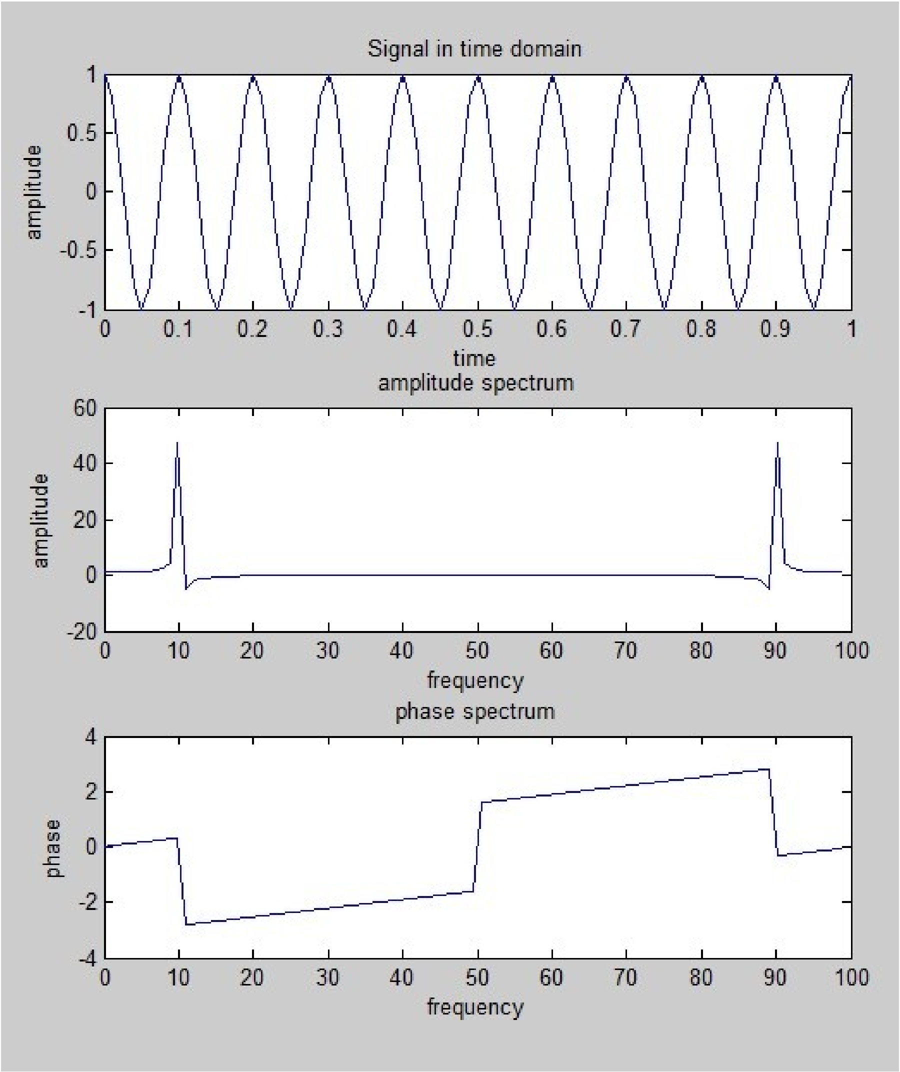
kernel

che equivale a proiettare il segnale nello spazio degli esponenziali complessi monodimensionali $e^{-i2\pi ux}$, anche detto spazio delle frequenze.

