

La distribuzione composta per il risarcimento totale

Dr. Salvatore Scognamiglio

Università degli Studi di Napoli "Parthenopé"

Lezioni di Tecnica Attuariale delle Assicurazioni

In un contratto di assicurazione contro i danni, usualmente denominato *polizza*, l'assicuratore si impegna a risarcire l'assicurato, secondo le modalità previste nel contratto, per i danni causati dai sinistri che colpiscono il rischio assicurato durante il periodo di copertura.

A fronte dell'impegno aleatorio dell'assicuratore, il contraente paga un prezzo, detto *premio*, che può essere corrisposto in un'unica soluzione al momento della stipulazione del contratto oppure frazionato in rate.

Nel seguito, fissiamo l'attenzione su un contratto di durata annuale, con pagamento del premio in una soluzione alla stipulazione del contratto.

Il punto di partenza é la valutazione della *prestazione aleatoria* dell'assicuratore, che consiste nel pagamento all'assicurato, piú in generale ai beneficiari, del *risarcimento totale* per i danni prodotti da **tutti i sinistri** che colpiscono il rischio assicurato nel periodo di copertura.

Denotiamo con:

- $X \in [0, +\infty)$ il risarcimento totale aleatorio a carico dell'assicuratore per effetto del contratto.
- $N \in \mathbb{N}_0$ il numero aleatorio di sinistri che colpiscono il rischio.
- $Z_i \in [0, +\infty)$ l'importo aleatorio del danno arrecato dall' i -esimo sinistro.

Poiché l'obiettivo consiste nel descrivere la prestazione aleatoria dell'assicuratore alla stipulazione del contratto, le variabili aleatorie $(X, N, (Z_i)_{i=1, \dots, N})$ sono tutte riferite allo stato d'informazione che si ha in tale momento.

Il risarcimento o indennizzo che l'assicuratore paga all'assicurato a fronte del danno causato da un sinistro é funzione del danno. Indichiamo con

- Y_i l'importo aleatorio del risarcimento per l'-iesimo sinistro $Y_i = \phi(Z_i)$.

Denotiamo con $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la *funzione di risarcimento* determinata dalle condizioni contrattuali.

Il risarcimento totale puo' essere definito come:

$$X = \begin{cases} Y_1 + \dots + Y_N & \text{se } N > 0 \\ 0 & \text{se } N = 0. \end{cases}$$

Si osservi che tra risarcimento e danno deve sussistere la relazione $Y \leq Z$, detta *principio di non arricchimento*.

Assicurazione a valore intero

Si tratta di una forma assicurativa applicata tipicamente nelle assicurazioni di beni (per esempio: incendi, furto, trasporti), dove é possibile quantificare *a priori* un valore del bene assicurato.

Tale valore, sia V , é riportato in polizza ed é detto *valore assicurato* o *somma assicurata*. Esso rappresenta la massima determina possibile del danno provocato da un sinistro.

La funzione di risarcimento assume la forma $Y = Z$.

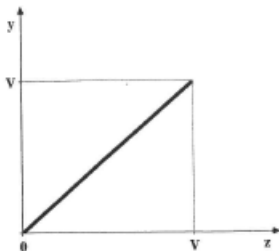


Figure: Assicurazione a valore intero.

Assicurazione a valore intero con regola proporzionale

Puo' accadere che il valore assicurato V , dichiarato in polizza, non coincida con il valore effettivo del bene assicurato V_r riferito all'epoca del sinistro, secondo quanto accertato dall'assicuratore in seguito alla denuncia. Allora, se $V \geq V_r$, il risarcimento segue la regola stabilita: $Y = Z$. Altrimenti, se $V \leq V_r$, si ha *sottoassicurazione* e viene applicata la *regola proporzionale*

$$Y = \frac{V}{V_r} Z.$$

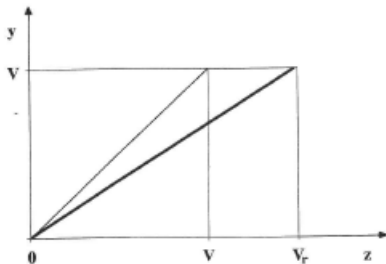


Figure: Assicurazione a valore intero con regola proporzionale.

