Laurea Triennale in Economia e Management
Anno Accademico 2023/2024

Consulenza Finanziaria

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Daniele Previtali – daniele.previtali@uniparthenope.it

CAPM – Definizione

Il *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) è un modello di equilibrio dei mercati che consente di individuare una precisa relazione fra rendimento e rischio attesi per tutte le attività

Applicazioni

- Stima del rendimento atteso di un titolo azionario
- Stima del costo del capitale nel caso di valutazioni d'azienda

Paper di riferimento

- Sharpe (1964)
- Lintner (1965)
- Mossin (1966)

CAPM – Assunzioni

Ipotesi riprese da Markowitz

1. Tutti gli investitori sono avversi al rischio e **massimizzano la propria utilità attesa**.
2. Tutti gli investitori selezionano i propri portafogli in base al rendimento medio atteso e alla deviazione standard dei rendimenti del portafoglio stesso (adottando quindi il **criterio media-varianza alla base del modello di Markowitz**).
3. Tutti gli investitori decidono sulla base di un **orizzonte uniperiodale**.

Ipotesi aggiuntive

4. **Ogni investitore può investire oppure prendere in prestito – senza alcuna limitazione – a un tasso privo di rischio (*risk-free*); tale tasso è uguale per tutti gli investitori.**
5. **L'orizzonte uniperiodale adottato da ogni investitore è lo stesso per tutti gli investitori.**
6. **Gli investitori hanno aspettative omogenee circa i rendimenti attesi, le variazioni e le covarianze dei rendimenti attesi di tutte le attività rischiose nelle quali essi possono investire.**
7. Non esistono tasse, né costi di transazione, né altre **imperfezioni del mercato**.

