La riserva matematica

Dr. Salvatore Scognamiglio

Università degli Studi di Napoli "Parthenope"

Lezioni di Tecniche Attuariali delle Assicurazioni

Equilibrio tecnico-finanziario

Una polizza assicurativa viene costruita in modo da essere in equilibrio attuariale alla data di stipula $t = 0$ e rispetto alla base tecnica del I ordine: se $\mathbf{X}$ è il flusso dei premi puri e $\mathbf{Y}$ il flusso delle prestazioni, risulta

$$V(0, \mathbf{X}) = V(0, \mathbf{Y}).$$

L'equilibrio non permane però nel corso della durata del contratto.

Per le polizze a premio unico questo fatto è particolarmente evidente: ad un instante $t > 0$ che precede la scadenza della polizza l'unico premio previsto è già stato pagato, mentre, se il contratto non si è già concluso (ad esempio per la morte dell'assicurato), sono ancora previste prestazioni. Il disequilibrio ad istanti successivi alla stipula sussiste anche nel caso di polizze a premio annuo.

Equilibrio tecnico-finanziario: Esempio

Si consideri una polizza mista a premio annuo, per una durata di n anni, tasso tecnico i, capitale assicurato C, stipulato da un assicurato di età x. Il flusso dei premi $\mathbf{X}$ contrattualmente previsti è:

$$X_k = \begin{cases} P\mathbb{1}_{\{T_x>k\}} & \textit{se } k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

dove $P = C({}_nE_x + {}_nA_x)/{}_n\ddot{a}_x$ è il premio annuo puro.

Il flusso di prestazioni $\mathbf{Y}$ è costituito da importi aleatori:

$$Y_k = \begin{cases} C\mathbb{1}_{\{k-1<T_x\le k\}} & \textit{se } k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ C\mathbb{1}_{\{k-1<T_x\le k\}} + C\mathbb{1}_{\{T_x>k\}} & \textit{se } k = n, \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Equilibrio tecnico-finanziario: Esempio

Sia $t \leq n$ un istante generico, che per semplicità assumeremo intero. Si assuma inoltre che all'istante t il contratto sia ancora in essere, cioè che l'assicurato sia ancora in vita. Se $0 \leq t \leq n-1$, all'istante t sono stati pagati t premi degli n previsti dal contratto. Il flusso di premi residui è quindi una rendita vitalizia anticipata con rata P, durata $n-t$ e testa assicurato di età $x+t$. Indicando con $V(t, \mathbf{X})$ il valore dei premi residui in t, si ha

$$V(t, \mathbf{X}) = \begin{cases} P\,{}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} & \textit{se } t \leq n-1, \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Alla stessa data t le prestazioni residue dela polizza sono $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_n$ e il flusso delle prestazioni residue coincide con il flusso di prestazioni di una polizza mista di durata $n-t$, capitale assicurato C e testa assicurata di età $x+t$. Indicando con $V(t, \mathbf{Y})$ il valore delle prestazioni residue in t, si ha che:

$$V(t, \mathbf{Y}) = C({}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t}A_{x+t})$$

Se $n > 1$ e $t > 0$ si può verificare che risulta sistematicamente $V(t, \mathbf{X}) < V(t, \mathbf{Y})$.

La Riserva Matematica

Si consideri un istante di tempo $t > 0$, che per semplicità assumeremo intero, una polizza ancora in essere, stipulata al tempo zero da una testa di età x anni. Sia $\mathbf{X}$ il vettore dei premi previsti e $\mathbf{Y}$ il vettore delle prestazioni previste.

La *riserva matematica* (ai premi puri) della polizza al tempo t, nell'ipotesi che questa sia ancora in-essere a quella data, è

$$ {}_tV_x = V(t, \mathbf{Y}) - V(t, \mathbf{X}) \tag{1} $$

cioè il valore delle prestazioni residue in t meno il valore dei premi puri residui in t, calcolati entrambi secondo la base tecnica de I ordine.

Alcune Osservazioni (1)

La riserva matematica definita secondo l'equazione precedente è spesso chiamata *riserva matematica prospettica*, in quanto è calcolata sulla base dei premi e delle prestazioni future rispetto alla data di valutazione. Per convenzione, nel calcolo della riserva matematica, si considerano già liquidate in t le eventuali prestazioni posticipate e non ancora liquidati l'eventuale premio in scadenza (che è anticipato) e le eventuali prestazioni anticipate.