Talvolta, si ritiene di attribuire probabilità nulla alle determinazioni possibili del danno provocato da un sinistro, che risultino superiori ad un dato importo. Data la funzione di ripartizione del danno del sinistro $F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$, si definisce il massimo danno probabile (MLP):

$$MPL = \sup\{z \in \mathbb{R} : F(z) < 1\}.$$

Come l'assicurazione a valore intero, anche l'assicurazione a primo rischio relativo risulta applicabile quando è quantificabile *a priori* un valore V del bene assicurato. Si indichi con M il massimale di copertura (con $M < V$), l'assicurato si impegna a risarcire il danno in minusra integrale se il danno è minore o uguale a M , a pagare l'importo M altrimenti:

$$Y = \begin{cases} Z & \text{se } Z \leq M \\ M & \text{se } Z > M. \end{cases} = \min(Z, M)$$

il valore M può, in particolare, rappresentare il massimo danno probabile.

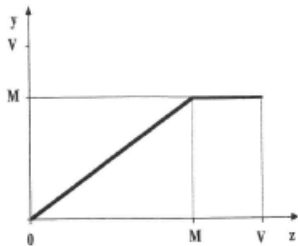


Figure: Assicurazione a primo rischio relativo.

Analogamente al caso dell'assicurazione a valore intero, se $V < V_r$, con V_r valore effettivo del bene assicurato, si ha sottoassicurazione ed é applicabile una riduzione del risarcimento:

$$Y = \min\left(\frac{V}{V_r}Z, M\right).$$

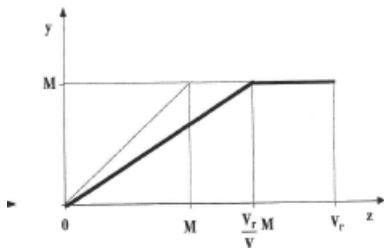


Figure: Assicurazione a primo rischio relativo con sottoassicurazione.

Si tratta di una forma assicurativa in cui non si fa alcun riferimento in polizza ad un valore assicurato. Si fissa contrttualmente il *massimale di copertura* M e il risarcimento risulta definito come:

$$Y = \begin{cases} Z & \text{se } Z \leq M \\ M & \text{se } Z > M \end{cases} = \min(Z, M).$$

Si tratta della modalità di risarcimento tipica delle assicurazioni di responsabilità civile. Inoltre, é usualmente presente nelle coperture del ramo malattie per il rimborso spese mediche.

Si fissa un importo d ed il risarcimento é nullo se l'importo del danno é minore o uguale a d . Si distingue poi tra:

- assicurazioni con *franchigia relativa*;
- assicurazioni con *franchigia assoluta*.

Nel caso di franchigia relativa, per importi di danno superiori a d il risarcimento del danno avviene in misura integrale:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \leq d \\ Z & \text{se } Z > d \end{cases} = Z \mathbb{1}_{\{Z > d\}}.$$

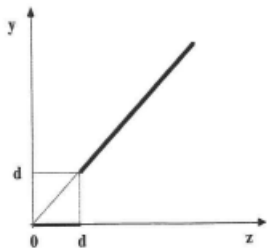


Figure: Assicurazione con franchigia relativa.

Assicurazione con franchigia assoluta

Nel caso di franchigia assoluta, per importi di danno superiori a d è risarcita l'eccedenza rispetto alla franchigia e l'importo d rimane a carico dell'assicurato:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \leq d \\ Z - d & \text{se } Z > d \end{cases} = \max(0, Z - d).$$

La presenza di una franchigia ha lo scopo di coinvolgere maggiormente l'assicurato nella prevenzione dei sinistri. Evita inoltre l'intervento dell'assicuratore per danni di lieve entità con conseguenti riduzioni di costi, anche di tipo amministrativo. L'assicurato risulta, naturalmente, non coperto per importi di danno inferiori alla franchigia, che si traduce in una riduzione del premio richiesto.

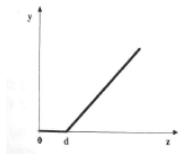


Figure: Assicurazione con franchigia assoluta.

Spesso le condizioni previste nei contratti assicurativi danno luogo a funzioni di risarcimento che combinano tra loro alcune delle diverse modalità descritte fino ad ora. Per esempio, in presenza di franchigia d e massimale M , il risarcimento in caso risulterebbe in caso di franchigia relativa:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \leq d \\ Z & \text{se } d < Z \leq M \\ M & \text{se } Z > M \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \leq d \\ \min(Z, M) & \text{se } Z > d. \end{cases}$$

Nel caso di franchigia assoluta:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \leq d \\ Z - d & \text{se } d < Z \leq M \\ M - d & \text{se } Z > M \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \leq d \\ \min(Z - d, M - d) & \text{se } Z > d. \end{cases}$$

Assicurazione con scoperto

In questo tipo di assicurazione, si fissa un'aliquota $\alpha \in]0, 1[$. A fronte del danno Z , l'importo αZ rimane a carico dell'assicurato. Il risarcimento pagato dall'assicurazione risulta quindi:

$$Y = (1 - \alpha)Z$$

La clausola di scoperto viene usata, in particolare, quando il comportamento dell'assicurato può influire sul costo del sinistro. Ciò avviene, per esempio,

- nelle coperture per il rimborso di spese mediche (kasko),
- nella garanzia guasti accidentali dell'assicurazione auto rischi diversi
- nel caso di assicurazione contro i furti.