Trasformata Continua di Fourier - Richiamo



Trasformata Continua di Fourier - Richiamo

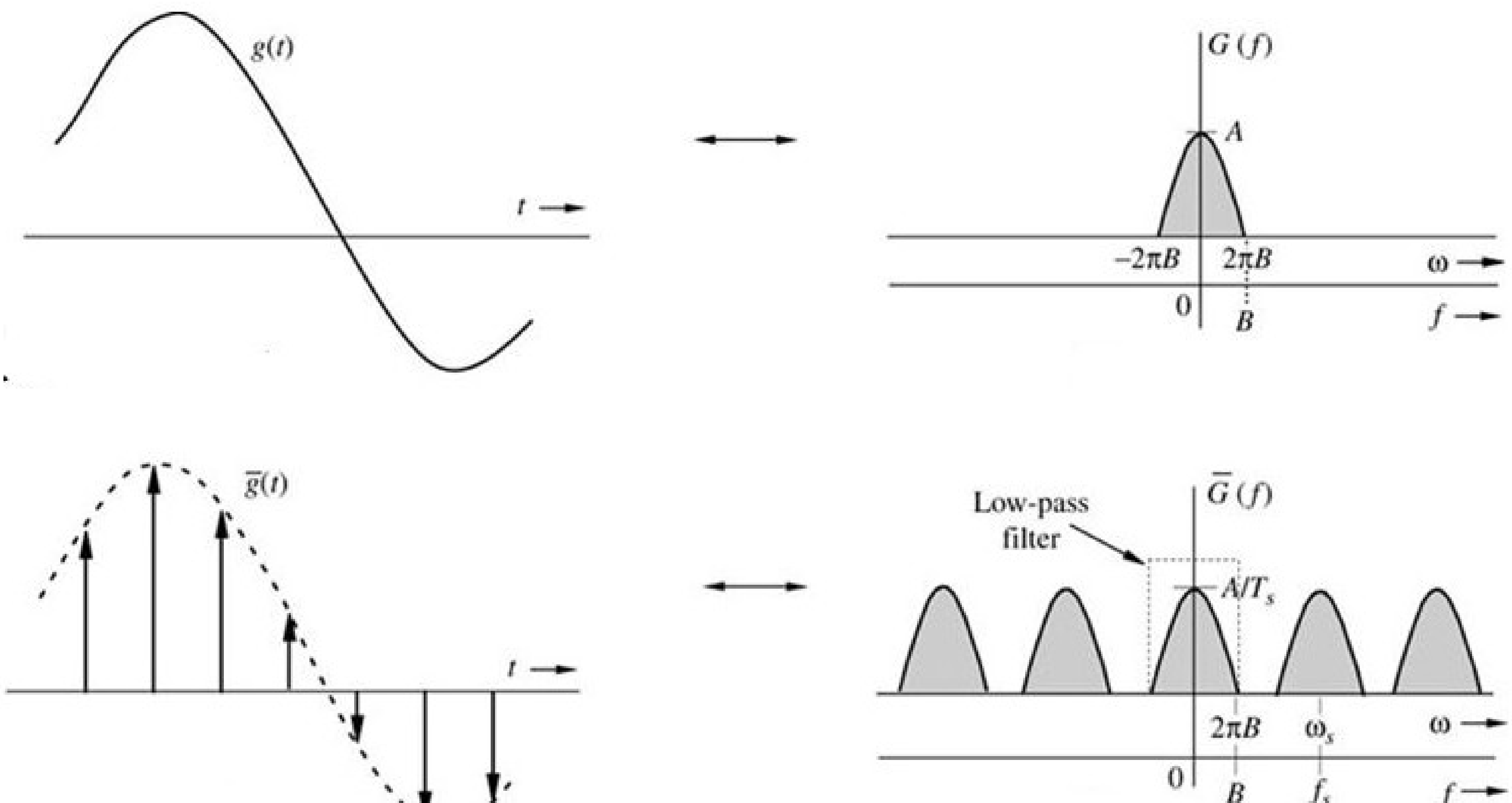


Per tornare nel dominio iniziale definiamo l'antitrasformata:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{+i 2\pi u x}\, du$$