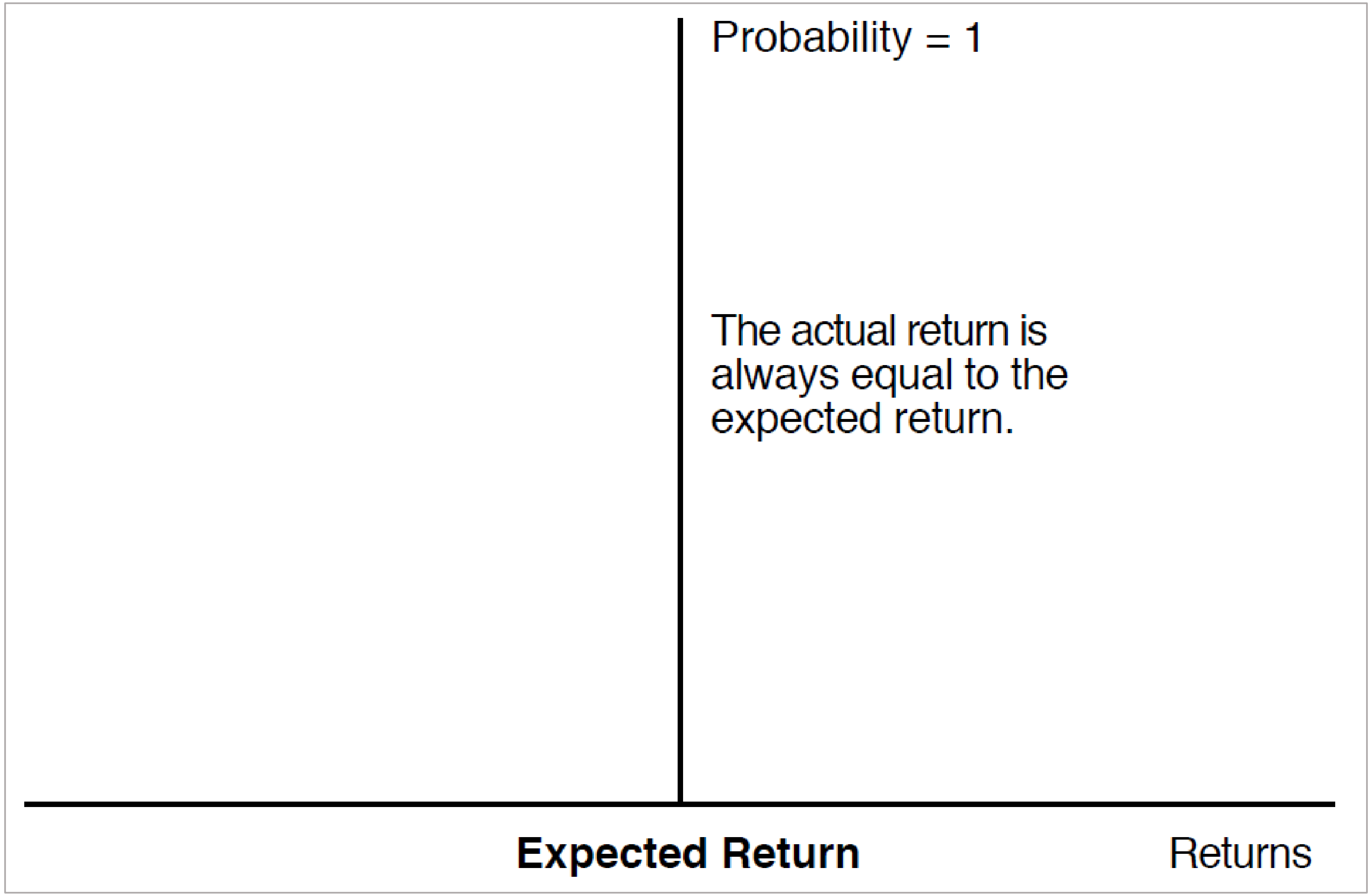
UNA SOLA FORNTIERA EFFICIENTE PER TUTTI GLI INVESTITORI

CAPM – Assunzioni

Ipotesi riprese da Markowitz

- Grazie all'**Hp.6**, gli investitori cercheranno di sfruttare al massimo i benefici della *diversificazione* tentando di ricavare la frontiera efficiente e scartando qualsiasi portafoglio che non si trovi su di essa.
- In forza di **Hp.4** e **Hp.6**, **la frontiera efficiente stimata sarà esattamente la stessa per tutti gli investitori**.

HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free



HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free

Tasso privo di rischio (r_f): è rappresentato dal rendimento di uno *zero-coupon bond* sovrano a breve termine.

Un titolo siffatto:

- non presenta alcun rischio di *insolvenza*, data la natura dell'emittente;
- né di *reinvestimento*, perché non corrisponde flussi intermedi da reinvestire;
- né di *prezzo*, perché si ipotizza che venga rimborsato alla pari dopo essere stato detenuto fino alla scadenza.
- ha *deviazione standard pari a 0*, perché il rendimento è certo.
- un esempio concreto è offerto dal BOT a 1 anno (12 mesi).

Possibilità di investimento

Possibilità di finanziamento

HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free

I tasso *risk-free* è certo, determinabile *a priori*; pertanto, oltre ad avere una deviazione standard nulla, sarà nulla anche la sua covarianza rispetto a un qualsiasi altro tasso r_i:

$$E\left(r_f\right) = r_f \qquad \sigma_{r_f} = 0 \qquad \sigma_{r_f, r_i} = 0$$

Consideriamo un portafoglio di valore pari a 1 composto da una quota X investita nel titolo *risk-free* (f) e una quota $1 - X$ investita in un titolo rischioso i. Il valore atteso del rendimento e rischio di un generico portafoglio composto da 2 titoli A e B sono:

$$(1)\ \ E(r_P) = X \cdot E(r_A) + (1 - X) \cdot E(r_B)$$

$$(2)\ \ \sigma_P = \sqrt{X^2\sigma_A^2 + (1 - X)^2\sigma_B^2 + 2X(1 - X)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free

Se uno dei due titoli è un risk-free, avendo una deviazione standard nulla, il valore atteso del rendimento e rischio del portafoglio sono:

$$(1)\quad E(r_P) = X \cdot E(r_f) + (1-X) \cdot E(r_i) \Rightarrow \boldsymbol{E(r_P) = X \cdot r_f + (1-X) \cdot r_i}$$

$$(2)\quad \sigma_P = \sqrt{X^2 \cdot 0 + (1-X)^2 \cdot \sigma_i^2} = \sqrt{0 + (1-X)^2 \cdot \sigma_i^2} = \sqrt{(1-X)^2 \cdot \sigma_i^2} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_P = (1-X) \cdot \sigma_i}$$

Al crescere della quota $(1-X)$ investita nel titolo rischioso, il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio aumentano linearmente.

