Laurea Triennale in Economia e Management
Anno Accademico 2023/2024

Consulenza Finanziaria

Modello di Markowitz

Daniele Previtali – daniele.previtali@uniparthenope.it

Consulenza Finanziaria

Il modello di Markowitz

Premesse metodologiche

Markowitz H.M. (1952), Portfolio selection, *Journal of Finance*

- Passaggio da una logica di valutazione di singoli titoli, ad una valutazione di **portafoglio**
- Possibilità di individuare **portafogli preferibili** tra i tanti possibili sia in ottica di valutazione dei singoli titoli che di «n» titoli.
- Utilizzo di concetti statistici elementari: **principio media-varianza**

Assunzioni del modello

1. Gli investitori selezionano i portafogli utilizzando due parametri, il **rendimento atteso** E(r) e il **rischio** (σ), intesa come la deviazione standard dei rendimenti (o alternativamente come proposto nell'articolo originale dalla varianza dei rendimenti (σ^2)) → le misure sono di tipo previsionale. Le altre variabili sono trascurabili.

2. Orizzonte temporale di investimento è **uniperiodale** (un mese, un anno, un triennio) → natura statica del modello.

3. Gli investitori sono avversi al rischio e **massimizzano l'utilità attesa** al termine del periodo di investimento. → rischio come fattore negativo.

Principio media-varianza

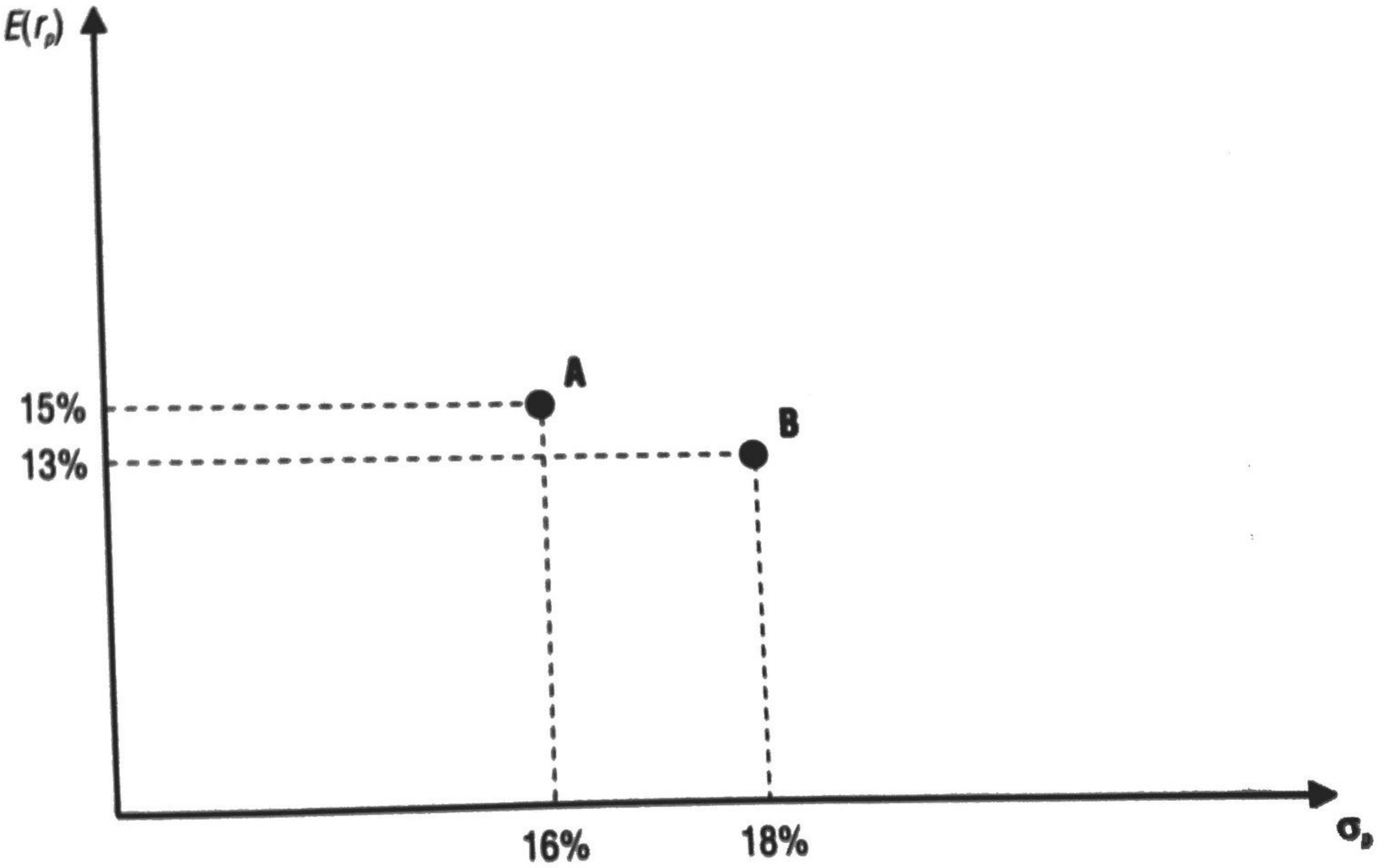
Dalla prima e dalla terza assunzione del modello scaturisce il principio media-varianza che sancisce che **tra due strategie di investimento, quella preferibile è quella che presenta un rendimento atteso maggiore e una deviazione standard minore**.

$$E(r_x) \geq E(r_y)\ ;\ \delta_x \leq \delta_y$$

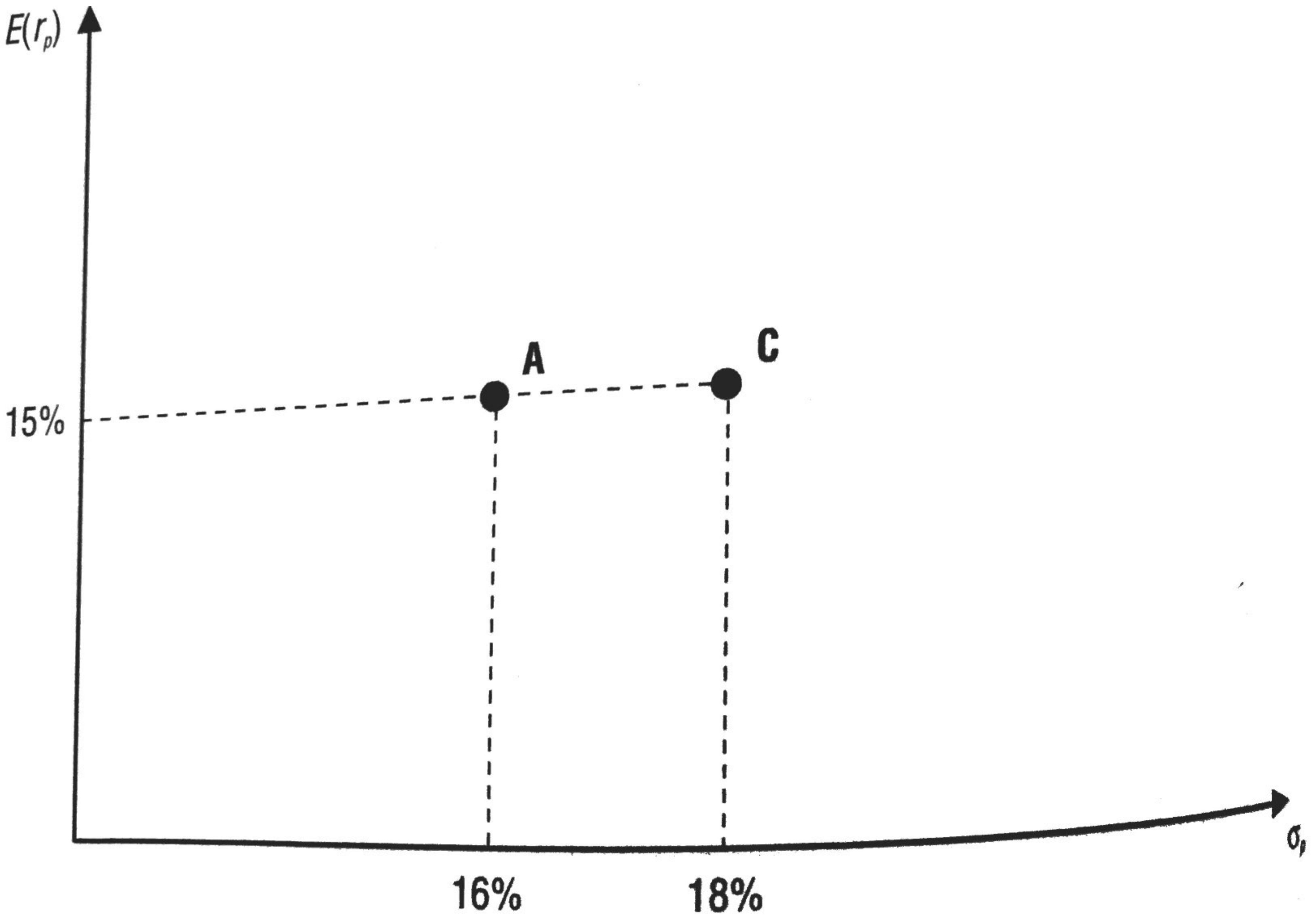
Con almeno una **disuguaglianza forte**, il portafoglio X domina il portafoglio Y

