Il valore intrinseco

Dr. Salvatore Scognamiglio

Università degli Studi di Napoli "Parthenope"

Lezioni di Tecniche Attuariali delle Assicurazioni

Introduzione

La polizza è equa per costruzione rispetto alla base tecnica del I ordine, che è aggravata in modo prudenziale rispetto alle aspettative dell'assicuratore. Egli si aspetta quindi che, nella realtà, si verifichi una rottura dell'equilibrio a suo favore, cioè che il contratto generi *utili*.

Si consideri al tempo t una polizza generica in essere, stipulata al tempo zero da un assicurato di età x; in particolare si assume che l'assicurato sia in vita al tempo t, cioè che $T_x > t$. Come si è discusso nel capitolo precedente, al tempo t, dopo aver incassato l'eventuale premio P_t e pagato l'eventuale prestazione anticipata caso vita C_t^{va}, l'assicuratore investe la riserva di bilancio ${}_tV_x{}^+$ della polizza. Il rendimento I_{t+1} degli attivi a copertura nel periodo $(t, t+1]$ è in generale una variabile aleatoria al tempo t e diverrà nota al tempo $t+1$. Alla fine dell'anno, al tempo $t+1$ l'assicuratore:

- ha un portafoglio di attivi con valore ${}_tV_x{}^+(1+I_{t+1})$,
- deve pagare le prestazioni caso morte $C_{t+1}^m \mathbb{1}_{\{T_x \leq t+1\}}$,
- deve pagare le prestazioni caso vita posticipate $C_{t+1}^{vp} \mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}$,
- deve ricostituire la riserva matematica in $t+1$, cioè ${}_{t+1}V_x \, \mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}$.

Tutte le grandezze che compaiono nell'elenco sono aleatorie al tempo t e diventeranno note al tempo $t+1$. L'aleatorietà nel valore degli attivi è di tipo unicamente finanziario, mentre l'aleatorietà nelle altre grandezze è legata solo alla durata della vita dell'assicurato.
Al tempo $t+1$, dopo aver pagato le prestazioni e avere ricostruito la riserva, l'assicuratore si troverà nella posizione finanziaria netta

$$U_{t+1} = {}_t V_x{}^+(1+I_{t+1}) - C^m_{t+1}\mathbb{1}_{\{T_x \leq t+1\}} - C^{vp}_{t+1}\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} - {}_{t+1}V_x\,\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}. \quad (1)$$

Se U_{t+1} dovesse rivelarsi positivo, sarà l'importo "avanzato" che l'assicuratore potrà " staccare" se invece dovesse essere $U_{t+1} < 0$, gli attivi a copertura della polizza non saranno stati sufficienti a pagare le prestazioni dell'anno e a ricostituire la riserva: l'assicuratore dovrà quindi integrare con capitale proprio per onorare gli impegni nei confronti dell'assicurato. La grandezza U_{t+1} è quindi l'utile prodotto dalla poliza nell'anno $(t, t+1]$ e temporalmente collocata al tempo $t+1$.

L'equazione di Fouret può essere riscritta nella forma

$$0 = {}_tV_x^{\;+}(1+i) - C^m_{t+1} q_{x+t} - C^{vp}_{t+1} p_{x+t} - {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}. \qquad (2)$$

E' significativo confrontare la (1) e la (2). Nel membro destro della (2)compaiono le aspettative del I ordine in t delle grandezze aleatorie che compaiono nel membro della (1):

$$i = \mathbb{E}^I_t(I_{t+1}), \quad q_{x+t} = \mathbb{E}^I_t(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}}), \qquad p_{x+t} = \mathbb{E}^I_t(\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}).$$

Il membro destro della (2) è pertanto l'aspettativa del I ordine fatta al tempo t del membro destro della (1). Quindi anche il membro sinistro della (2) è uguale all'aspettativa del I ordine fatta al tempo t del membro sinistro della (1, cioè

$$\mathbb{E}^I_t(U_{t+1}) = 0. \qquad (3)$$

che è un altro modo di esprimere l'equilibrio del contratto al tempo t secondo la base tecnica del I ordine.

Un altro modo interessante di confrontare 2) e 1) è quello di sottrarre membro a membro la seconda dalla prima, ottenendo:

$$\begin{aligned} U_{t+1} &= {}_tV_x^{\,+}(I_{t+1} - i) \\ &\quad - C^m_{t+1}(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}) \\ &\quad - ({}_{t+1}V_x + C^{vp}_{t+1})(\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} - p_{x+t}) \end{aligned}$$

Ricordando che $\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}}$, che $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ e quindi che

$$\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} - p_{x+t} = -(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t})$$

si ottiene una versione della formula di contribuzione di Homans

$$U_{t+1} = {}_tV_x^{\,+}(I_{t+1} - i) - (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x)(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}).$$