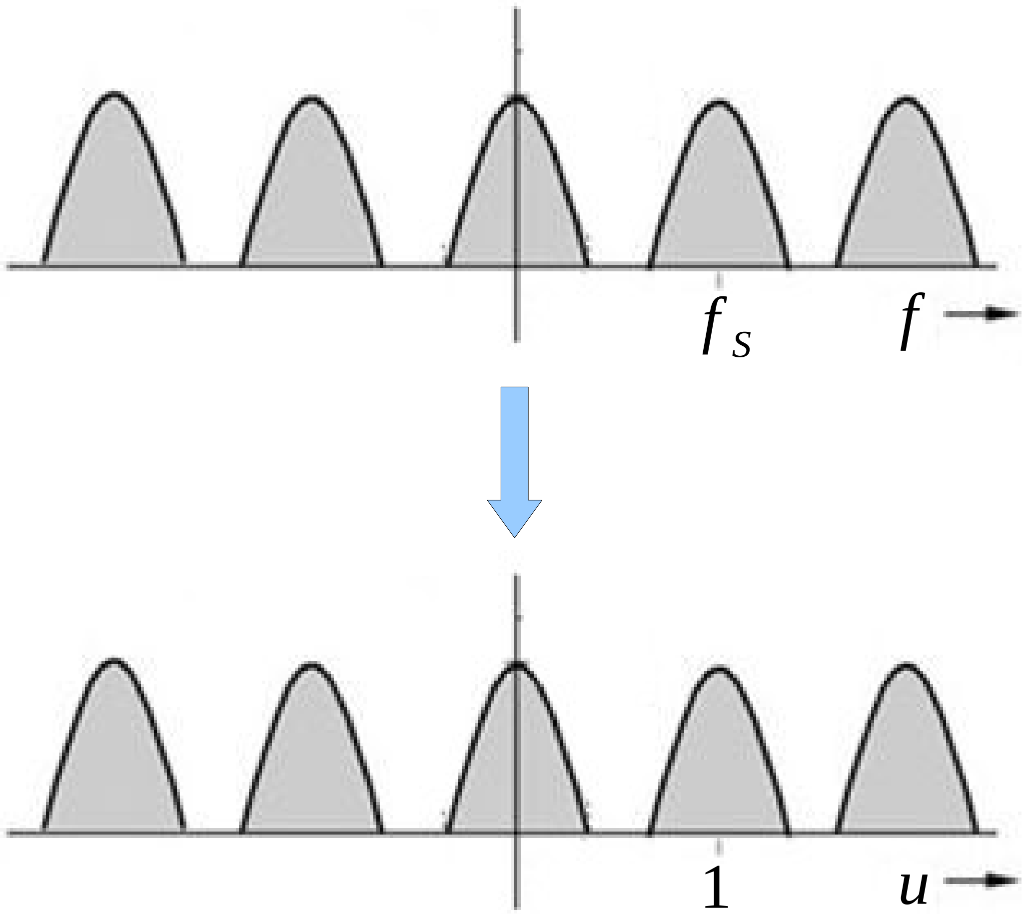
Per essere l'inverso della trasformata diretta, il prodotto dei due kernel deve essere pari ad 1.