L'obiettivo del modello di Markowitz è quello di identificare tutti i portafogli *non dominati*, ossia quelli **dominanti**, che vengono anche detti **efficienti**. La scelta di portafogli dominati renderebbe una scelta inefficiente poiché esiste un portafoglio dominante che risulta più performante sotto un profilo del rapporto tra rendimento e rischio.

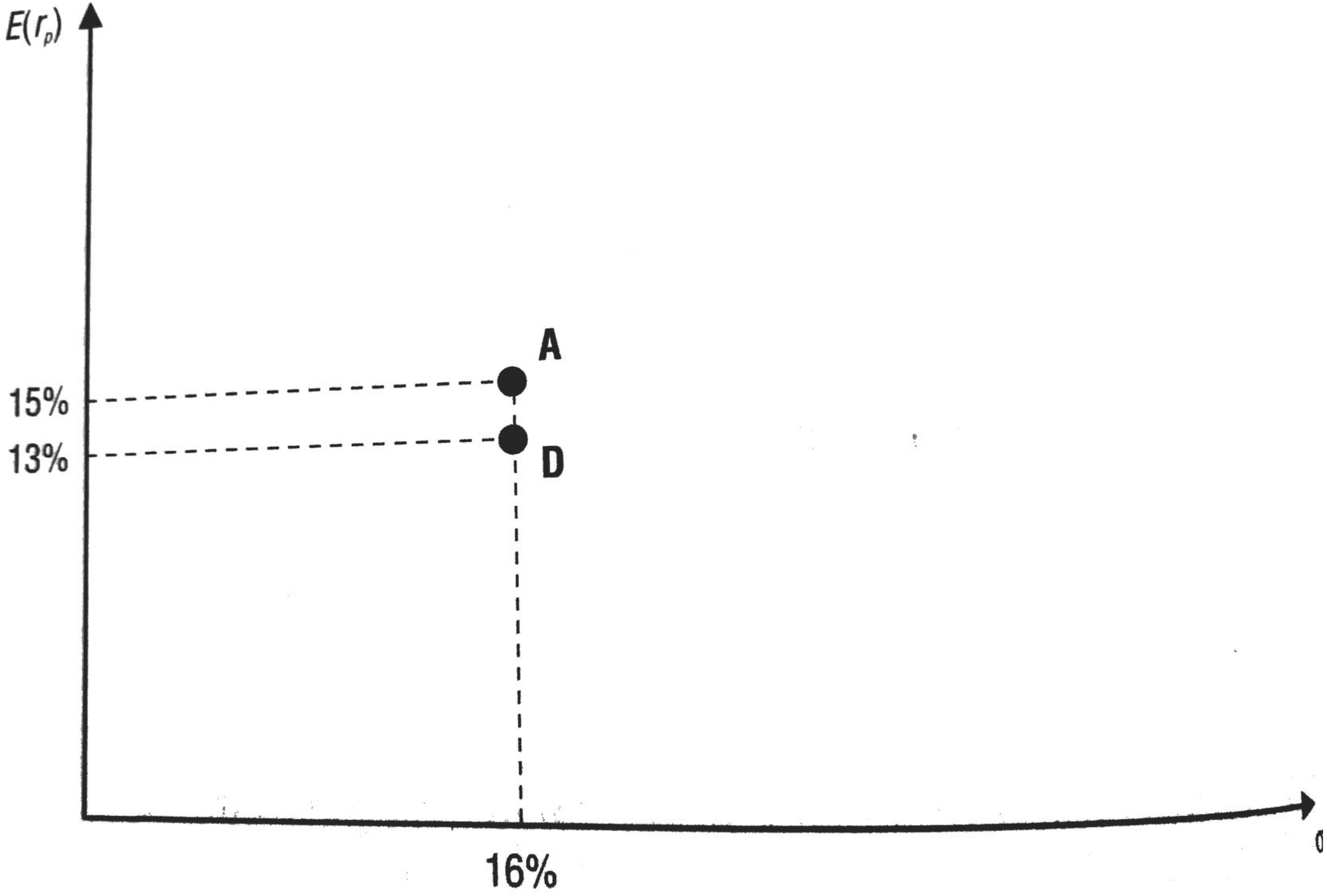
Scelta del portafoglio: caso 1



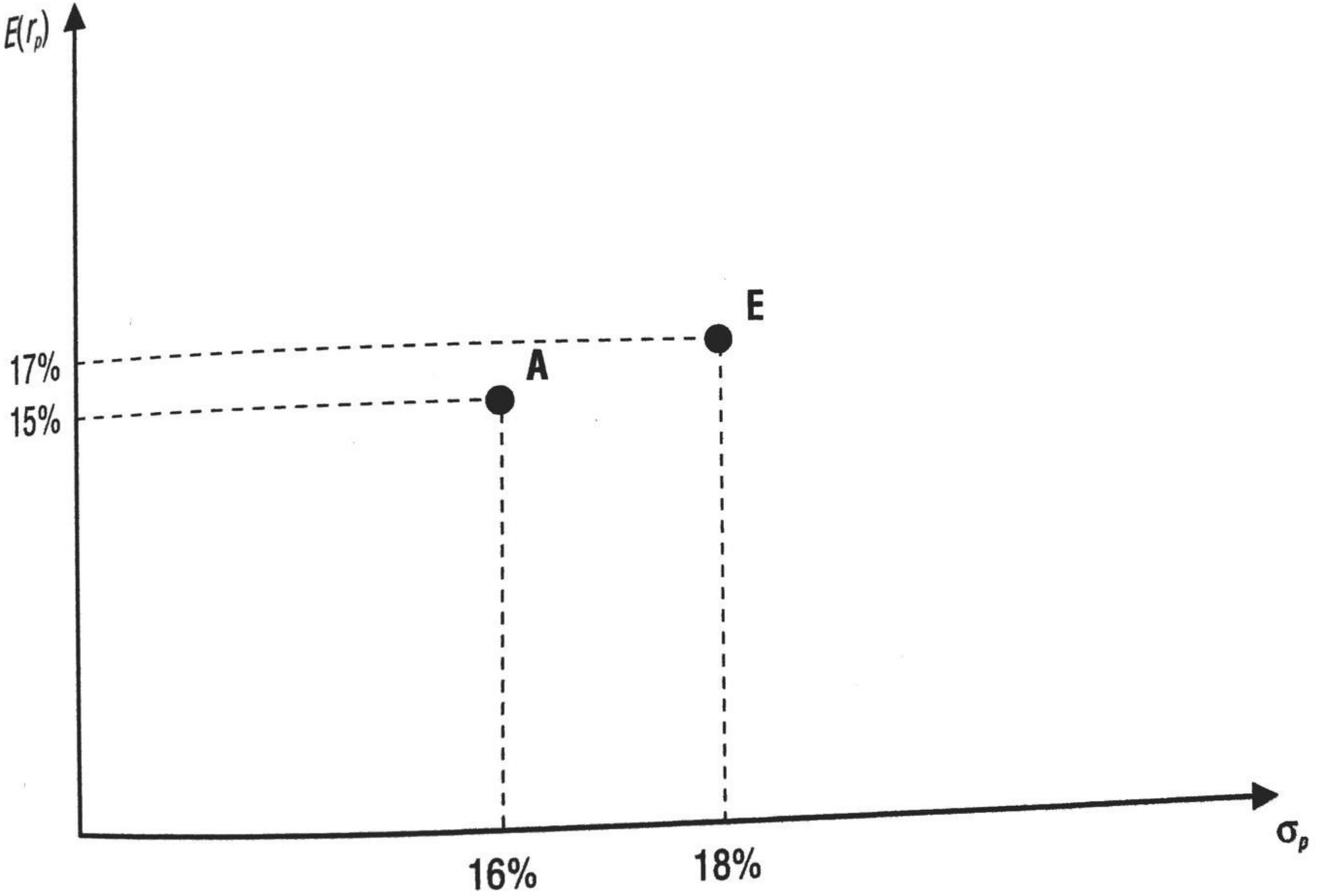
Scelta del portafoglio: caso 2



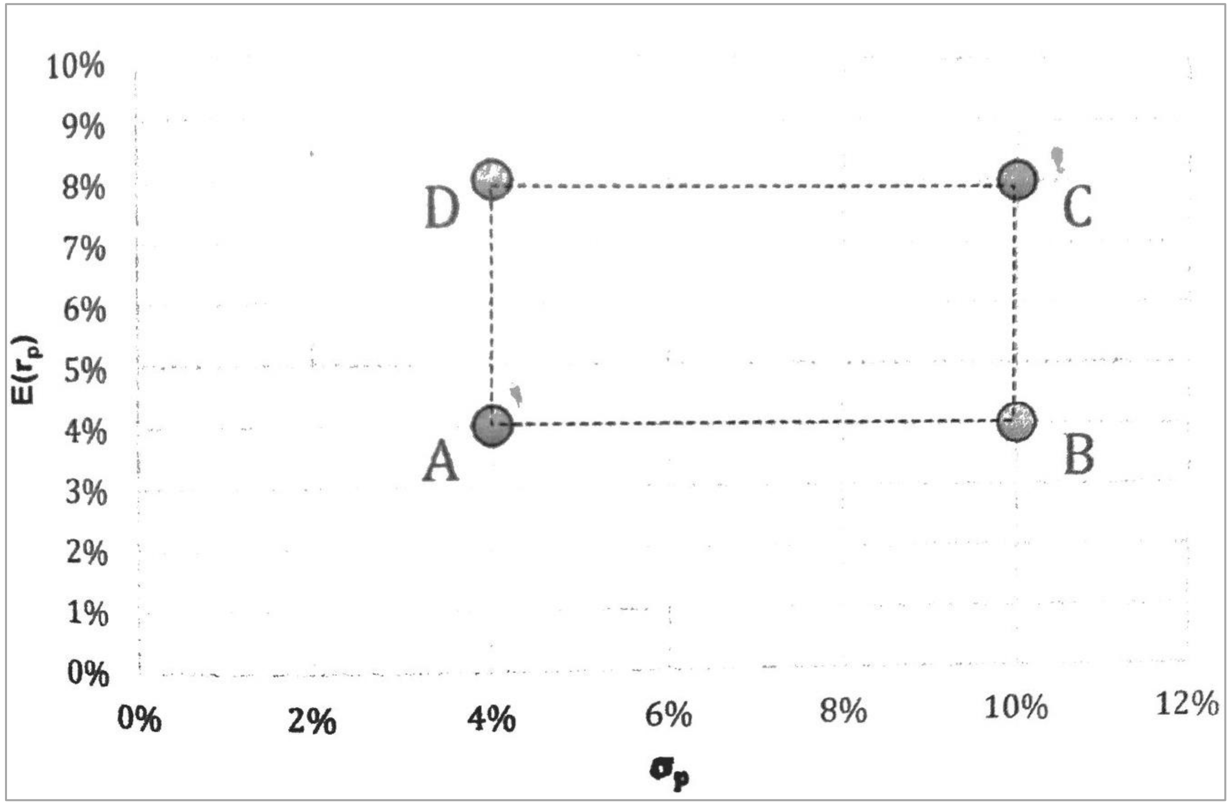
Scelta del portafoglio: caso 3



Scelta del portafoglio: caso 4



Principio media-varianza



L'obiettivo del modello di Markowitz è individuare tutti i portafogli dominanti (portafogli efficienti)

- Tra due portafogli con uguale rischio (C e B; D e A), un investitore preferirà il portafoglio con rendimento maggiore (C e D). Si dice che C domina B; e che D domina A.
- Tra due portafogli con uguale rendimento atteso (D e C; A e B), un investitore preferirà il portafoglio con minore rischio (D e A). Si dice che D domina C; e che A domina B.
- Tra i quattro portafogli disponibili, un investitore sceglierà il portafoglio D, poiché caratterizzato da un rendimento atteso maggiore e un rischio minore.