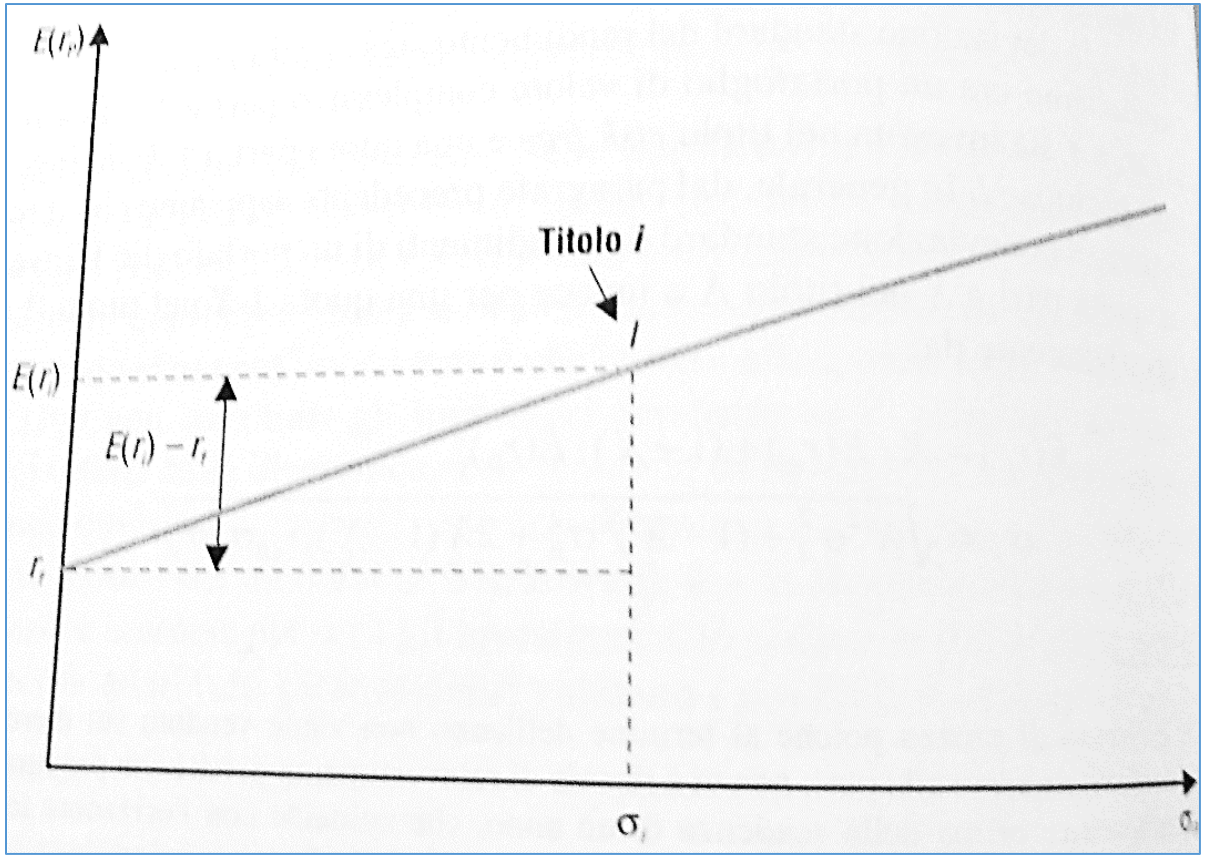
HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free

Mettendo a sistema, otteniamo che le possibili combinazioni tra il titolo *risk-free* e quello rischioso determinano, sul piano cartesiano $(\sigma_P \times E(r_P))$, una retta con intercetta pari a r_f e coefficiente angolare $(E(r_i) - r_f)/\sigma_i$.

Equazione della retta

$$E_{r_p} = r_f + \boxed{\frac{(E(r_i) - r_f)}{\sigma_i}} \times \sigma_p$$

Remunerazione per unità di rischio



HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free

- Il coefficiente angolare della retta nella, cioè $(E(r_i) - r_f)/\sigma_i$, rappresenta il **premio (remunerazione) per unità di rischio** del titolo I.

- Grazie ad **Hp.5**, le quote del titolo *risk-free* possono essere anche negative (se è stato preso in prestito al tasso r_f) e, per complementarità, le quote investite nel titolo rischioso possono anche eccedere l'unità. Nella Figura precedente, il segmento compreso tra r_f e I identifica le combinazioni ottenibili senza indebitamento; la porzione a destra di I rappresenta le possibilità di indebitamento.

