MODELLO DI SOLOW

- Analizza il Fenomeno della Crescita Economica
- Obiettivo: Trovare un Equilibro a cui l'Economia converge

Nel modello di Solow il risparmio, la crescita della popolazione, e il progresso tecnologico influenzano il prodotto aggregato dell'economia e la sua crescita nel tempo.

Tre sono gli elementi alla base della costruzione del modello

1. L'Offerta

L'offerta di beni e servizi si basa sulla Funzione di Produzione

$$Y = F(K, L)$$

che può essere riscritta anche in termini pro-capite come

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}\right) \quad \text{oppure} \quad y = f(k)$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Si considera una particolare forma della F. di Produzione: la Cobb-Douglas

$$Y=(K)^{\alpha}\cdot(L)^{1-\alpha} \qquad 0<\alpha<1$$

che in termini pro-capite (o per lavoratore) viene riscritta come

$$\frac{Y}{L}=\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \quad \text{oppure} \quad y=k^{\alpha}$$

Proprietà:

a) Rendimenti di scala costanti

$$zY=F(zK, zL\cdot E)$$

b) Distribuzione costante del reddito tra i fattori

Reddito da Capitale $PMK\cdot K=\alpha\cdot Y$

Reddito da Lavoro $PML\cdot(L\cdot E)=(1-\alpha)\cdot Y$

c) Produttività marginali decrescenti

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

2. La Domanda

La domanda di beni deriva da consumo e investimento

$$Y = C + I$$

Si assume che una frazione s del reddito viene risparmiata e una frazione pari ad $(1-s)$ viene consumata. Quindi

$$C = (1-s) \cdot Y$$

o in termini pro-capite $\frac{C}{L} = (1-s) \cdot \frac{Y}{L} \quad \Rightarrow \quad c = (1-s)y$

da cui sostituendo c in $y = c + i$ otteniamo

$$y = (1-s)y + i \quad \Rightarrow \quad \underbrace{sy}_{risparmio} = \underbrace{i}_{investimento}$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

3. Legge di movimento del Capitale

La legge del movimento del capitale mostra l'evoluzione di k nel tempo. In un'economia in cui vi è assenza di crescita della popolazione e progresso tecnologico la legge del movimento del capitale è data da:

$$\Delta k = \underbrace{sf(k)}_{i} - \delta k$$

dove

i rappresenta l'investimento (spesa per impianti e attrezzature) e quindi un aumento dello stock di capitale