- Non è possibile invece stabilire quale portafoglio sia dominante tra A e C (portafoglio ottimale tra quelli disponibili) poiché il portafoglio più rischioso è anche quello con un rendimento atteso più elevato. La scelta pertanto viene lasciata al soggetto sulla base della sua propensione al rischio.

Consulenza Finanziaria

Il caso di due titoli in portafoglio

Il caso di due titoli in portafoglio

Rendimento atteso di un portafoglio:

$$E_{(r_p)} = \sum_{i=1}^{n} X_i E_{(r_i)}$$

dove X_i sono i pesi percentuali dei titoli e $E_{(r_i)}$ è il rendimento atteso del titolo i-esimo.

	Titolo 1		Titolo 2		Titolo 3		Titolo 4		Titolo 5	
E(ri)	10%		2%		15%		20%		8%	
	x	+	x	+	x	+	x	+	x	9.2%
Xi	25%		30%		10%		15%		20%	

Il caso di due titoli in portafoglio

- Il rischio di un singolo titolo in portafoglio è pari alla sua deviazione standard: $\sigma_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(r_{A,i}-\bar{r}_A\right)^2}{(n-1)}}$, ma il rischio di un portafoglio non è la media ponderata delle deviazioni standard dei singoli titoli, poiché si trascurerebbe **l'effetto diversificazione**.

- I titoli possono essere decorrellati, e quindi ridurre il rischio complessivo del portafoglio.