La *riserva matematica completa* (detta anche *riserva di bilancio*) è invece calcolata "dopo tutto", considerando cioè liquidati tutti i premi e tutte le prestazioni dovute in t.

Si osservi che, per costruzione, alla data di stipula la riserva matematica risulta nulla, mentre la riserva di bilancio coincide con il premio puro (il premio unico o il premio annuo) versato dall'assicurato.

Esempio (1)

In un contratto di capitalizzazione a premio unico U, con durata n anni, tasso tecnico i e capitale $C = U(1+i)^{-n}$ si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad {}_0V_x{}^+ = U = C(1+i)^{-n}, $$

mentre per $0 < t \leq n$ risulta

$$ {}_tV_x = C(1+i)^{-(n-t)} = {}_tV_x{}^+. $$

Esempio (2)

In una polizza mista a premio unico, con durata n anni, tasso tecnico i, capitale assicurato C ed età dell'assicurato alla stipula x si ha

$$_0V_x = 0 \qquad _0V_x^{\,+} = U = C({}_nE_x + {}_nA_x)$$

mentre per $0 < t \leq n$, se la polizza è ancora in vigore, cioè se l'assicurato non è deceduto, risulta:

$$_tV_x = C({}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t}A_{x+t}) = {}_tV_x^{\,+}$$

Naturalmente, la riserva prestazioni caso vita in t è $C_{n-t}E_{x+t}$ mentre la riserva prestazioni caso morte alla stesa data è $C\,{}_{n-t}A_{x+t}$.

Alcuni Osservazioni (1)

- Se si assume di effettuare le valutazioni alla data di emissione $t = 0$ della polizza, la riserva matematica ad una data futura $t > 0$ è definita nell'ipotesi che la polizza sia ancora in vigore a quella data. E' quindi un valore *condizionato* a quell'ipotesi. Tranne che in casi particolari, come i contratti di capitalizzazione e le polizze a termine fisso, quest'ipotesi coincide con l'ipotesi che l'assicurato sia ancora in vita in t cioè che $T_x > t$;
- si noti l'analogia concettuale fra la riserva matematica di una polizza e il debito residuo di un mutuo: è in entrambi i casi il valore (netto) del contratto residuo;

Alcuni Osservazioni (2)

- tutte le polizze vita sono normalmente costruite in modo tale che, durante la loro vita contrattuale, la riserva matematica non diventi negativa. L'assicuratore costruisce cioè il contratto in modo tale da essere, nel senso della base tecnica del I ordine, sempre debitore e mai creditore nei confronti dell'assicurato;
- la riserva matematica o, meglio, la riserva matematica completa, è una grandezza bilancistica: essendo il valore netto dell'impegno residuo (netto) nei confronti dell'assicurato, l'assicurato deve metterla a bilancio, investendola in attivi a copertura dell'impegno.

Uno Schema Contrattuale Generale (1)

Per descrivere il concetto di riserva matematica in maniera più generale possibile si farà riferimento ad un contratto generico, che chiameremo *polizza generica*, che prevede:

- premi (anticipati) pagabili in caso vita: alla scadenza intera k il premio pagabile in caso vita sarà indicato con P_k;
- prestazioni caso morte (posticipate): alla scadenza intera k la prestazione pagabile in caso di morte a quella data sarà indicata con C_k^m;
- prestazioni caso vita anticipate: alla scadenza intera k la prestazione anticipata pagabile in caso di vita a quella data sarà indicata con C_k^{va};
- prestazioni caso vita posticipate: alla scadenza intera k la prestazione posticipata pagabile in caso di vita sarà indicata con C_k^{vp}.

Supporemo infine che, nel caso di morte dell'assicurato nell'anno $(k-1, k]$ (per $k \in \mathbb{N}$), il contratto si concluda con il pagamento della prestazione caso morte C_k^m al tempo k.

Uno Schema Contrattuale Generale (2)

Le polizze a premio unico rientrano nello schema ponendo $P_0 = U$ e $P_k = 0$ per $k > 0$.