Dalla formula di Homans

$$U_{t+1} = {}_t V_x^{\,+}(I_{t+1} - i) - (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x)(\mathbb{1}_{\{T_x \leq t+1\}} - q_{x+t})$$

è possibile scomporre l'utile aleatorio in $t+1$ in due componenti, ciascuna che risente di un'unica fonte di incertezza:

- utile finanziario,
- utile tecnico.

l'utile finanziario è

$$U_{t+1}^{f} = {}_{t}V_{x}{}^{+}(I_{t+1} - i) \tag{4}$$

ed è direttamente proporzionale al sovrarendimento degli attivi rispetto al tasso tecnico, con costante di proporzionalità la riserva di bilancio in t, che rappresenta il capitale gestito dall'assicuratore nell'anno $(t, t+1]$. L'entità (il segno) dell'utile finanziario dipende quindi dal risultato della gestione degli attivi e dalla massa gestita.

l'utile tecnico (o *utile da mortalità*) è

$$U^{m}_{t+1} = -(C^{m}_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x)(\mathbb{1}_{\{T_x \leq t+1\}} - q_{x+t}) \qquad (5)$$

ed è direttamente proporzionale alla sovramortalità che si verificherà rispetto a quella prevista dalla base del I ordine, con costante di proporzionalità l'opposto del capitale sotto rischio nell'anno $(t, t+1]$. L'entità e, sopratutto, il segno dell'utile tecnico dipendono quindid all'entità e dal segno e dal capitale sotto rischio e dalla sovramortalità: con capitale sotto rischio positivo (come è ticipamente il caso di una polizza temporanea caso morte o mista, ad esempio), si ha disutile in caso di sovramortalità rispetto all'aspettativa del I ordine, untile in caso di sottomortalità.

L'aspettative (del II ordine) in t dell'utile e delle sue componenti è data dalle espressioni:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^{II}(U_{t+1}) &= {}_tV_x{}^{+}(\mathbb{E}_t^{II}(I_{t+1}) - i) - (C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{t+1}V_x)(q_{x+t}^{II} - q_{x+t}^{I}) \\
\mathbb{E}_t^{II}(U_{t+1}^{f}) &= {}_tV_x{}^{+}(\mathbb{E}_t^{II}(I_{t+1}) - i) \\
\mathbb{E}_t^{II}(U_{t+1}^{m}) &= -(C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{t+1}V_x)(q_{x+t}^{II} - q_{x+t}^{I})
\end{aligned}$$

che rappresentanto la versione in aspettativa della formula di contribuzione di Homans.

La valutazione degli utili: il metodo RAD

Fissata una polizza generica, nel paragrafo precedente abbiamo visto come questa dia origine alla succesione di utili aleatori $U_1 \mathbb{1}_{\{T_x > 0\}}, U_2 \mathbb{1}_{\{T_x > 1\}}, \ldots$. E' chiara l'esigenza di *valutare* questi utili alla data di stipula del contratto - o meglio, nella frase di progettazione del contratto - per fare un profit-test. Uno dei metodi di valutazione più utilizzati è il *Risk Adjusted Discounting* (RAD).

Si consideri una polizza generica, stipulata da una testa di età x anni, con una certa fissata base tecnica demografica del I ordine, e con tasso tecnico i. Si consideri fissata anche la base tecnica del II ordine, espressione delle opinioni probabilistiche dell'assicuratore. In particolare, siano quindi fissate le aspettative dei rendimenti degli attivi $\mathbb{E}_0^{II}(I_1), \mathbb{E}_0^{II}(I_2), \ldots$ alla data di valutazione, coincidente con la data di stipula. Applicando la formula di contribuzione di Homans, l'aspettativa (del II ordine) alla data di valutazione dell'utile al tempo $k > 0$ è data da

$$\mathbb{E}_0^{II}(U_k \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}) = \mathbb{E}_0^{II}(U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}) + \mathbb{E}_0^{II}(U_k^m \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}). \tag{6}$$

Calcoliamo separamente l'utile finanziario atteso e l'utile tecnico atteso.

Per quanto riguarda il primo, sappiamo che la grandezza U_k^f risente solamente di incertezza di tipo finanziario, mentre l'aleatorietà della funzione indicatrice $\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}$ è quella della durata della vita dell'assicurato. Possiamo senz'altro accettare come ipotesi della valutazione della durata della vita dell'assicurato e l'evoluzione del mercato finanziario siano indipendenti e fattorizzare quindi

$$\mathbb{E}_0^{II}(U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}) = \mathbb{E}_0^{II}(U_k^f)\mathbb{E}_0^{II}(\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}).$$

Visto che valgono

$$\mathbb{E}_0^{II}(U_k^f) = \mathbb{E}_0^{II}[{}_{k-1}V_x{}^+(I_k - i)] = {}_{k-1}V_x{}^+[\mathbb{E}_0^{II}(I_k) - i],$$

$$\mathbb{E}_0^{II}(\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}) = \mathbb{P}_0^{II}(T_x > k-1) = {}_{k-1}p_x{}^{II}.$$

L'utile finanziario atteso alla data di valutazione è peranto

$$\mathbb{E}_0^{II}(U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}) = {}_{k-1}V_x{}^+[\mathbb{E}_0^{II}(I_k) - i]_{k-1}p_x{}^{II}.$$

E' quindi direttamente proporzionale alla massa gestita, al sovrarendimento atteso rispetto al tasso tecnico e alla probabilità che la polizza sia in essere all'inizio dell'anno di riferimento.