- Per esempio, immaginiamo di avere un portafoglio di € 1 milione. Se l'investitore si indebita al tasso $r_f = 5\%$ per un importo pari a € 250.000, potrà acquistare il titolo rischioso, che rende $r_i = 15\%$, per un importo di € 1.250.000. Il rendimento di un siffatto portafoglio sarà dunque:

$$E(r_P) = -0{,}25 \cdot 5\% + 1{,}25 \cdot 15\% = -1{,}25\% + 18{,}75\% = 17{,}50\%$$

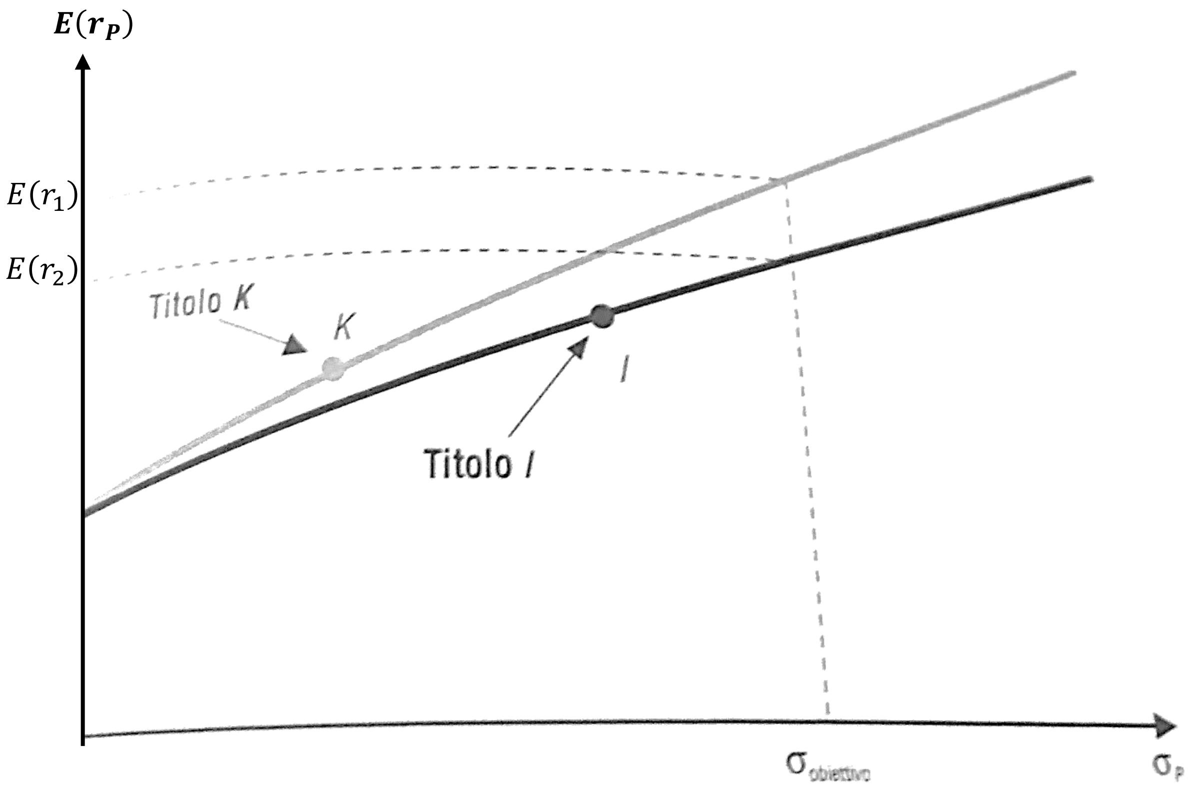
HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free

Ipotesi:

- r_f: 5%
- $E(r_i)$: 15%
- σ_i= 20%

(1) Quota investita nell'attività *risk free* X	(2) Quota investita nell'attività rischiosa 1 – X	(3) Rendimento atteso del portafoglio $E(r_P)$	(4) Deviazione standard dei rendimenti del portafoglio σ_P	(5) Rendimento atteso in eccesso rispetto al tasso *risk free* $E(r_P) - r_f$	(6) Rapporto fra rendimento in eccesso e deviazione standard $\frac{E(r_P) - r_f}{\sigma_P}$
1,00	0,00	5,0%	0,0%	0,0%	Non calcolabile
0,75	0,25	7,5%	5,0%	2,5%	0,5
0,50	0,50	10,0%	10,0%	5,0%	0,5
0,25	0,75	12,5%	15,0%	7,5%	0,5
0,00	1,00	15,0%	20,0%	10,0%	0,5
-0,25	1,25	17,5%	25,0%	12,5%	0,5
-0,50	1,50	20,0%	30,0%	15,0%	0,5

HP. 5 – Possibilità di investimento in un titolo risk-free



Titoli rischiosi diversi determinano combinazioni diverse con il titolo *risk-free*. Per esempio, il titolo K è preferibile al titolo I, in quanto le combinazioni tra f e K dominano quelle tra f e I.