Il caso di due titoli in portafoglio

	Alfa	Beta
Gennaio	–4,845%	–4,720%
Febbraio	–1,763%	–0,611%
Marzo	12,303%	3,504%
Aprile	3,725%	–7,910%
Maggio	–4,070%	–1,829%
Giugno	–3,494%	2,964%
Luglio	–2,671%	–8,170%
Agosto	1,212%	3,191%
Settembre	2,155%	5,566%
Ottobre	–4,064%	3,032%
Novembre	–2,158%	30,167%
Dicembre	–0,620%	40,814%
Rend. Medio	–0,358%	5,500%

Dev. Std Alfa = 4,804%　　Dev. Std Beta = 14,892%

Ipotizzando di allocare il 50% nel portafoglio Alfa, e il 50% nel portafoglio Beta, la media ponderata delle deviazioni standard, calcolata come media aritmetica dei rischi nei singoli portafogli, sarebbe pari a 9,848%

Il caso di due titoli in portafoglio

Gennaio	(50%) × (–4,845%) + (50%) × (–4,720%) = –4,783%
Febbraio	(50%) × (–1,763%) + (50%) × (–0,611%) = –1,187%
Marzo	(50%) × (12,303%) + (50%) × (3,504%) = 7,904%
Aprile	(50%) × (3,725%) + (50%) × (–7,910%) = –2,093%
Maggio	(50%) × (–4,070%) + (50%) × (–1,829%) = –2,950%
Giugno	(50%) × (–3,494%) + (50%) × (2,964%) = –0,265%
Luglio	(50%) × (–2,671%) + (50%) × (–8,170%) = –5,421%
Agosto	(50%) × (1,212%) + (50%) × (3,191%) = 2,202%
Settembre	(50%) × (2,155%) + (50%) × (5,566%) = 3,861%
Ottobre	(50%) × (–4,064%) + (50%) × (3,032%) = –0,516%
Novembre	(50%) × (–2,158%) + (50%) × (30,167%) = 14,005%
Dicembre	(50%) × (–0,620%) + (50%) × (40,814%) = 20,097%

Deviazione standard del portafoglio = 7,804%

Non perfetta correlazione positiva tra i rendimenti mensili dei due titoli

Necessità di stimatori di movimenti congiunti dei titoli: covarianza e correlazione.

Il caso di due titoli in portafoglio - Covarianza

- La Covarianza ci permette di capire il **segno della relazione**, **in particolare se i rendimenti dei titoli si muovono nella stessa direzione oppure no.** **Segno positivo, i titoli si muovono nella stessa direzione, segno negativo si muovono nella direzione opposta**.

$$Cov_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[\left(r_{A,i} - \bar{r}_A\right)\left(r_{B,i} - \bar{r}_B\right)\right]}{(n-1)}$$

- Il valore assunto dalla covarianza **non ci dà alcuna informazione sulla intensità** della tendenza di movimento due titoli, ciò anche perché il valore dipende dalla entità degli scarti e quindi dalla volatilità dei titoli. Più è alto lo scarto, più alta sarà la covarianza.
- Indicatore influenzato dall'entità della volatilità dei singoli titoli.

Il caso di due titoli in portafoglio - Covarianza

	r_{A1}	r_{A2}	$r_{A1}-\bar{r}_{A1}$	$r_{A2}-\bar{r}_{A2}$	$(r_{A1}-\bar{r}_{A1}) \times (r_{A2}-\bar{r}_{A2})$
Mese 1	–4,545%	–1,638%	–4,460%	–1,902%	0,085%
Mese 2	–1,563%	–0,367%	–1,478%	–0,630%	0,009%
Mese 3	12,703%	5,717%	12,788%	5,453%	0,697%
Mese 4	3,925%	1,974%	4,010%	1,710%	0,069%
Mese 5	–3,470%	–1,180%	–3,385%	–1,443%	0,049%
Mese 6	–3,394%	–1,147%	–3,309%	–1,411%	0,047%
Mese 7	–2,371%	–0,711%	–2,286%	–0,975%	0,022%
Mese 8	1,312%	0,859%	1,397%	0,596%	0,008%
Mese 9	1,855%	1,091%	1,940%	0,827%	0,016%
Mese 10	–4,364%	–1,561%	–4,279%	–1,825%	0,078%
Mese 11	–1,958%	–0,535%	–1,873%	–0,799%	0,015%
Mese 12	0,845%	0,660%	0,930%	0,397%	0,0037%

$\bar{r}_{A1}$	$\bar{r}_{A2}$
–0,085%	0,264%

$\sum (r_{A1}-\bar{r}_{A1}) \times (r_{A2}-\bar{r}_{A2})$	1,0990 %
$\dfrac{\sum (r_{A1}-\bar{r}_{A1}) \times (r_{A2}-\bar{r}_{A2})}{n-1}$	0,0999 %

Il caso di due titoli in portafoglio - Correlazione

- Si preferisce pertanto **standardizzare la Covarianza**, depurandola dall'influenza della deviazione standard dei titoli, al fine di individuare l'intensità della relazione, passando ad una **Correlazione** di due titoli come segue:

$$\rho_{A,B} = \frac{Cov_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

- Il valore assunto dalla correlazione dei due titoli è compreso tra:
  - -1 (massimo effetto diversificazione)
  - +1 (nessun effetto diversificazione).

Il caso di due titoli in portafoglio - Correlazione

- Ipotizzando di voler calcolare il rischio, in termini di varianza, del portafoglio P composto dai generici titoli 1 e 2, gli elementi necessari per procedere al calcolo di σ_P^2 sono i seguenti:

  - La deviazione standard dei rendimenti del titolo A (σ_A)
  - Il peso assunto nel portafoglio dal titolo A (X_A)
  - La deviazione standard dei rendimenti del titolo B (σ_B)
  - Il peso assunto nel portafoglio dal titolo B (X_B)
  - La correlazione dei rendimenti dei due titoli ($\rho_{A,B}$)

Il caso di due titoli in portafoglio

Nel caso specifico di due titoli, la rischiosità di portafoglio espressa attraverso la deviazione standard o lo scarto quadratico medio si ottiene:

$$\sigma_p^2 = (X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + 2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + 2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}$$

ed essendo la covarianza pari a $Cov_{A,B} = \sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}$, si ottiene:

$$\sigma_p^2 = (X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + 2X_AX_BCov_{A,B}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + 2X_AX_BCov_{A,B}}$$

Il caso di due titoli in portafoglio

Nel caso specifico di due titoli, la rischiosità di portafoglio espressa attraverso la deviazione standard o lo scarto quadratico medio si ottiene:

$$\sigma_p^2 = (X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + 2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + 2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}$$

Proprietà del rischio del portafoglio:

1. **La deviazione standard del portafoglio è pari alla media ponderata delle deviazioni standard dei titoli solo quando i due titoli sono perfettamente correlati positivamente;**
2. **Più i titoli sono meno correlati più si apprezza il beneficio della diversificazione;**
3. **Il beneficio della diversificazione è massimo con correlazione pari a -1.**