Per il calcolo dell'utile tecnico atteso, si osservi anzitutto che

$$\mathbb{1}_{\{T_x \leq k\}} \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}} = \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}}$$

da cui segue che

$$(\mathbb{1}_{\{T_x \leq k\}} - q^{I}_{x+k-1}) \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}} = \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}} - q^{I}_{x+k-1} \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}},$$

e

$$\mathbb{E}^{II}_0 [(\mathbb{1}_{\{T_x \leq k\}} - q^{I}_{x+k-1}) \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}] = {}_{k-1|1}q_x{}^{II} - q^{I}_{x+k-1}\, {}_{k-1}p_x{}^{II},$$

che può essere anche riscritto

$$\mathbb{E}^{II}_0 [(\mathbb{1}_{\{T_x \leq k\}} - q^{I}_{x+k-1}) \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}] = (q^{II}_{x+k-1} - q^{I}_{x+k-1})\, {}_{k-1}p_x{}^{II}. \qquad (7)$$

Pertanto, applicando la linearità dell'aspettativa e la (7) si ottiene che l'utile tecnico atteso in zero è

$$\mathbb{E}_0^{II}(U_k^m[(\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}) = -(C_k^m - C_k^{vp} - {}_kV_x)(q_{x+k-1}^{II} - q_{x+k-1}^{I})_{k-1}p_x{}^{II} \qquad (8)$$

L'utile da tecnico atteso è quindi direttamente proporzionale all'opposto del capitale sotto rischio, alla soramortalità attesa, e alla probabilita che la polizza sia in essere all'inizio dell'anno di riferimento.

La valutazione degli utili: il metodo RAD

Dopo aver calcolato l'utile atteso occore scontarlo dalla data k, alla quale è temporalmente collocato, alla data di valutazione. Il tasso da usare non può essere naturalmente il tasso di interesse privo di rischio espresso dal mercato obbligazionario, ma và opportunamente aumentato per compensare il rischio insito nell'utile, che è stato "sterilizzato" dal calcolo dell'aspettativa. Il tasso *aggiustato per il rischio* (*risk adjusted*) così ottenuto è il tasso RAD j che, nella pratica operativa, per semplicità si considera spesso costante e noi seguiremo questa linea, nulla vieta di utilizzare una struttura per scadenza di interessi non piatta. Indicando quindi con $V(0,\cdot)$ il valore calcolato nel senso RAD, il valore in zero dell'utile al tempo k è la somma del valore dell'utile finanziario e dell'utile tecnico

$$V(0, U_k \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}) = V(0, U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}) + V(0, U_k^m \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}})$$

esendo

$$\begin{aligned} V(0, U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}) &= \mathbb{E}_0^{II}(U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}})(1+j)^{-k} \\ V(0, U_k^m \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}) &= \mathbb{E}_0^{II}(U_k^m \mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}})(1+j)^{-k}. \end{aligned}$$

Il valore intrinseco

Il valore complessivo del flusso **U** degli utili, che si chiama *valore intrinseco*, è la somma del valore degli utili estesa a tutti gli anni di polizza

$$V(0,\mathbf{U}) = \sum_{k>0} \mathbb{E}_0^{II}(U_k \mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}})(1+j)^{-k} \tag{9}$$

ed è naturalmente scomposto nel *valore intrinseco finanziario*

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{U^f}) &= \sum_{k>0} \mathbb{E}_0^{II}(U_k^f \mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}})(1+j)^{-k} \\ &= \sum_{k>0} {}_{k-1}V_x{}^{+}[\mathbb{E}_0^{II}(I_k) - i]_{k-1}p_x{}^{II}(1+j)^{-k} \end{aligned}$$

e nel *valore intriseco tecnico*

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{U^m}) &= \sum_{k>0} \mathbb{E}_0^{II}(U_k^m \mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}})(1+j)^{-k} \\ &= -\sum_{k>0}(C_k^m - C_k^{vp} - {}_kV_x)(q_{x+k-1}^{II} - q_{x+k-1}^{I})_{k-1}p_x{}^{II}(1+j)^{-k} \end{aligned}$$

Il valore intrinseco

Il valore intrinseco che si ottiene dipende dalla scelta:

- della base tecnica demografica del II ordine,
- dell'aspettativa dei rendimenti degli attivi,
- dallo spred che si applica al tasso privo di rischio per ottenere il tasso RAD.