Logica di portafoglio: la Capital Market Line (CML)

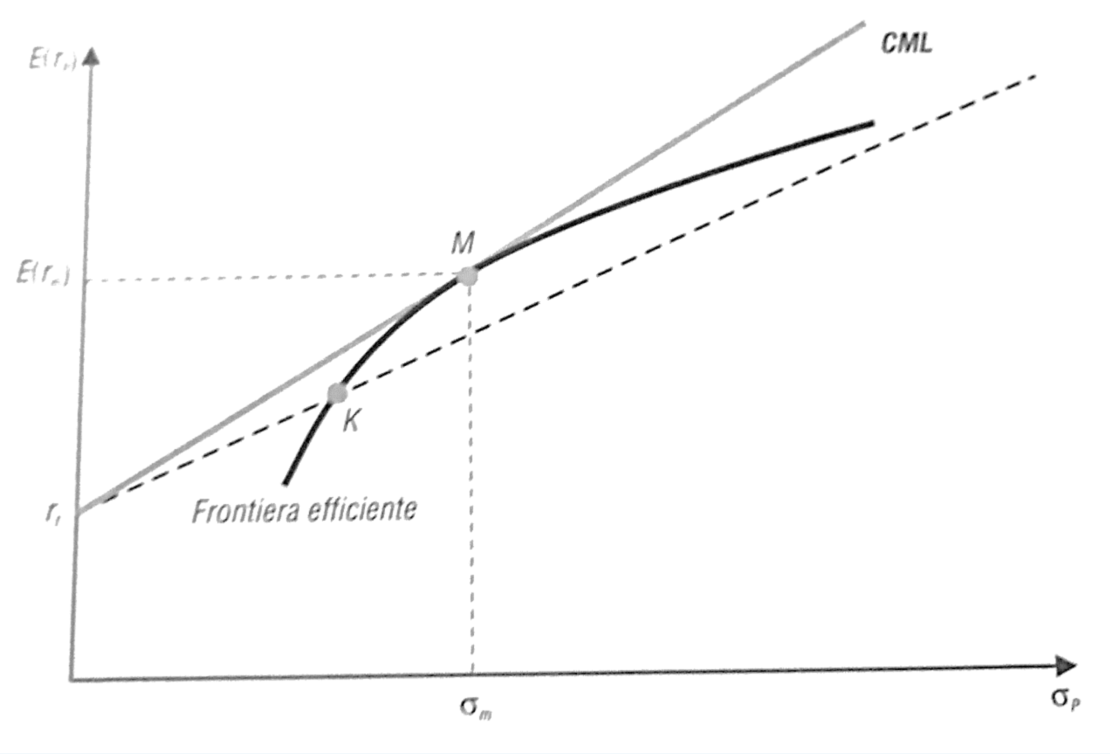
- Data la frontiera efficiente (costituita da soli titoli rischiosi), si può notare che combinando ciascun portafoglio di titoli rischiosi con il titolo *risk-free* emerge una combinazione dominante rispetto alle altre.
- Essa è identificata dalla retta passante per r_f e per un punto M della frontiera efficiente; quest'ultimo corrisponderà al c.d. **portafoglio di mercato.**

La retta che individua le combinazioni fra il titolo *risk-free* e il portafoglio di mercato è detta *Capital Market Line* (CML) e rappresenta l'insieme dei portafogli in grado di offrire il più alto rendimento atteso per unità di rischio.

- **La CML è la stessa per tutti gli investitori**, allorché il tasso *risk-free* è unico e investitori con diversi profili di rischio-rendimento presentano la medesima curva dei rendimenti.
- Tuttavia, **ciascun investitore presenterà un diverso portafoglio ottimale $\boldsymbol{P^*}$**, dato dal punto di tangenza della CML con la più elevata delle proprie curve d'indifferenza rischio-rendimento.