Le polizze che prevedono n premi annui (anticipati) costanti P rientrano nello schema ponendo $P_k = P$ per $0 \leq k \leq n - 1$ e $P_k = 0$ per $k \geq n$.

La distinzione fra prestazioni caso vita anticipate e posticipate è necessaria per riprodurre lo schema delle prestazioni di rendita (immediata o differita) che può essere anticipata e posticipata.

Uno Schema Contrattuale Generale (3)

Se si considera una polizza generica stipulata al tempo zero da una testa di età x, ancora in essere al tempo t, la riserva matematica ${}_tV_x$ è calcolata considerando già liquidata la prestazione caso vita posticipata C_t^{vp} e non ancora pagati nè il premio P_t ne la prestazione caso vita anticipata C_t^{va}. La relazione tra la riserva matematica e riserva di bilancio è quindi:

$$ {}_tV_x{}^{+} = {}_tV_x + P_t - C_t^{va} \tag{2} $$

Si noti che il "completamento" della riserva prevede il premio P_t vada sommato (e non sottratto), perchè nel calcolo della riserva matematica si sottrae la riserva premi che comprende anche P_t. Per un motivo simmetrico, la prestazione C_t^{va} va sottratta (e non sommata), perchè nel calcolo della riserva matematica tale prestazione si considera non ancora pagata e quindi compare nella riserva prestazioni con il segno positivo.

Equazione di Fouret:

Se si considera al tempo t una polizza generica in essere a quella data, stipulata al tempo zero da una testa di età x con tasso tecnico i, vale la relazione:

$$ {}_tV_x + P_t - C_t^{va} = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t} v + C_{t+1}^{m} q_{x+t} v + C_{t+1}^{vp} p_{x+t} v \tag{3} $$

dove, come al solito, $v = (1+i)^{-1}$.

Equazione di Fouret: Dimostrazione (1)

Considerando separatamente le prestazioni caso morte, caso vita posticipate, caso vita anticipate e i premi (anticipati) e tenendo presente le convenzioni sul calcolo della riserva matematica in t, si ha che:

$$
{}_tV_x = \sum_{k>0} C^m_{t+k}\, {}_{k-1|1}q_{x+t}\, v^k + \sum_{k>0} C^{vp}_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k + \sum_{k\geq 0} C^{va}_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k - \sum_{k\geq 0} P_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k .
$$

Se scorporiamo il primo addendo di ciascuna delle quattro somme ($k = 1$ nelle prime due e $k = 0$ nelle seconde due) otteniamo:

$$
{}_tV_x = C^m_{t+1}\, {}_{0|1}q_{x+t}\, v + C^{vp}_{t+1}\, {}_1p_{x+t}\, v + C^{va}_t - P_t + \sum_{k>1} C^m_{t+k}\, {}_{k-1|1}q_{x+t}\, v^k + \sum_{k>1} C^{vp}_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k + \sum_{k\geq 1} C^{va}_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k - \sum_{k\geq 1} P_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k .
$$

Osservando che:

$$ {}_k p_{x+t} = p_{x+t}\, {}_{k-1}p_{x+t+1} \qquad per\ k \geq 1 $$

$$ {}_{k-1|1}q_{x+t} = p_{x+t}\, {}_{k-2|1}q_{x+t+1} \qquad per\ k > 1 $$

nelle quattro somme si può raccogliere il fattore comune $p_{x+t} v$, ottenendo:

$$ {}_t V_x = C^m_{t+1}\; {}_{0|1}q_{x+t}\, v + C^{vp}_{t+1}\; {}_1 p_{x+t}\, v + C^{va}_t - P_t + \left(\sum_{k>1} C^m_{t+k}\, {}_{k-2|1}q_{x+t+1}\, v^{k-1} + \right. $$

$$ \left. \sum_{k>1} C^{vp}_{t+k}\, {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} + \sum_{k\geq 1} C^{va}_{t+k}\, {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} - \sum_{k\geq 1} P_{t+k}\, {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} \right) p_{x+t}\, v. $$

Equazione di Fouret: Dimostrazione (3)