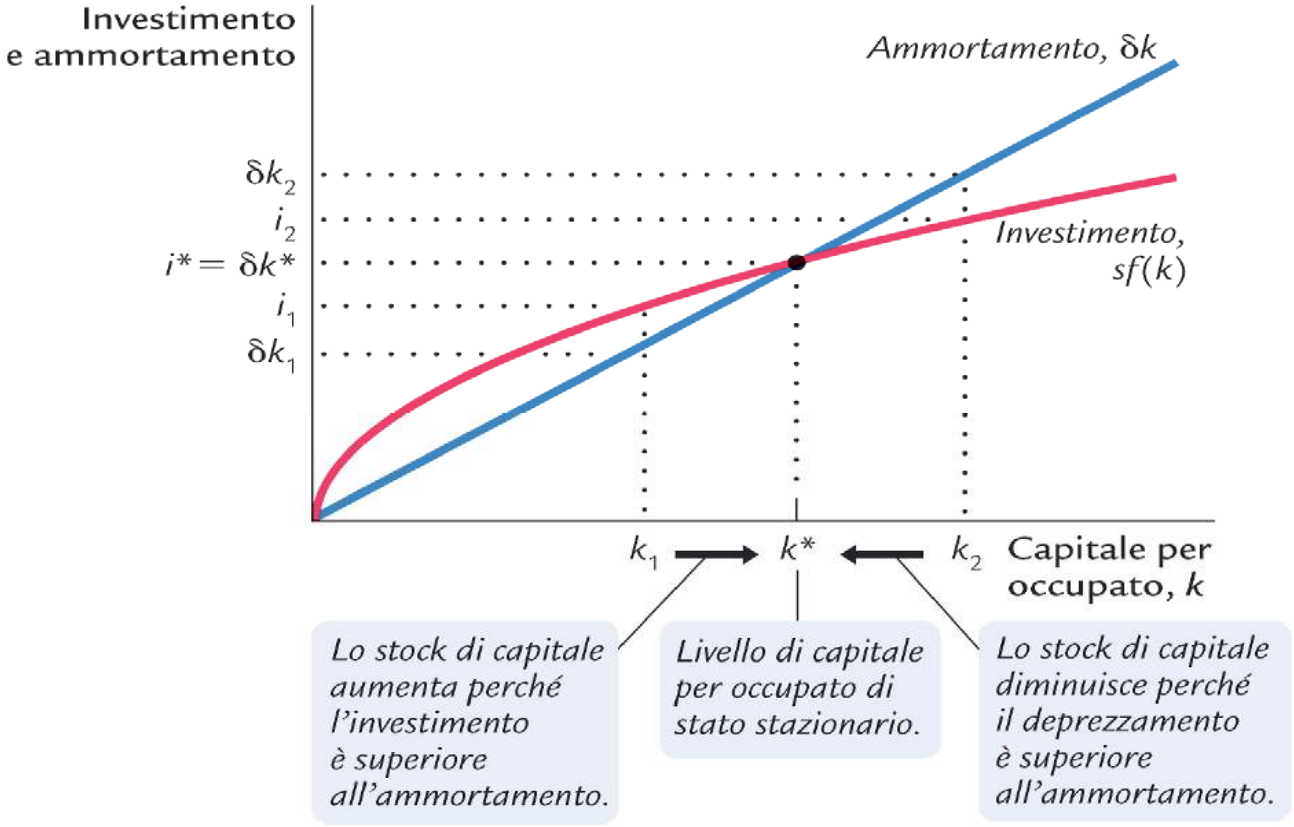
δk rappresenta la riduzione dello stock di capitale a causa del logoramento, "l'ammortamento".

Se rapportiamo su di un unico grafico la funzione degli investimenti e quella dell'ammortamento si vede che c'è un solo livello di stock di capitale k^* per il quale la quantità di investimento è uguale alla quantità di ammortamento.

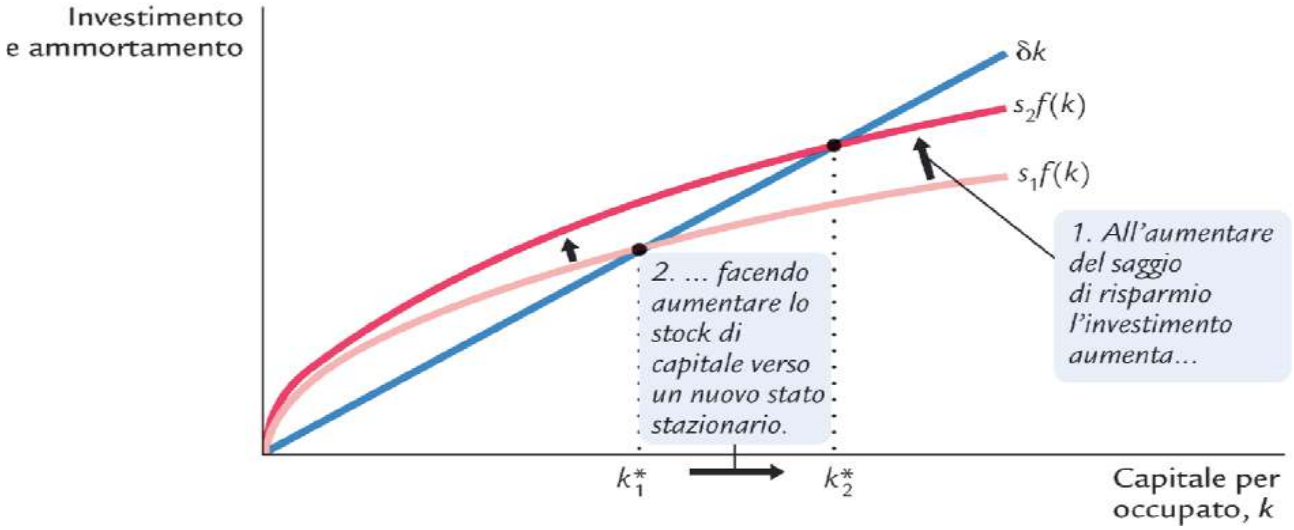
Questa quantità k^* prende il nome di capitale per lavoratore di **stato stazionario** e rappresenta l'equilibrio di lungo periodo a cui l'economia converge