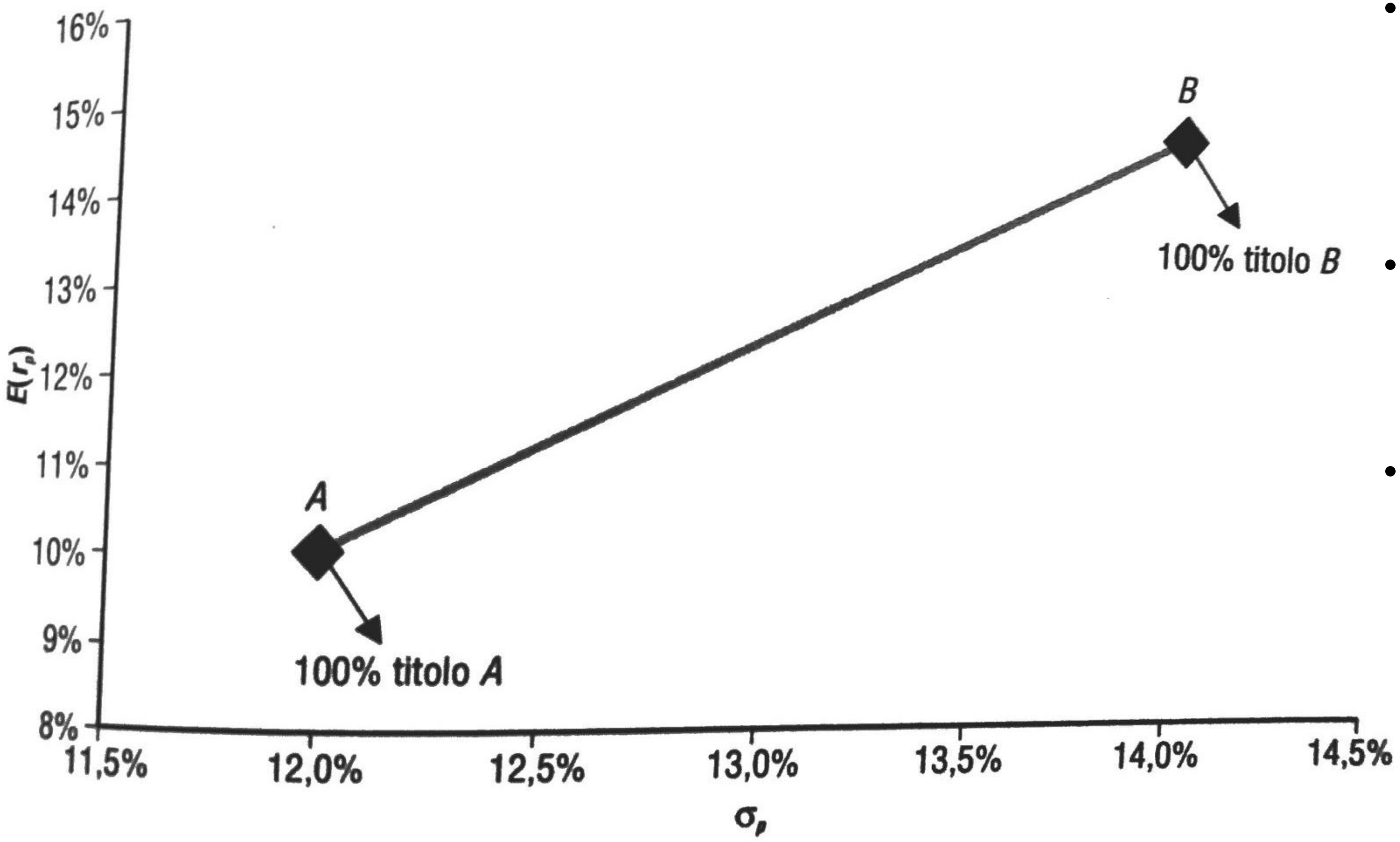
Il caso di due titoli in portafoglio – costruzione delle combinazioni

Costruzione dei portafogli fattibili del titolo A e titolo B, titoli **con correlazione +1**

Peso percentuale titolo *A*	Peso percentuale titolo *B*	$E(r_{Portafoglio})$	$\sigma_{Portafogli}$
100,00%	0,00%	10,00%	12,00%
87,50%	12,50%	10,63%	12,25%
75,00%	25,00%	11,25%	12,50%
62,50%	37,50%	11,88%	12,75
50,00%	50,00%	12,50%	13,00
37,50%	62,50%	13,13%	13,25
25,00%	75,00%	13,75%	13,50
12,50%	87,50%	14,38%	13,75
0,00%	100,00%	15,00%	14,0

Il caso di due titoli in portafoglio – costruzione delle combinazioni

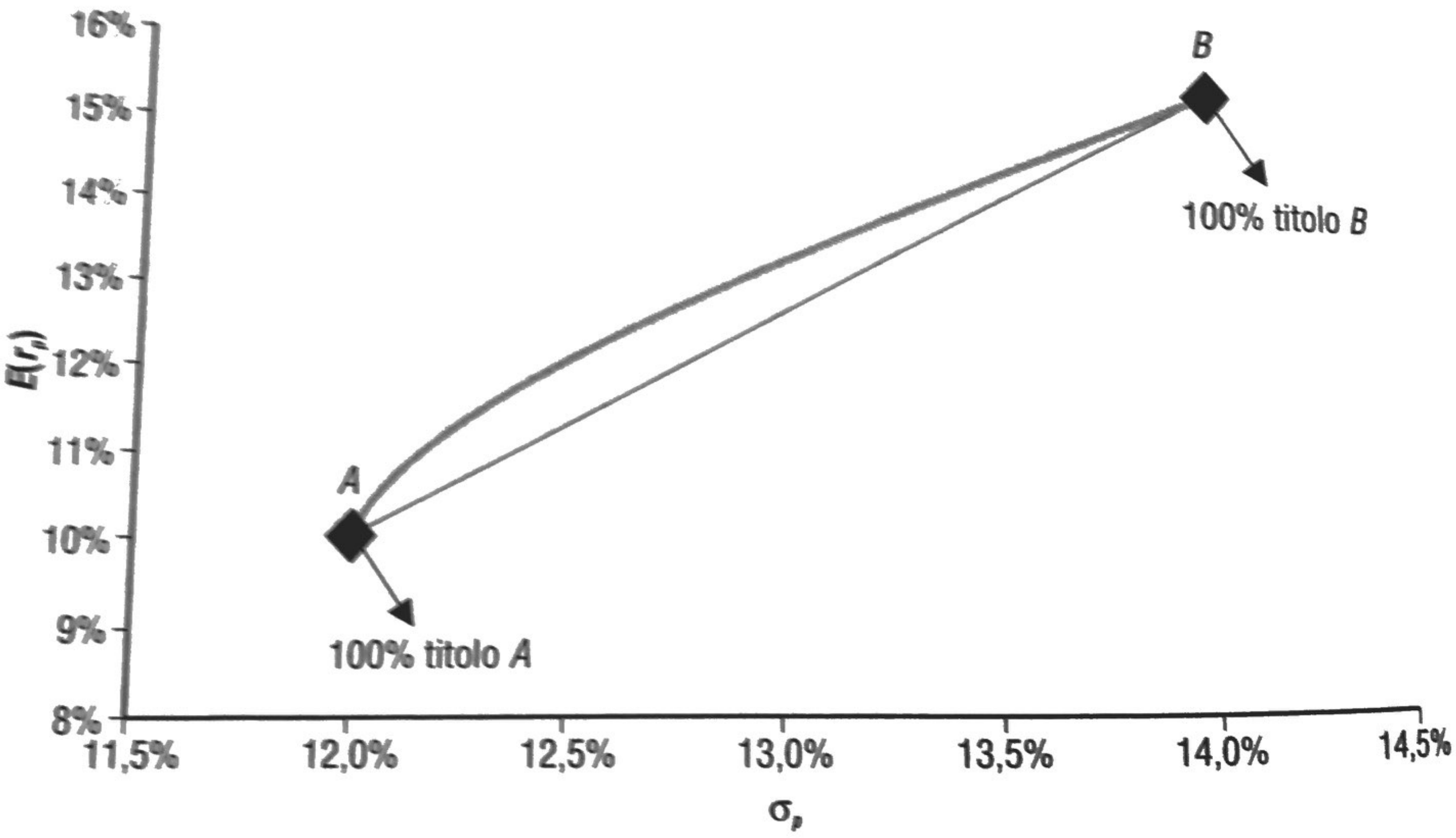
Costruzione dei portafogli fattibili del titolo A e titolo B, titoli con correlazione +1



- Il segmento AB rappresenta l'insieme delle combinazioni rischio-rendimento atteso dei portafogli.
- Tutti i portafogli sono efficienti e coincidono con i portafogli fattibili
- In caso di **perfetta correlazione positiva**, non sono ravvisabili benefici derivanti dalla diversificazione: il rischio è rappresentato dalla media ponderata dei rischi dei singoli titoli.