Operando nelle somme il cambiamento di variable $j = k - 1$ (e quindi $k > 1$ diventa $j > 0$ e $t + k$ diventa $t + 1 + j$) e ricordando che ${}_{0|1}q_{x+t} = q_{x+t}$ e che ${}_1p_{x+t} = p_{x+t}$ si ottiene

$$ {}_tV_x = C^m_{t+1}\; q_{x+t}v + C^{vp}_{t+1}\; p_{x+t}v + C^{va}_t - P_t + \left(\sum_{j>0} C^m_{t+1+j}\; {}_{j-1|1}q_{x+t+1}v^j + \right. $$

$$ \left. \sum_{j>0} C^{vp}_{t+1+j}\; {}_jp_{x+t+1}v^j + \sum_{j\geq 0} C^{va}_{t+j+1}\; {}_jp_{x+t+1}v^j - \sum_{j\geq 0} P_{t+1+j}\; {}_jp_{x+t+1}v^j \right) p_{x+t}v. $$

L'espressione nella parentesi tonda del membro destro è la riserva matematica in $t + 1$; riarrangendo i termini dell'equazione si ottiene la tesi.

Equazione di Fouret

L'equazione di Fouret stabilisce una relazione ricorrente fra la riserva matematica in t e quella $t+1$.

Se la si risolve rispetto a ${}_{t+1}V_x$ si ottiene:

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{{}_tV_x + P_t - C_t^{va} - C_{t+1}^m q_{x+t} v - C_{t+1}^{vp} p_{x+t} v}{p_{x+t} v} $$

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{{}_tV_x + P_t - C_t^{va}}{p_{x+t} v} - C_{t+1}^m \frac{1 - p_{x+t}}{p_{x+t}} - C_{t+1}^{vp} $$

e questa relazione può essere usata per il calcolo ricorrente della riserva, a partire dalla condizione iniziale ${}_0V_x = 0$.

Si osservi che usando la (2), l'equazione di Fouret può essere scritta nella forma:

$$ {}_tV_x^{\,+} = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t} v + C_{t+1}^m q_{x+t} v + C_{t+1}^{vp} p_{x+t} v. \tag{4} $$

Equazione di Fouret: Esempio (1)

Per una polizza di capitale differito C a premio annuo, con durata del differimento n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo $P = C_n E_x \, {}_n\ddot{a}_x$, l'equazione di Fouret assume la forma:

$$ {}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x \, p_{x+t} v $$

per ogni $t = 0, 1, \ldots, n-1$; per $t = n$ si ottiene invece:

$$ {}_tV_x - C = 0. \tag{5} $$

Equazione di Fouret: Esempio (2)

Per una polizza mista a premio annuo, con capitale assicurato C, con durata n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo puro $P = C({}_nE_x + {}_nA_x)/{}_n\ddot{a}_x$, l'equazione di Fouret assume la forma:

$$ {}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x \, p_{x+t} v + C q_{x+t} v \tag{6} $$

per ogni $t = 0, 1, \ldots, n-1$, per $t = n$ diventa:

$$ {}_tV_x - C = 0. \tag{7} $$

Premio di rischio e premio di risparmio (1)

Si consideri una polizza generica. Se si risolve l'equazione di Fouret rispetto al premio P_t, si sostituisce $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ e si riarrangiano i termini:

$$P_t = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t} v + C^m_{t+1} q_{x+t} v + C^{vp}_{t+1} p_{x+t} v + C^{va}_t - {}_tV_x$$

$$P_t = C^m_{t+1} q_{x+t} v + {}_{t+1}V_x (1 - q_{x+t}) v - {}_tV_x + C^{va}_t + C^{vp}_{t+1}(1 - q_{x+t}) v$$

$$P_t = (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x) q_{x+t} v + ({}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x + C^{va}_t + C^{vp}_{t+1} v)$$

si ottiene una scomposizione notevole del premio P_t. Se si pone

$$P^R_t = (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x) q_{x+t} v \qquad (8)$$

$$P^S_t = ({}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x + C^{va}_t + C^{vp}_{t+1} v) \qquad (9)$$

con

$$P_t = P^R_t + P^S_t.$$

Premio di rischio e premio di risparmio (2)

$$P_t = (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x)q_{x+t}v + ({}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x + C^{va}_t + C^{vp}_{t+1}v)$$