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)



Una variazione del saggio di risparmio fa spostare la curva degli investimenti generando così, dall'intersezione con la curva degli ammortamenti, un nuovo stato stazionario a cui l'economia convergerà



Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Quindi il solo saggio di risparmio non è in grado di spiegare una crescita economica continua e duratura: un saggio di risparmio più elevato (come si può vedere dalla figura sopra) induce una crescita dell'economia temporanea, l'economia raggiungerà il nuovo stato stazionario in cui capitale e prodotto sia per lavoratore che aggregato $\left(k,y,K,Y\right)$ sono costanti.

Ipotizziamo che nella nostra economia la popolazione cresce ad un tasso *n*. L'aumento del numero dei lavoratori provoca una diminuzione della quantità di capitale per lavoratore. Per cui la legge del movimento del capitale diventerà

$$\Delta k = sf\left(k\right)-\left(\delta+n\right)k$$

dove

nk misura la riduzione dello stock di capitale dovuto all'aumento del numero di lavoratori

Anche in questo caso esiste un livello di stock di capitale k^* per il quale la quantità di investimento è uguale alla quantità di investimenti di crescita bilanciata, $\left(\delta+n\right)k$.

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

A differenza di quanto accadeva prima, con la crescita della popolazione capitale e prodotto per lavoratore (k, y) sono costanti al livello di stato stazionario, mentre il capitale totale e il prodotto aggregato (K, Y) crescono al tasso *n*.

Per introdurre il progresso tecnologico dobbiamo riscrivere la funzione di produzione come

$$Y = F(K, L \cdot E)$$

"E" rappresentà l'efficienza del lavoro. Il progresso tecnologico entra nel modello di Solow come labour augmenting: avanzamenti tecnologici fanno si che i lavoratori diventino più produttivi.

Prima di procedere oltre ridefiniamo k, y come

- capitale per lavoratore effettivo $k = K / L \cdot E$
- prodotto per lavoratore effettivo $y = Y / L \cdot E$

In un'economia con progresso tecnologico, che cresce al tasso *g* la legge di movimento del capitale è data da:

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k$$

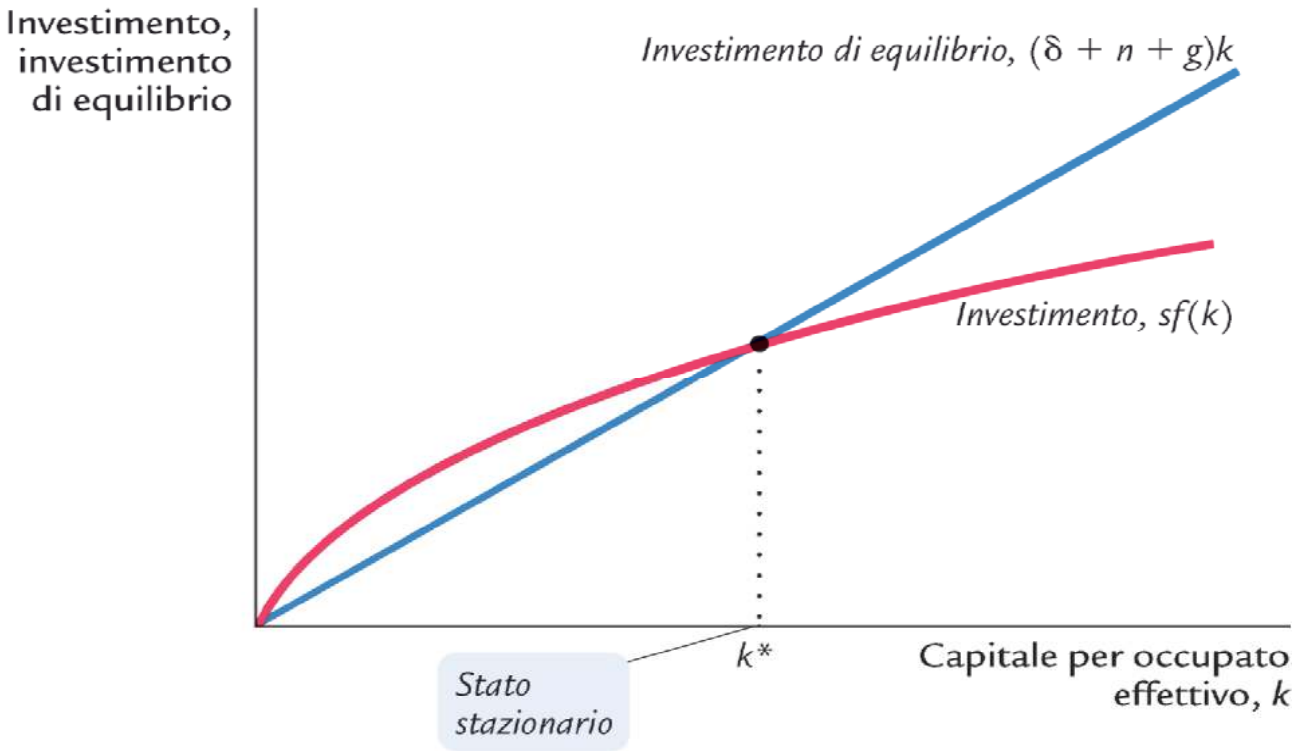
Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

dove

gk misura la riduzione dello stock di capitale dovuto ai nuovi lavoratori effettivi.

$(\delta+n+g)k$ prendono il nome di investimenti di equilibrio

Anche ora se riportiamo l'investimento e gli investimenti di equilibrio, $(\delta+n+g)k$, su di un unico grafico possiamo vedere che c'è un solo livello dello stock di capitale per lavoratore effettivo k^* tale per cui la quantità di investimento è uguale alla quantità di investimenti di equilibrio.



This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Nello stato stazionario il prodotto e il capitale per lavoratore effettivo sono costanti.

A differenza di quanto accadeva prima, l'introduzione del progresso tecnologico fa si che il prodotto e il capitale per lavoratore crescono ad un tasso g e il prodotto e il capitale totale crescono ad un tasso $n+g$

Quindi secondo il modello di Solow solo il progresso tecnologico può spiegare una crescita persistente del tenore di vita

Ipotizziamo ora che il governo possa scegliere il tasso di risparmio.

Per ogni valore di s si otterrà un diverso punto di equilibrio di stato stazionario

Visto che l'obiettivo del governo è massimizzare il benessere degli individui sceglierà lo stato stazionario in cui è massimo il consumo.

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Il valore di k di stato stazionario che massimizza il consumo è detto livello di capitale della regola aurea, k^*_{GOLD}