Il caso di due titoli in portafoglio – costruzione delle combinazioni

Costruzione dei portafogli fattibili del titolo A e titolo B, titoli con correlazione +0,9



- Quando la correlazione è inferiore a +1, le combinazioni di rischio-rendimento assume un andamento curvilineo (iperbole)
- La riduzione della correlazione produce un effetto sulla deviazione standard del portafoglio.
- Portafogli efficienti=portafogli fattibili

Il caso di due titoli in portafoglio – costruzione delle combinazioni

Quando la correlazione scende al di sotto del valore:

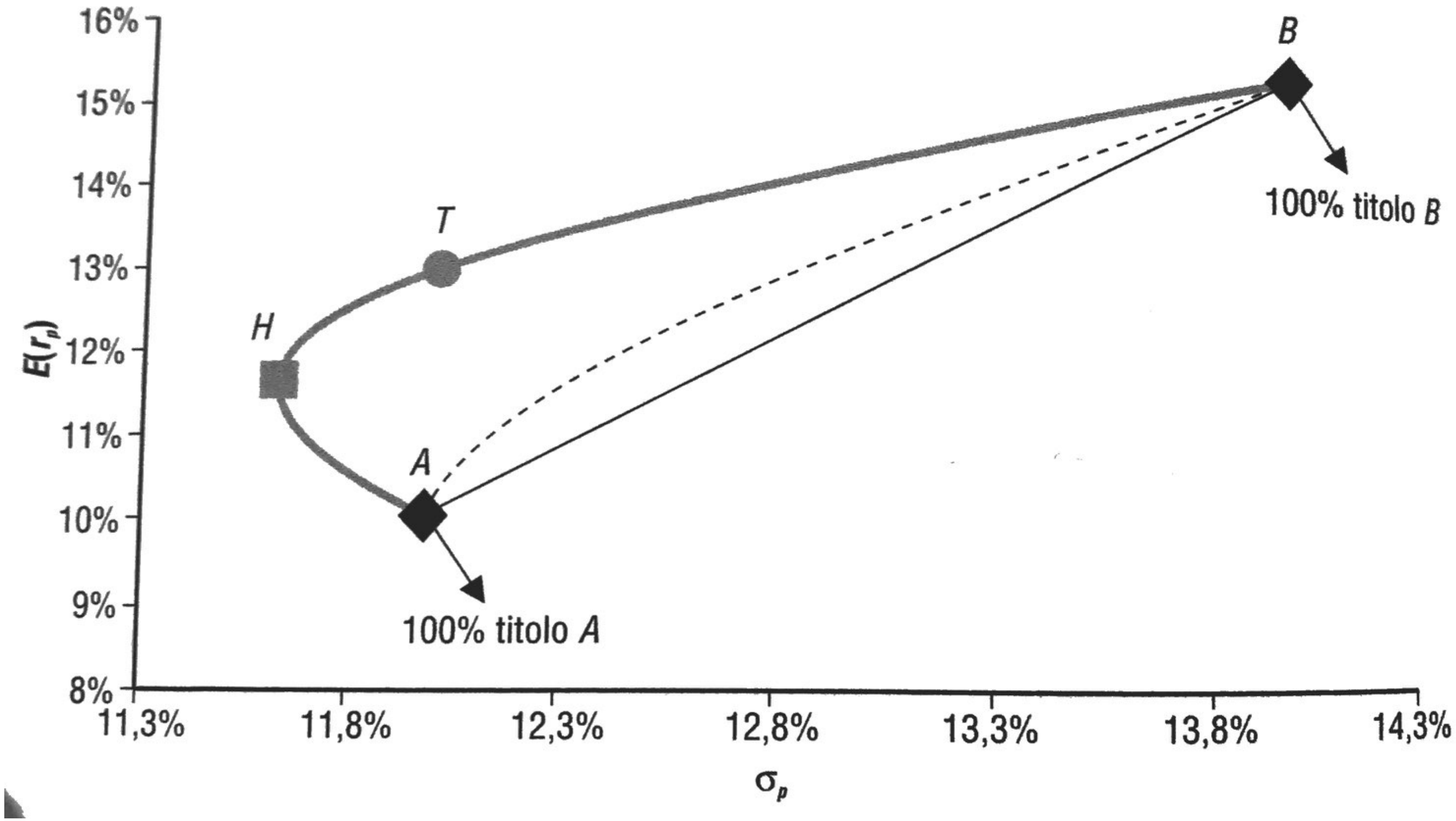
$$\rho *_{A,B} < \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$$

allora i portafogli fattibili diventano diversi da quelli efficienti.

Il ramo di iperbole si sposta sempre più verso sinistra identificando una riduzione del rischio derivante dalla combinazione dei titoli.

Il caso di due titoli in portafoglio – costruzione delle combinazioni

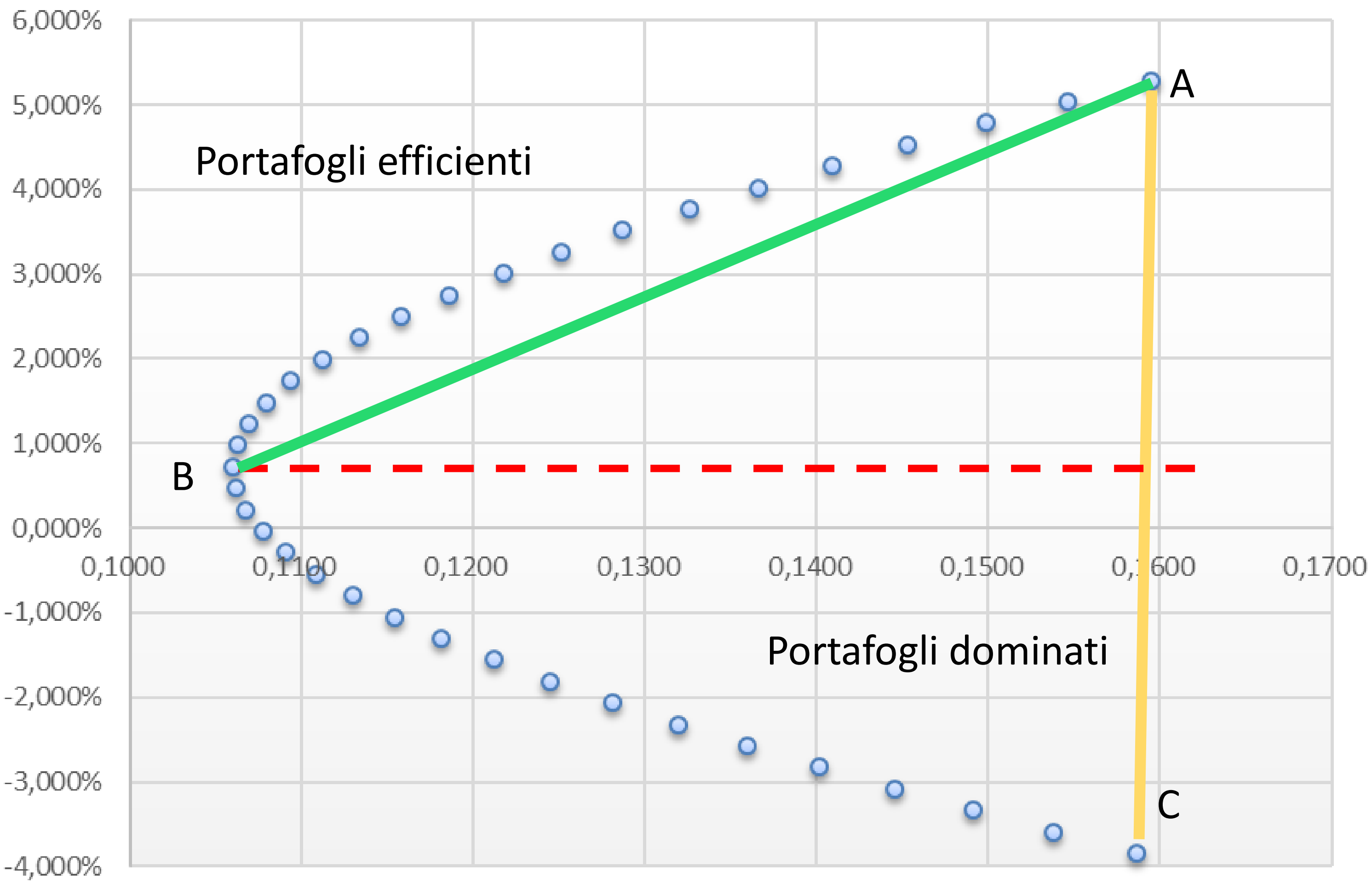
Costruzione dei portafogli fattibili del titolo A e titolo B, titoli con correlazione +0,7