Il primo addendo della scomposizione è il premio al rischio P^R_t. Esso è uguale al capitale sotto rischio $C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x$ probabilizzato e scontato.
Nel caso l'assicurato deceda nell'anno $t+1$, l'assicuratore dovrà corrispondere la prestazione caso morte C^m_{t+1} e non pagherà la prestazione caso vita posticipata C^{vp}_{t+1}; poichè avrà a disposizione la riserva ${}_{t+1}V_x$, se questa sarà minore della prestazione netta $C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1}$ egli subirà una perdità pari al capitale sotto rischio.
Naturalmente, nel caso opposto di riserva maggiore della prestazione netta, il capitale sotto rischio è negativo e l'assicuratore avrà un guadagno anzichè una perdita. Il premio di rischio è quindi il valore attuale attuariale in t della perdita che l'assicuratore subirà per il caso di morte nell'anno $(t, t+1]$. Esso quantifica la parte del premio P_t che copre (in aspettativa) la perdita dell'assicuratore nel caso di morte nell'anno $t+1$.

Premio di rischio e premio di risparmio (3)

$$P_t = (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{t+1}V_x)q_{x+t}v + ({}_{t+1}V_x v - {}_tV_x + C^{va}_t + C^{vp}_{t+1}v)$$

Il secondo addendo della scomposizione è il premio di risparmio P^S_t. Esso rappresenta quello che rimane del premio dopo che è stata scorporata la componente di rischio, va a finanziare la prestazione anticipata caso vita in t, la prestazione posticipata caso vita in $t+1$ e quelle (vita e morte) successive.

Premio di rischio e premio di risparmio: esempio

In una polizza temporanea caso morte a premio annuo (puro) P, con capitale assicurato C, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo $t \leq n-1$ assumono la forma:

$$P_t^R = (C_{t+1}^m - {}_{t+1}V_x)q_{x+t}v = [C(1 - {}_{n-t-1}A_{x+t+1}) + P\,{}_{n-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}]q_{x+t}v$$

$$P_t^S = {}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x = C({}_{n-t-1}A_{x+t+1}v - {}_{n-t}A_{x+t}) - P({}_{n-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}v - {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t}).$$

In questa tipologia contrattuale non ci sono capitali caso vita che complicano la logica delle espressioni. Il premio di rischio è il valore attuale attuariale dell'integrazione di riserva che l'assicuratore deve operare al tempo $t+1$ per pagare la prestazione caso morte eventualmente occorsa nell'anno appena trascorso. Il premio di risparmio va incrementare la riserva in $t+1$ per finanziare le prestazioni successive: la (9) può infatti essere scritta nella forma:

$${}_{t+1}V_x = ({}_tV_x + P_t^S)(1+i).$$

Riserva retrospettica

Sempre nel caso della polizza generica, se si parte dall'equazione di Fouret scritta nella forma:

$$ {}_tV_x + P_t - C_t^{va} = {}_{t+1}V_x\,(1-q_{x+t})v + C_{t+1}^m q_{x+t} v + C_{t+1}^{vp}(1-q_{x+t})v, $$

poichè nel membro sinistro compare $P_t = P_t^S + P_t^R$ e nel membro destro compare $P_t^R = C_{t+1}^m q_{x+t} v - C_{t+1}^{vp} q_{x+t} v - {}_{t+1}V_x\, q_{x+t} v$, semplificando il premio di rischio si ottiene:

$$ {}_tV_x + P_t^S - C_t^{va} = ({}_{t+1}V_x + C_{t+1}^{vp})v $$

cioè

$$ {}_{t+1}V_x = ({}_tV_x + P_t^S - C_t^{va})(1+i) - C_{t+1}^{vp}. $$

Quest'ultima espressione è particolarmente significativa perchè mostra come la riserva in $t+1$ si ottenga partendo dalla riserva in t, togliendo le prestazioni caso vita anticipate in t, aumentando il risultato del premio di risparmio, capitalizzando il tutto al tasso tecnico e togliendo la prestazione caso vita posticipata in $t+1$.