Dall'equazione della domanda di beni noi sappiamo che

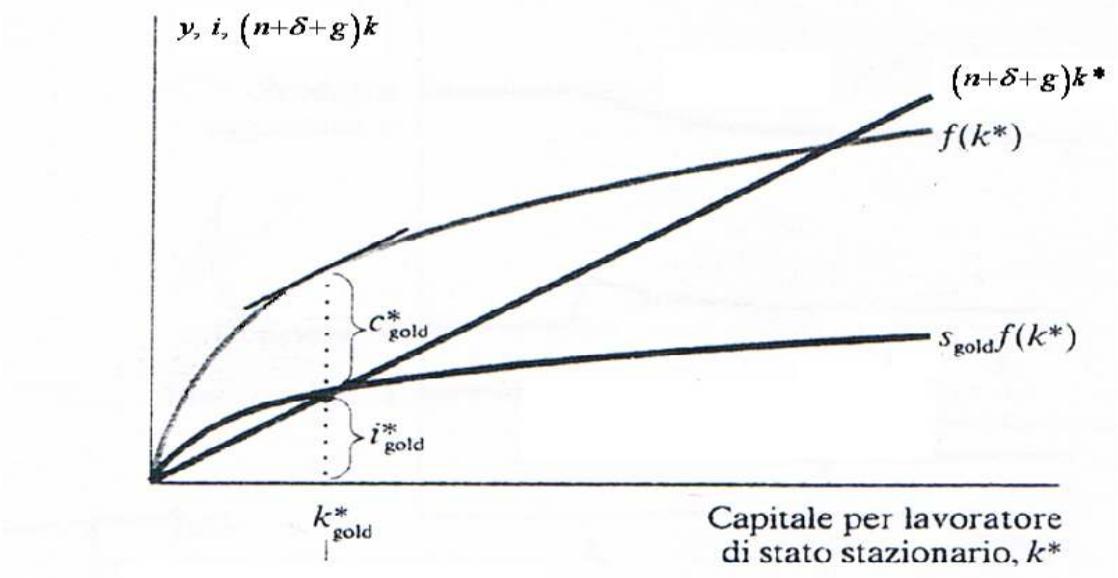
$$y=c+i$$

da cui $c=y-i$

Considerando che $y=f\left(k\right)$ e che nello stato stazionario $i=\left(n+\delta+g\right)k$ riscriviamo il consumo in funzione di k

$$c=f\left(k\right)-\left(n+\delta+g\right)k$$

Graficamente



This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Il consumo è massimo quando la distanza tra $f\left(k\right)$ e $\left(n+\delta+g\right)k$ è massima. Ciò si verifica nel punto in cui le due curve hanno la stessa pendenza

$$PMK = n + \delta + g$$

Si noti che k^*_{GOLD} è un punto al quale l'economia non converge.

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Esercizio n.1

Due Paesi A e B hanno la stessa Funzione di Produzione

$$Y=(K)^{1/2}\cdot(L)^{1/2}$$

a) Dimostrare che la F. di Produzione ha rendimenti di scala costanti.

Rendimenti di scala costanti implica che

$$zY=F(zK,zL\cdot E)$$

Dato che

$$Y=F(K,L)=(K)^{1/2}\cdot(L)^{1/2}$$

$$F(zK,zL)=(zK)^{1/2}\cdot(zL)^{1/2}=z\,(K)^{1/2}\cdot(L)^{1/2}=zY$$

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

b) Riscrivere la F. di Produzione in termini pro-capite.

Dividendo per L ad ambo i membri di

$$Y=(K)^{1/2}\cdot(L)^{1/2}$$

otteniamo

$$\frac{Y}{L}=\frac{(K)^{1/2}\cdot(L)^{1/2}}{L}$$

da cui definendo

$$k=\frac{K}{L};\qquad y=\frac{Y}{L};$$

si ha che

$$y=K^{1/2}L^{1/2}L^{-1}=K^{1/2}L^{-1/2}=\frac{K^{1/2}}{L^{1/2}}=k^{1/2}$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

c) Assumendo che

$$\delta = 0,05 \qquad n = 0$$
$$s_A = 0,1 \qquad g = 0$$
$$s_B = 0,2$$

Calcolare il capitale per lavoratore, il prodotto per lavoratore, e il consumo di stato stazionario.

Nello stato stazionario sappiamo che

$$\Delta k = sf\left(k\right) - \delta k = 0$$

da cui

$$sf\left(k\right) = \delta k$$

sostituendo la funzione di produzione otteniamo

$$sk^{1/2} = \delta k$$

$$k^{1/2} = \frac{s}{\delta}$$

$$k = \left(\frac{s}{\delta}\right)^2$$

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Per trovare il valore di $k*$ basta semplicemente inserire il valore del saggio di risparmio e del tasso di deprezzamento.