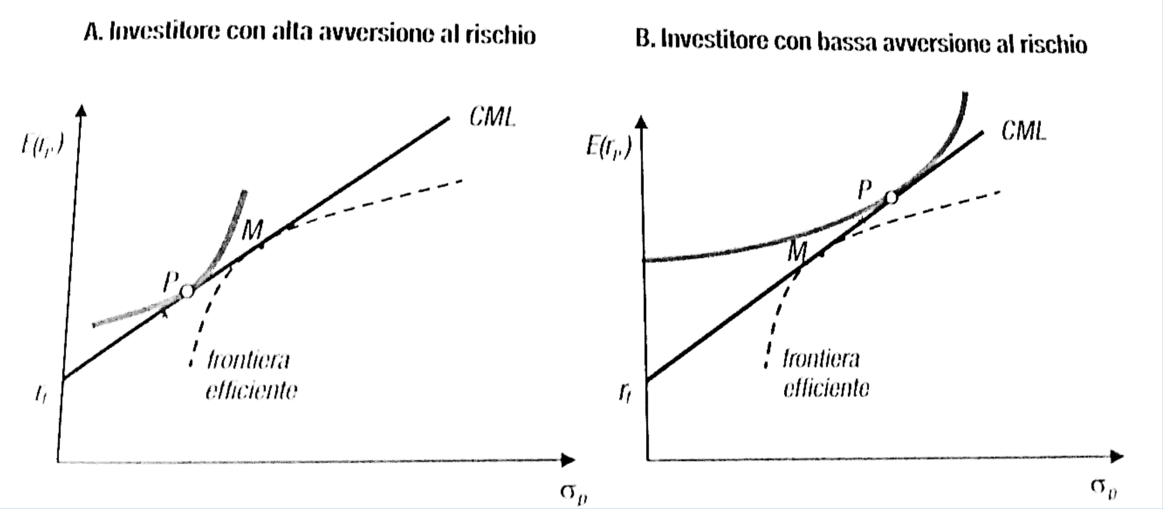
Logica di portafoglio: Capital Market Line (CML)

Il *market portfolio* e la *Capital Market Line*



$$E(r_P) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_P$$

L'identificazione del portafoglio ottimale P^* per il singolo investitore



- Ciascun investitore vorrà combinare il titolo *risk-free* solo e soltanto col portafoglio di mercato M; **ogni altra scelta sarebbe subottimale.** Nessun soggetto, in equilibrio, vorrà detenere un portafoglio diverso da M.

- L'assoluta indipendenza di M dal profilo di rischio-rendimento dell'investitore è alla base del c.d. ***separation theorem***, secondo cui il portafoglio di mercato può essere individuato anche in assenza di qualsiasi informazione riguardo alle curve d'indifferenza dei diversi soggetti.

Dalla CML alla Security Market Line (SML)

Il coefficiente angolare della CML:

$$E(r_P) = r_f + \boxed{\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}} \cdot \sigma_P$$

esprime il ***market price of risk*** (MPR).

Con un rendimento del mercato pari al 14% e il risk-free è il 5%, deviazione standard del mercato pari al 15%:

$$MPR = \frac{14\% - 5\%}{15\%} = 0{,}6\%$$

per un'unità di deviazione standard aggiuntivo, l'investimento dovrebbe richiedere lo 0,6% di rendimento in più.

Dalla CML alla Security Market Line (SML)

- Ripartiamo dall'equazione della CML:

$$(3) \quad E(r_P) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_P$$

- A ben guardare, essa può essere applicata non a tutti i portafogli in generale, bensì a tutti i portafogli *efficienti* (cioè quelli che, per un dato livello di rischio, offrono il massimo rendimento possibile).
- I portafogli efficienti sono dati dalla combinazione del titolo *risk-free* con il portafoglio di mercato. Un **portafoglio costruito diversamente non è efficiente**; dunque offrirà un rendimento inferiore rispetto al portafoglio che abbia lo stesso rischio ma sia collocato sulla CML.
- Abbiamo dunque bisogno di una funzione che colleghi il rischio al rendimento di un *qualsiasi* portafoglio, anche inefficiente.
- Il **rendimento atteso di un titolo (o portafoglio di titoli inefficienti) dipenderà dalla correlazione del titolo rispetto al portafoglio di mercato**. Il rischio specifico del singolo titolo non viene remunerato dal mercato, poiché inefficiente, che invece prezza il solo rischio sistematico.