Teorema del campionamento



$f_s > 2B$

Frequenze normalizzate



Trasformata Discreta di Fourier - 1D

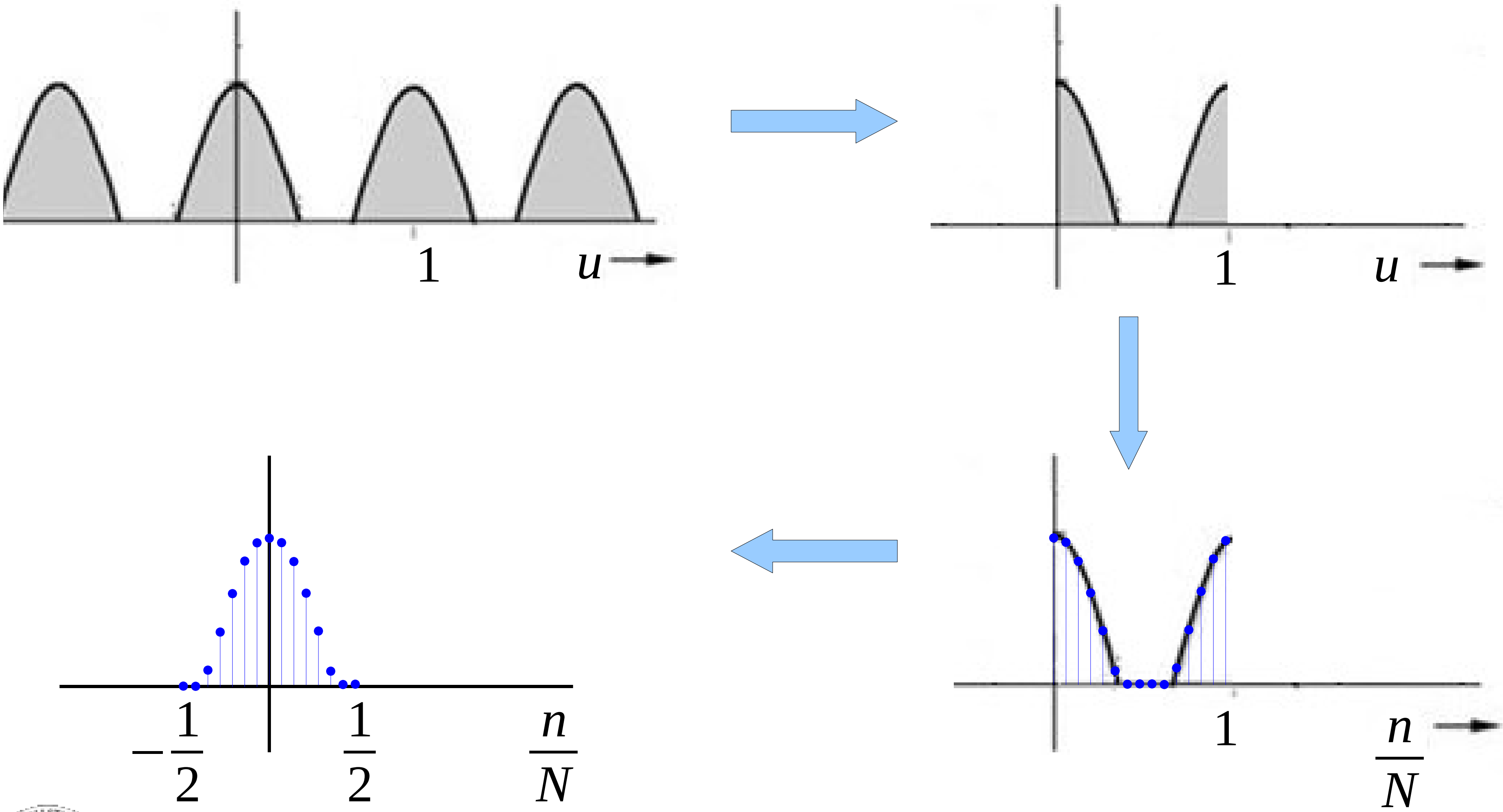
Un segnale discreto h_k di N campioni $(k=0,1,2,\ldots,N-1)$ può essere rappresentato come somma di N esponenziali complessi $e^{-i2\pi kn/N}$, $n=0,1,2,\ldots,N-1$

$$h_k=\sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{i2\pi kn/N}$$

dove gli H_n sono i coefficienti di Fourier, ovvero le proiezioni del segnale h_k sugli esponenziali:

$$H_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi kn/N}$$

Trasformata Discreta di Fourier - 1D



Fast Fourier Transform

La DFT richiede la moltiplicazione di un vettore di N componenti per la matrice NxN il cui componente di posizione (n,k) è:

$$W_N^{kn} = e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$$

Pertanto la DFT può essere scritta come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

$$O(N^2)$$

Fast Fourier Transform

Separando i termini di indice pari da quelli di indice dispari otteniamo:

$$X(k) = \sum_{n\,pari} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n\,dispari} x(n) W_N^{kn}$$