$$\text{Paese}_A : k^* = \left(\frac{0.1}{0.05} \right)^2 = 4$$

$$\text{Paese}_B : k^* = \left(\frac{0.2}{0.05} \right)^2 = 16$$

Determinato il capitale per lavoratore di stato stazionario possiamo immediatamente calcolare il reddito per lavoratore di stato stazionario

$$y_A^* = \left(k^* \right)^{1/2} = \left(4 \right)^{1/2} = 2$$

$$y_B^* = \left(k^* \right)^{1/2} = \left(16 \right)^{1/2} = 4$$

Per ottenere il consumo dalla Domanda di beni sappiamo che

$$c = \left(1 - s \right) \cdot y$$

ecco perché

$$c_A^* = \left(1 - 0,1 \right) \cdot 2 = 1,8; \qquad \text{c}_B^* = \left(1 - 0,2 \right) \cdot 4 = 3,2;$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

d) Ipotizziamo che entrambi i paesi partano con uno stock di capitale per lavoratore di due unità. Calcolare il reddito per lavoratore e il consumo per lavoratore per ogni anno. Dopo quanti anni il consumo per lavoratore del paese A sarà superiore a quello del paese B?

	PAESE A				PAESE B			
Anni	k	y	c	Δk	k	y	c	Δk
1	2,000	1,414	1,273	0,041	2,000	1,414	1,131	0,183
2	2,041	1,429	1,286	0,041	2,183	1,477	1,182	0,186
3	2,082	1,443	1,299	0,040	2,369	1,539	1,231	0,190
4	2,122	1,457	1,311	0,040	2,559	1,600	1,280	0,192
5	2,102	1,470	1,323	0,039	2,751	1,659	1,327	0,194

Notiamo che ci vorranno cinque anni perché il paese A raggiunga il paese B

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Esercizio n.2

Supponiamo che il paese C sia in guerra e supponiamo che tale evento abbia provocato un elevato numero di morti.

a) Qual è l'effetto immediato sul prodotto aggregato totale e sul prodotto per lavoratore?

Per il prodotto aggregato noi abbiamo che

$$Y = F\left(K, L\right) \quad \Rightarrow \quad L\downarrow \quad \Rightarrow \quad Y\downarrow$$

invece per il prodotto per lavoratore

$$y = f\left(k\right) \quad \Rightarrow \quad L\downarrow \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{L} = k\uparrow \quad \Rightarrow y\uparrow$$

b) Ipotizzando che il saggio di risparmio resti invariato e che, prima della guerra, l'economia si trovasse in un stato stazionario, cosa accade nel periodo postbellico al prodotto per lavoratore? Nel periodo postbellico il tasso di crescita del prodotto è più elevato o più ridotto della norma?

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Dopo la guerra una riduzione della forza lavoro fa si che lo stock di capitale per lavoratore sia maggiore. Se prima della guerra l'economia si trovava nello stato stazionario, dopo la guerra l'economia ha uno stock di capitale per lavoratore maggiore di quello di stato stazionario. Quando l'economia ritorna nello stato stazionario il capitale per lavoratore si riduce e di conseguenza anche il prodotto per lavoratore diminuisce.

Nello stato uniforme noi sappiamo che il prodotto per lavoratore cresce ad un tasso g. Siccome nel periodo postbellico si osserva una riduzione di k che comporta a sua volta una riduzione di y concludiamo che nel periodo post bellico il tasso di crescita del prodotto per lavoratore sarà minore rispetto alla norma.

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Esercizio n.3

Un'economia descritta dal modello di crescita di Solow ha la seguente funzione di produzione:

$$y = \sqrt{k}$$

a) Calcolare il valore di stato stazionario di y in funzione di s, n, g, δ.

Per scrivere y in funzione di s, n, g, δ partiamo dalla condizione di stato uniforme

$$\Delta k = sf\left(k\right) - \left(\delta + n + g\right)k = 0$$

La funzione di produzione $y = \sqrt{k}$ può essere riscritta come

$$y^2 = k$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione sopra otteniamo che

$$sy - \left(\delta + n + g\right)y^2 = 0$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

da cui risolvendo per y

$$y^* = \frac{s}{\delta + n + g}$$

b) Un paese industrializzato ha un saggio di risparmio del 28% e un tasso di crescita demografica dell'1% all'anno. Un paese in via di sviluppo ha un saggio di risparmio del 10% e un tasso di crescita demografica del 4% all'anno. In entrambi i paesi g=0,02 e δ=0,04. Determinare il valore di y di stato stazionario per entrambi i paesi.