Dalla CML alla Security Market Line (SML)

- **Il «mercato» remunera soltanto la componente di rischio sistematico**, che invece non può essere eliminato neppure diversificando.
- Per poter correttamente calcolare i rendimenti associati a ogni livello di rischio per un titolo qualsiasi, abbiamo dunque bisogno di una misura che tenga conto esclusivamente del rischio sistematico.
- **In pratica, necessitiamo di conoscere la sensibilità del rendimento di un generico titolo (o portafoglio inefficiente) rispetto al rendimento del [portafoglio di] mercato. Una *proxy* immediata è data dalla correlazione dei due rendimenti (ρ_{im} per un titolo i e ρ_{Pm} per un portafoglio inefficiente P).**
- Pertanto, con riferimento a un generico portafoglio inefficiente P, modifichiamo la (3) come segue:

$$E(r_i) = r_f + \left[E_{(r_m)} - r_f\right]\rho_{im}\frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

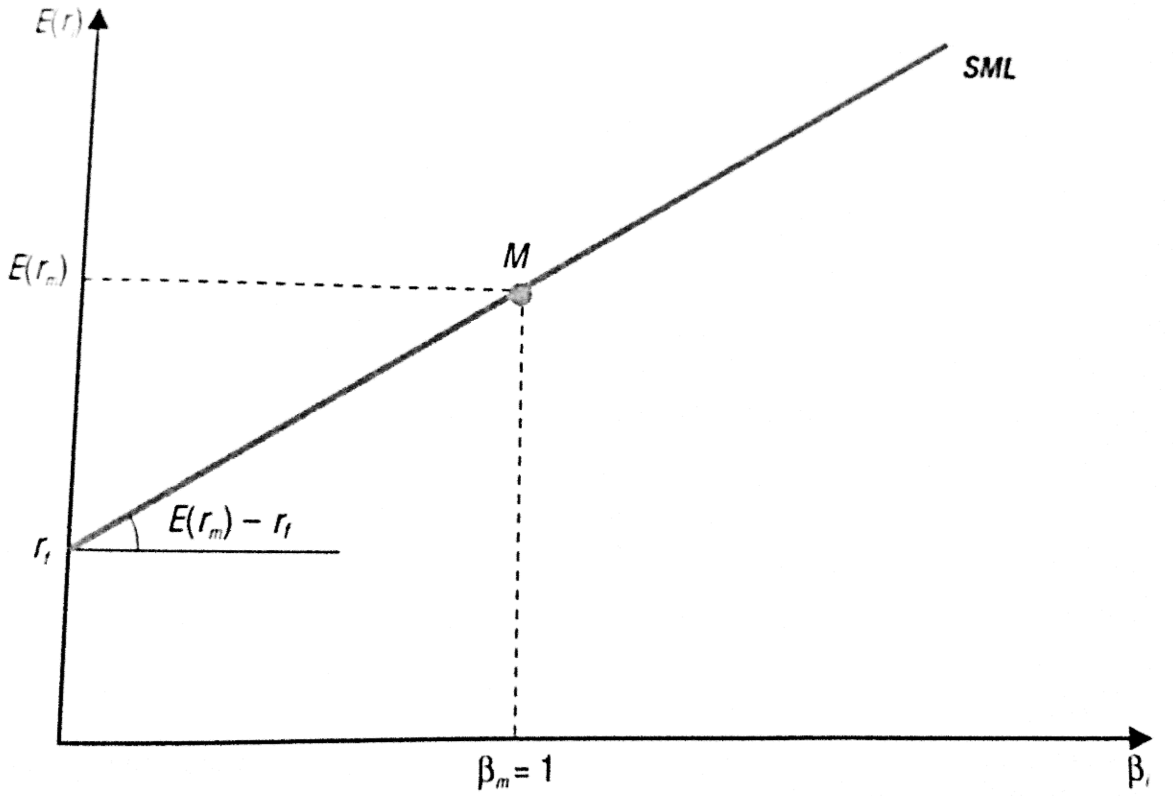
Rischio totale

Correlazione

$$\boldsymbol{E(r_i) = r_f + \beta_P \cdot \left(E(r_m) - r_f\right)}$$

I titoli con $\beta_i > 1$ ($\beta_i < 1$) contribuiscono in misura maggiore (minore) alla rischiosità σ_m^2 del portafoglio di mercato; perciò dovranno anche offrire un rendimento maggiore (minore). Il rendimento dei titoli con $\beta_i = 1$ sarà invece allineato a quello del [portafoglio di] mercato. Questo dà un'idea della **proporzionalità lineare tra il rendimento di un qualsiasi titolo o portafoglio inefficiente e il rispettivo β.**

Dalla CML alla Security Market Line (SML)



A differenza della CML, sulle ascisse compaiono non le deviazioni standard bensì i β, che rilevano il solo rischio sistematico anziché il rischio totale, escludendo pertanto la componente idiosincratica diversificabile.