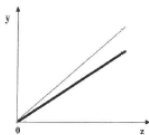


Figure: Assicurazione con scoperto.

Partendo da

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i,$$

dove $Y_i = \phi(Z_i)$. Si puo' affermare che X dipende dal processo stocastico $\{N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ e la distribuzione di probabilita' di X si ottiene introducendo un modello per tale processo.

Usualmente si fanno le seguenti ipotesi:

- per ogni $n > 0$, $Z_1|N = n, \dots, Z_N|N = n$ sono stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuiti;
- la distribuzione di probabilita' di $Z_i|N = n, i \leq n$, non dipende da n .

Le precedenti due ipotesi implicano che la distribuzione di probabilita' del danno provocato dall' i -esimo sinistro nell'ipotesi che il rischio sia colpito da n sinistri, con $i \leq n$, non dipende ne da i , ne' da n .

Indichiamo inoltre con F_Z la comune funzione di ripartizione e con $\mathbb{E}[Z^k]$ il comune momento k -esimo di tali numeri aleatori condizionati.

Supponiamo, com'è naturale, che le speranze matematiche $\mathbb{E}[N]$ e $\mathbb{E}[Y]$ del numero di sinistri e del risarcimento per sinistro siano finite. Per la proprietà di disintegrabilità della speranza matematica rispetto alla partizione $\{N = 0, N = 1, \dots\}$, si ha:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \cdot \mathbb{E}[X|N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Y_i | N = n\right].$$

Sfruttando la proprietà di attività della speranza matematica ed essendo $\mathbb{E}[Y_i|N = n] = \mathbb{E}[Y]$, per ogni $i \leq n$ e per ogni $n > 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Y_i | N = n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) n \mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[Y] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) n = \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[N]. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[N].$$

Essendo, per la varianza $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, bisogna calcolare il momento secondo di X , supponendo che siano finiti i momenti secondi $\mathbb{E}[N^2]$ e $\mathbb{E}[Y^2]$ del numero di sinistri e del risarcimento per sinistro.

Con semplici passaggi si ottiene:

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[N]\text{Var}[Y] + \text{Var}[N]\mathbb{E}[Y]^2.$$

Per ottenere valutazioni per X basta assegnare, e quindi valutare, in modo separato le distribuzioni (o almeno i momenti) di:

- numero di sinistri e del danno per sinistro ovvero la distribuzione $\mathbb{P}(N = n), n = 0, 1, \dots;$
- la funzione di ripartizione F_Z che compongono la *base tecnica* del rischio.

- *Per ogni $n > 0$, $Z_1|N = n, \dots, Z_n|N = n$ sono identicamente distribuiti.*
Supponendo che si siano stati n sinistri, ai danni prodotti da tali sinistri si ritiene di attribuire la medesima distribuzione di probabilità, indipendentemente dall'ordine in cui i sinistri si sono verificati. Tale ipotesi è ragionevole vista la breve durata del contratto assicurativo.
- *Per ogni $n > 0$, $Z_1|N = n, \dots, Z_n|N = n$ sono identicamente stocasticamente indipendenti.*
In molti casi concreti, nell'ipotesi che ci siano stati due sinistri, un'informazione sull'importo del danno provocato dal primo sinistro può portare a modificare la valutazione probabilistica del danno provocato dal secondo.
- *La distribuzione di probabilità $Z_i|N = n, i \leq n$, non dipende da n .* Le osservazioni su dati reali, in molti casi, non avvalorano tale ipotesi. Infatti, spesso mostrano che maggiore è il numero di sinistri che colpiscono un rischio, mediamente inferiori sono i danni provocati dai vari sinistri.

- *Non si tiene conto di aspetti finanziari.*
Nel valutare l'impegno dell'assicuratore all'epoca di stipulazione del contratto, gli importi dei risarcimenti non sono attualizzati. Cio' viene giustificato dalla breve durata della copertura.
- *Non si tiene conto del fatto che in alcuni casi i sinistri vengono risarciti anche anni dopo l'accadimento.*
Nella pratica si osserva invece che tali sinistri sono mediamente di importo più elevati di quelli risarciti subito, e cio' non solo a causa di effetti-economico-finanziari.