Riserva retrospettica

Partendo dalla solita condizione iniziale ${}_0V_x = 0$ e applicando ricorsivamente l'equazione della riserva si ottiene:

$$
\begin{aligned}
{}_0V_x &= 0, \\
{}_1V_x &= ({}_0V_x + P_0^S - C_0^{va})(1+i) - C_1^{vp} \\
&= (P_0^S - C_0^{va})(1+i) - C_1^{vp} \\
{}_2V_x &= ({}_1V_x + P_1^S - C_1^{va})(1+i) - C_2^{vp} \\
&= (P_0^S - C_0^{va})(1+i)^2 + (P_1^S - C_1^{va})(1+i) - C_1^{vp}(1+i) - C_2^{vp} \\
\dots & \quad \dots \\
{}_tV_x &= \sum_{k=0}^{t-1}(P_k^S - C_k^{va})(1+i)^{t-k} - \sum_{k=0}^{t-1} C_{k+1}^{vp}(1+i)^{t-k-1}
\end{aligned}
$$

Quest'ultima espressione viene solitamente chiamata la riserva retrospettica ed è la soluzione in forma chiusa dell'equazione ricorrente e mostra come la riserva in t sia il montante puramente finanziario dei premi di risparmio incassati fin a t (escluso), privati della prestazione caso vita anticipate pagate fino alla stessa data, meno il montante puramente finanziario delle prestazioni caso vita posticipate liquidate fino a t (compreso).

Riserva retrospettica

Essa mostra quindi come la riserva venga costituita dal montante dei premi di risparmio al tasso tecnico, dal quale vengono però via via prelevate le risorse finanziarie per pagare le prestazioni caso vita. Il risultato è particolarmente significativo per forme contrattuali che non prevedono prestazioni caso vita prima di una certa scadenza (ad esempio polizze di capitale o rendita differita e polizze miste): fino a quella scadenza la riserva matematica è il montante finanziario dei premi di risparmio.

Riserva retrospettica

In base a questo risultato è chiaro come l'assicuratore debba gestire la polizza. Nell'ipotesi del I ordine egli riesce infatti a investire esattamente al tasso tecnico e paga le prestazioni secondo quanto previsto dalla base demografica del I ordine. In queste ipotesi, quindi, se l'assicuratore ogni anno:

- incassa i premi puri (a inizio anno),
- paga le prestazioni caso vita anticipate (a inizio anno),
- investe quello che rimane fino alla fine dell'anno,
- paga le prestazioni caso morte (a fine anno),
- paga le prestazioni caso vita posticipate (a fine anno),

si ritrova con un valore degli attivi che è esattamente uguale alla riserve matematica, cioè al valore residuo netto del suo impegno verso gli assicurati. E' quindi coperto.
Naturalmente, non è assolutamente detto che le ipotesi del I ordine si verifichino nella realtà, ma se sono sufficientemente prudenziali, l'assicuratore ha una certa garanzia di rimanere coperto.

la Riserva come variabile aleatoria

Per la polizza generica che abbiamo considerato si può vedere che la riserva retrospettica coincide con la prospettica. Questo fatto non è vero in generale: ci sono forme assicurative nelle quali le due grandezze non coincidono. Si osservi che, per la polizza generica, la differenza fra la forma prospettica e retrospettica della riserva è concettualmente analoga alla differenza fra valore montante e valore residuo di una operazione puramente finanziaria: anche in quel caso, se l'operazione finanziaria è equa e la legge di equivalenza finanziaria è la legge esponenziale, le due grandezze coincidono.

la Riserva come variabile aleatoria

Occorre osservare che la riserva matematica ${}_tV_x$ al tempo t è stata definita per polizze ancora in essere alla data t. Per la polizza generica, ciò significa che la riserva matematica è stata definita solo per una polizza in cui l'assicurato sia in vita al tempo t. In particolare, prima del tempo t, la riserva matematica non è nota ma è una variabile aleatoria, che varrà ${}_tV_x$ se l'assicurato sarà in vita al tempo t, zero se sarà morto al tempo t, In forma compatta si può scrivere la riserva matematica in t come ${}_tV_x\,\mathbb{1}_{\{T_x>t\}}$. Di questa variabile aleatoria si può calcolare l'aspettativa: in zero vale ad esempio $\mathbb{E}_0[{}_tV_x\,\mathbb{1}_{\{T_x>k\}}] = {}_tV_x\,p_x$.