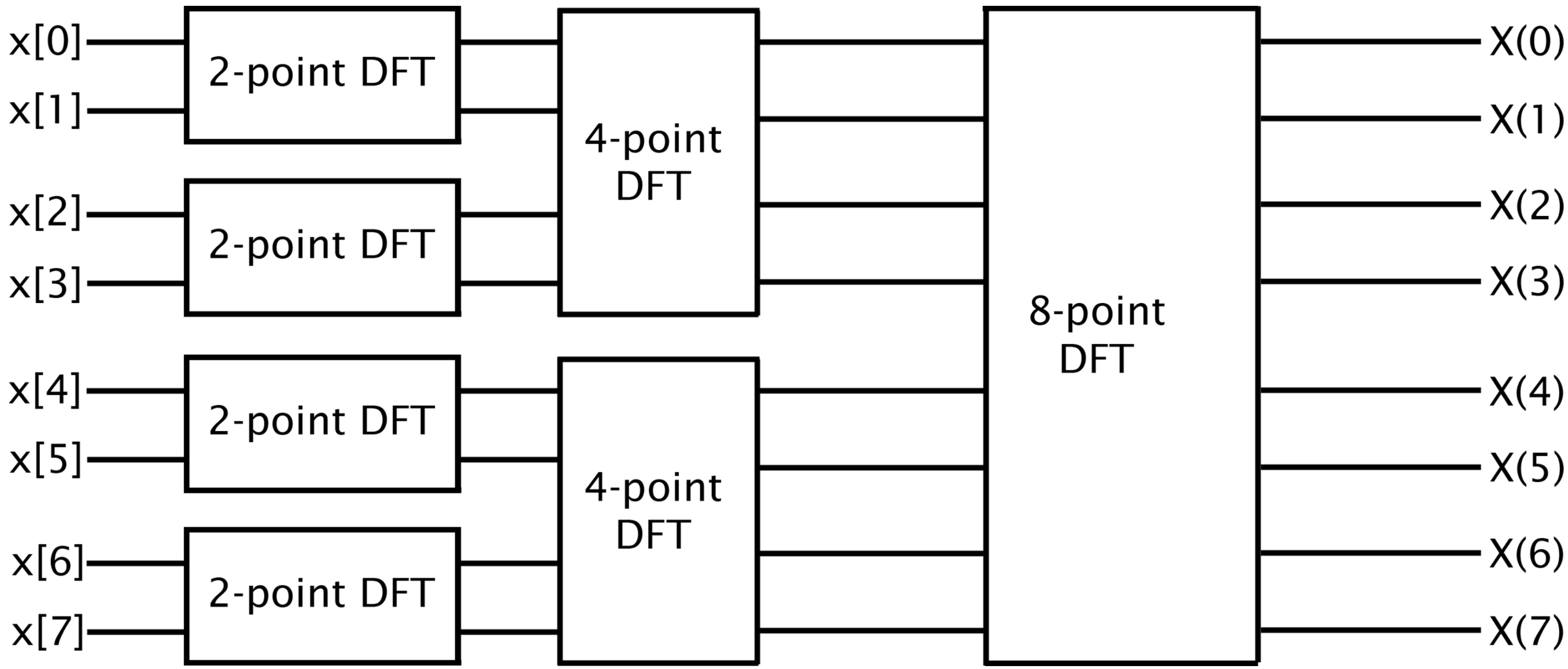
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{k(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{kn} + W_N^{k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{kn}$$