Applicazione del CAPM: il rendimento atteso nel DDM

- Il CAPM consente di individuare l'opportuno tasso di sconto r da utilizzare nella formula che restituisce il prezzo (P_0) di un titolo azionario perpetuo, che dunque non restituisca mai l'investimento iniziale, i cui dividendi – corrisposti periodicamente, a intervalli di tempo unitari – crescano in serie geometrica secondo una ragione g. Si ha quindi:

$$P_0 = \frac{\mathrm{DIV}_1}{r - g}$$

- Naturalmente, $r > r_f$ perché si tratta comunque di un titolo rischioso. Per poterlo stimare sarà necessario ricorrere al β. Consideriamo due titoli che abbiano le seguenti caratteristiche:

Titolo	Primo dividendo stimato D_1	Tasso di crescita dei dividendi stimato g	β del titolo
Bianchi	10	2,0%	0,9
Verdi	200	5,8%	1,2

Applicazione del CAPM: il rendimento atteso nel DDM

- Tramite il CAPM, rilevando $E(r_m) = 14\%$ e $r_f = 5\%$, possiamo determinare il rendimento atteso dei due titoli:

$$E(r_{\text{Bianchi}}) = r_f + \beta_{\text{Bianchi}} \cdot \left(E(r_m) - r_f\right) = 5\% + 0{,}9 \cdot (14\% - 5\%) \Rightarrow E(r_{\text{Bianchi}}) = 13{,}1\%$$

$$E(r_{\text{Verdi}}) = r_f + \beta_{\text{Verdi}} \cdot \left(E(r_m) - r_f\right) = 5\% + 1{,}2 \cdot (14\% - 5\%) \Rightarrow E(r_{\text{Bianchi}}) = 15{,}8\%$$

- Con le informazioni sui dividendi stimati al tempo «1» e sui relativi tassi di crescita possiamo stimare il prezzo equo – associato al rendimento atteso secondo la SML – per ciascun titolo:

$$P^*_{\text{Bianchi}} = \frac{10}{13{,}1\% - 2\%} = 90{,}09 \quad ; \quad P^*_{\text{Verdi}} = \frac{200}{15{,}8\% - 5{,}8\%} = 2.000$$

- Se i prezzi di mercato fossero pari (es.) a 82 per Bianchi e 2.020 per Verdi, concluderemmo che Bianchi (Verdi) è un titolo sottovalutato (sopravvalutato) e quindi dovrebbe essere acquistato (venduto).
- Ciò può essere verificato anche sostituendo tali prezzi di mercato nella formula che esprime il ***Dividend Discount Model*** **(DDM)** nella sua versione a crescita costante dei dividendi (*constant growth*):

$$r^* = (D_1/P) + g$$

Applicazione del CAPM: il rendimento atteso nel DDM

- Abbiamo dunque:

$$r^*_{\text{Bianchi}} = \frac{D_{1\ \text{Bianchi}}}{P_{\text{Bianchi}}} + g_{\text{Bianchi}} = \frac{10}{82} + 2\% \cong 14{,}2\%$$
$$r^*_{\text{Verdi}} = \frac{D_{1\ \text{Verdi}}}{P_{\text{Verdi}}} + g_{\text{Verdi}} = \frac{200}{2.020} + 5{,}8\% \cong 15{,}7\%$$

- Per il titolo Bianchi (Verdi), il rendimento stimato sulla scorta di valutazioni soggettive circa D_1 e g è pari al 14,2% (15,7%): esso è superiore (inferiore) rispetto a quello identificato dalla SML, cioè 13,1% (15,8%), a ulteriore riprova della convenienza ad acquistare (vendere) tale titolo.

Il differenziale – positivo o negativo – fra il rendimento stimato sulla base di analisi soggettive circa i dividendi futuri (r^*) e quello «normale», atteso sulla base della SML, è spesso indicato come «alfa» (α) atteso del titolo.

Nel nostro esempio, $\alpha_{\text{Bianchi}} \cong 1{,}1\%$ e $\alpha_{\text{Verdi}} \cong -0{,}1\%$.

Applicazione del CAPM: il rendimento atteso nel DDM