- AB: insieme dei portafogli fattibili
- AH: insieme dei portafogli dominati
- HB: insieme dei portafogli efficienti

Un investitore avverso al rischio dovrebbe evitare di investire il 100% nel Titolo A, combinando i due titoli è possibile raggiungere il portafoglio T che, a parità di deviazione standard permette di raggiungere un rendimento superiore.

La frontiera efficiente in un portafoglio con 2 titoli



- AC portafogli fattibili
- AB insieme dei portafogli dominanti (frontiera efficiente)
- BC insieme dei portafogli dominati

- L'investitore razionale selezionerà un solo portafoglio (combinazione di rischio-rendimento) sul tratto efficiente/dominante in relazione alla sua curva di utilità, ovvero in base alla sua avversione/propensione al rischio.

Consulenza Finanziaria

Il caso generale di N titoli

Il caso generale di N titoli

- Rendimento atteso di un portafoglio: $E_{(r_p)} = \sum_{i=1}^{n} X_i E_{(r_i)}$ dove X_i sono i pesi percentuali dei titoli e $E_{(r_i)}$ è il rendimento atteso del titolo i-esimo.
- Per quanto riguarda invece il rischio del portafoglio la formula si modifica negli elementi sotto radice, per tenere in considerazione le correlazioni tra ogni possibile coppia di titoli.
- Ipotizzando di voler conoscere il rischio di un portafoglio a 5 titoli (A,B,C,D,E), il numero dei coefficienti di correlazione lineare da stimare è elevato.

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\rho_{A,A}} & \rho_{A,B} & \rho_{A,C} & \rho_{A,D} & \rho_{A,E} \\ \rho_{B,A} & \boldsymbol{\rho_{B,B}} & \rho_{B,C} & \rho_{B,D} & \rho_{B,E} \\ \rho_{C,A} & \rho_{C,B} & \boldsymbol{\rho_{C,C}} & \rho_{C,D} & \rho_{C,E} \\ \rho_{D,A} & \rho_{D,B} & \rho_{D,C} & \boldsymbol{\rho_{D,D}} & \rho_{D,E} \\ \rho_{E,A} & \rho_{E,B} & \rho_{E,C} & \rho_{E,D} & \boldsymbol{\rho_{E,E}} \end{matrix}$$

La matrice è simmetrica e i valori sulla diagonale sono pari a 1

Il caso generale di N titoli

- Il numero dei termini di correlazione da calcolare si può determinare con la seguente formula:

$$\frac{N^2 - N}{2} = \frac{5^2 - 5}{2} = 10$$

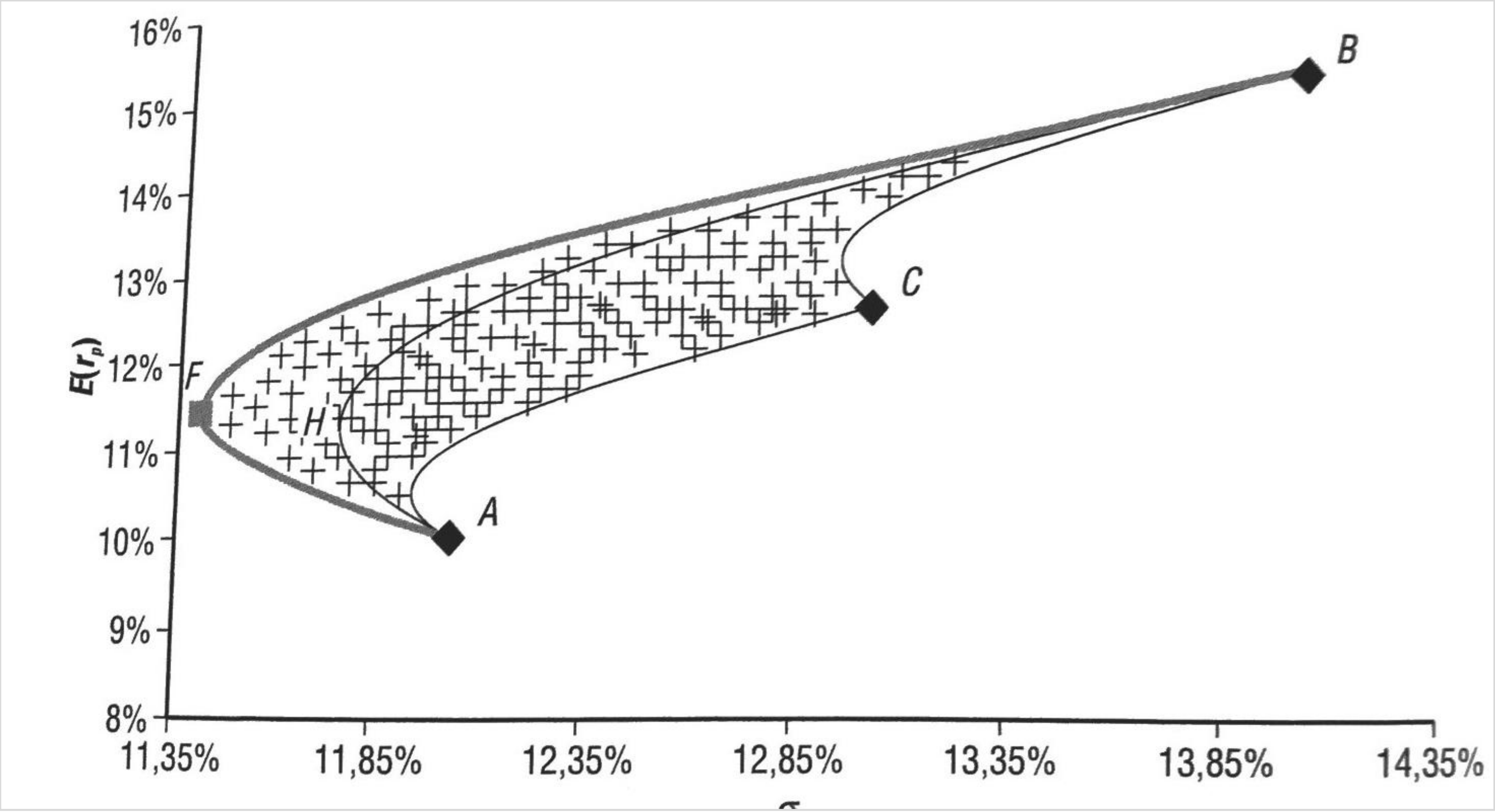
- Possiamo calcolare la formula per determinare il rischio di un portafoglio in presenza di più di due titoli, partendo dall'esempio di tre titoli. Ipotizzando di calcolare il rischio in termini di deviazione standard dovremmo calcolare:
    - La deviazione standard dei rendimenti dei tre titoli
    - Il peso assunto da ciascun titolo
    - Le correlazioni tra i rendimenti delle tre coppie di titoli