$$= X_1(k) + W_N^{k} X_2(k)$$

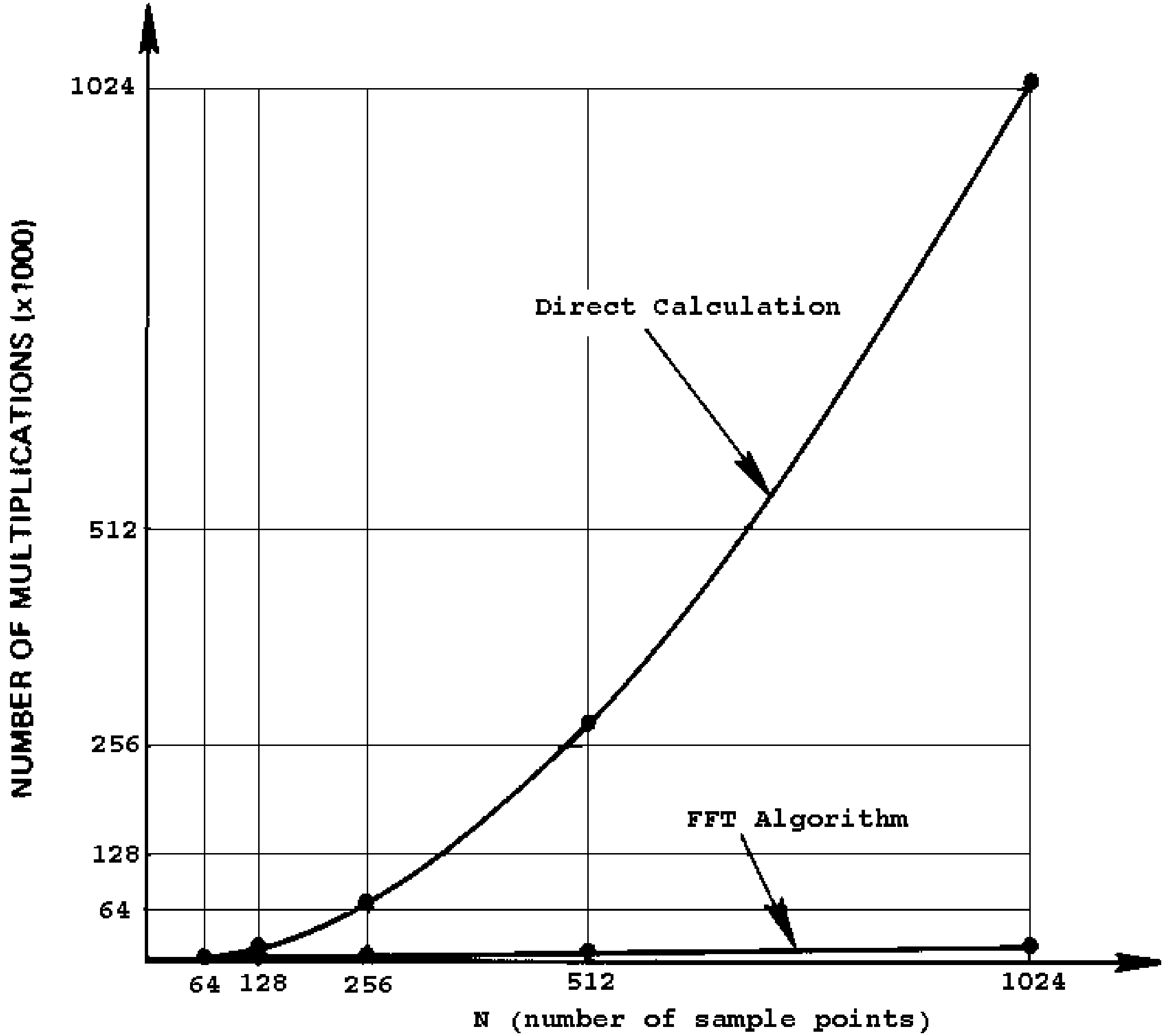
$$O(N \log N)$$

Fast Fourier Transform



Algoritmo di Cooley Tukey (1965).

Fast Fourier Transform



Frequency Shift