Il caso generale di N titoli

$$\sigma_P = \sqrt{\underbrace{(X_A\sigma_A)^2 + (X_B\sigma_B)^2 + (X_C\sigma_C)^2}_{\text{pari al numero dei titoli in portafoglio}} + \underbrace{2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B} + 2X_AX_C\sigma_A\sigma_C\rho_{A,C} + 2X_CX_B\sigma_C\sigma_B\rho_{C,B}}_{\text{pari al numero dei termini unici di correlazione}}}$$

- Possiamo calcolare la formula per determinare il rischio di un portafoglio in presenza di più di due titoli, partendo dall'esempio di tre titoli. Ipotizzando di calcolare il rischio in termini di deviazione standard

La frontiera efficiente in un portafoglio con 3 titoli



- AB, portafogli combinando titolo A e titolo B; AC portafogli combinando titolo A e titolo C; CB portafogli combinando titolo C e B. Sono sempre portafogli dominati.
- FB insieme dei portafogli dominanti (frontiera efficiente), combinando i tre titoli
- FA insieme dei portafogli dominati, combinando i tre titoli
- Per raggiungere livelli oltre FB è necessario inserire nel portafoglio un ulteriore investimento (portafogli impossibili dati i tre titoli)

Consulenza Finanziaria

La scelta del portafoglio

L'individuazione del portafoglio ottimale per l'investitore

- Siccome **nessuno dei portafogli sulla frontiera efficiente è dominante**, **sarà l'investitore a scegliere qual è quello ottimale sulla base della sua tolleranza al rischio**.
- Per determinare quello ottimale si può far riferimento al concetto di curve di indifferenza, che permette di identificare tutte le combinazioni che rendono indifferenti i portafogli per un investitore.
- Nel modello di Markowitz si utilizzano curve di indifferenza basate su una funzione di utilità quadratica che permette di:
  - Esprimere le preferenze degli investitori esclusivamente in funzione di due sole variabili, ovvero rendimento e rischio
  - Identificare il rendimento atteso come un *bene* e il rischio come un *male*, ed è coerente con l'ipotesi dell'investitore avverso al rischio

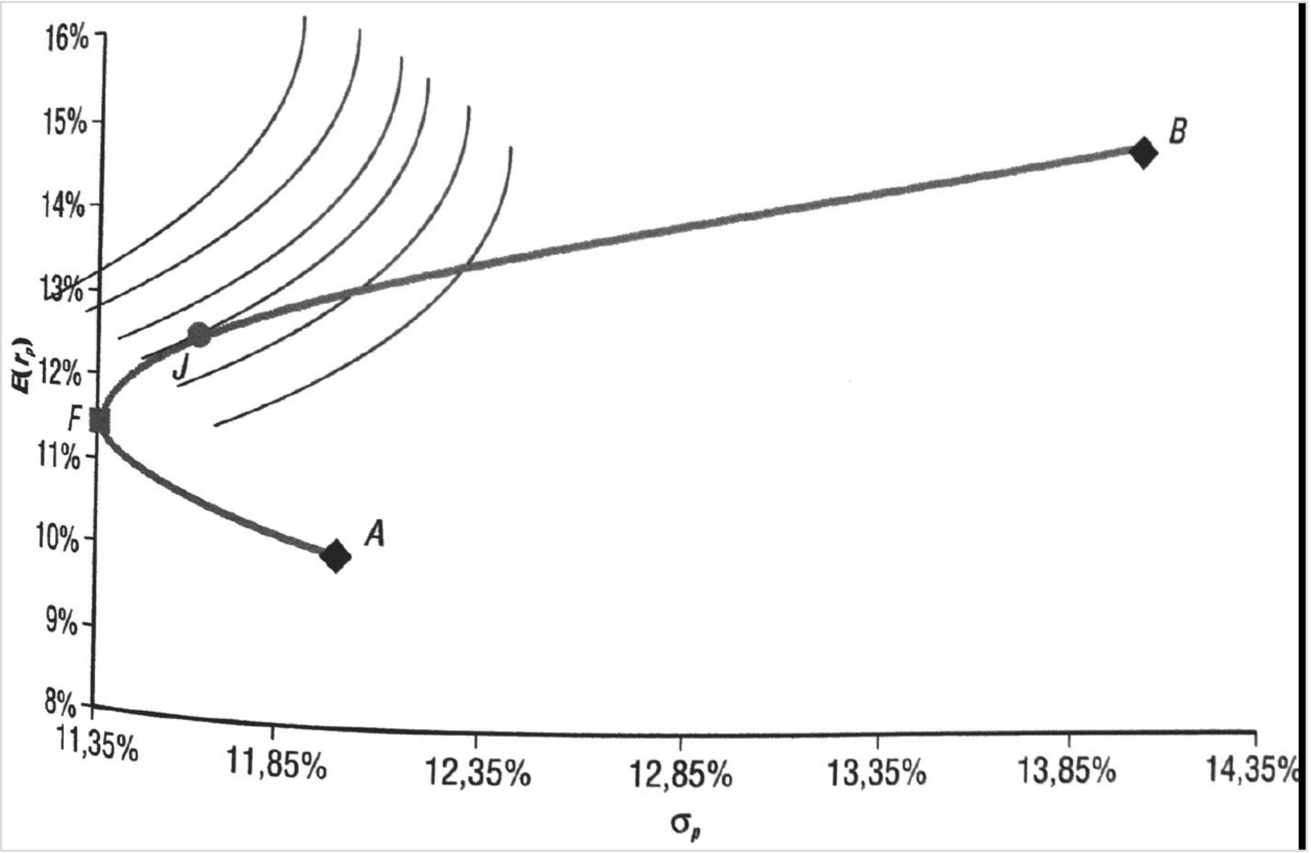
L'individuazione del portafoglio ottimale per l'investitore

Nota la seguente funzione di utilità, dove λ esprime l'avversione al rischio dell'investitore (valori più elevati, maggiore avversione):

$$E[U(x)] = E(r) - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2$$

l'investitore massimizzerà la sua utilità attesa scegliendo tra i portafogli efficienti.

La funzione inoltre mostra come al crescere dell'avversione al rischio, la varianza va a ridurre l'utilità attesa per l'investitore



Criticità e applicazioni operative

- Il processo di individuazione del portafoglio ottimo è nella realtà impraticabile: nessun investitore è capace di definire una funzione di utilità attesa in grado di riflettere le proprie preferenze
- Nessun investitore è in grado di quantificare un ipotetico valore λ con cui esprimere il grado di tolleranza al rischio
- Il modello viene utilizzato prevalentemente per la composizione di portafogli di asset class
- Più diversificazione non significa necessariamente avere portafogli con un numero elevatissimo di titoli, ma il beneficio della diversificazione nasce dalle caratteristiche statistiche dei titoli
- La Teoria soffre di assunzioni troppo stingenti: orizzonte temporale uniperiodale, decisioni prese solo in base a media e varianza.
- I portafogli efficienti non sono stabili.