Sostituendo i valori nella formula trovata al punto a)

$$y^*_{PI} = \frac{0,28}{0,01+0,02+0,04} = 4;$$

$$y^*_{PU} = \frac{0,1}{0,04+0,02+0,04} = 1$$

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

c) Quali provvedimenti possono prendere i politici del paese in via di sviluppo al fine di aumentare il livello di reddito del paese?

Possono aumentare *s* attraverso l'incremento del risparmio pubblico, la riduzione del disavanzo e con l'introduzione di sgravi fiscali.

Possono ridurre *n* attraverso il controllo delle nascite ed introducendo disincentivi ad avere figli.

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Esercizio n.4

Negli Stati Uniti la quota del PIL attribuita al capitale è circa il 30%, la crescita media del prodotto aggregato è del 3% all'anno, il tasso di ammortamento è del 4% all'anno e il rapporto capitale/prodotto aggregato è di circa 2,5. Supponiamo che la F. di Produzione sia del tipo Cobb-Douglas in modo che la quota di prodotto attribuita al capitale sia costante e che gli Stati Uniti si trovino in uno stato stazionario.

a) Determinare il saggio di risparmio iniziale.

Prima di iniziare cerchiamo di capire bene cosa conosciamo dell'economia americana

Una funzione di produzione Cobb-Douglas ha la seguente forma $y = k^{\alpha}$ dove α rappresenta la quota capitale del prodotto. Dal testo si ha che $\alpha = 0.3$ per cui la funzione di produzione è $y = k^{0.3}$

Nello stato stazionario sappiamo che il tasso di crescita è del 3% per cui $\left(n + g\right) = 0.03$

Inoltre sappiamo che $K / Y = 2.5$ e poiché

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

$$k / y = \left(\frac{K / L}{Y / L} \right) = K / Y \quad \Rightarrow \quad k / y = 2.5$$

Per calcolare il saggio di risparmio partiamo dalla condizione di stato uniforme

$$sy = (\delta + n + g)k$$

da cui

$$s = (\delta + n + g)\frac{k}{y}$$

Sostituendo i valori troviamo che

$$s = (0.04 + 0.03) \cdot 2.5 = 0.175 \quad \Rightarrow \quad s = 17.5\%$$

b) Calcolare il Prodotto Marginale del Capitale nello Stato Stazionario iniziale

Siccome la F. di Produzione è una Cobb-Douglass sappiamo che se il capitale è remunerato al suo prodotto marginale, il reddito da capitale è dato da $PMK \cdot K = \alpha \cdot Y$ da cui otteniamo che

$$PMK = \alpha \frac{Y}{K} = \frac{\alpha}{K / Y} = \frac{0,3}{2,5} = 0,12 \quad \Rightarrow \quad 12\%$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

c) Supponiamo che un intervento di politica economica faccia aumentare il saggio di risparmio in modo che l'economia raggiunga lo stock di capitale di stato stazionario della regola aurea. Quale sarà il prodotto marginale del capitale in k^*_{GOLD}?

In corrispondenza di k^*_{GOLD} si ha che

$$PMK = n + \delta + g$$

quindi

$$PMK = (0,03 + 0,04) = 0,07 \quad \Rightarrow \quad 7\%$$

Ciò significa che per passare dallo stato stazionario iniziale a quello dello regola aurea è necessario aumentare *k*.

d) Quale sarà il rapporto capitale/prodotto in k^*_{GOLD}?

Nel punto b) abbiamo visto che

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

$$PMK = \alpha \frac{Y}{K}$$

da cui otteniamo che

$$\left(\frac{k}{y}\right)^*_{GOLD} = \frac{\alpha}{PMK_{GOLD}} = \frac{0,3}{0,07} = 4,29$$

e) Quale deve essere il saggio di risparmio affinché l'economia raggiunga lo stato stazionario della regola aurea?

Nel punto a) abbiamo visto che

$$s = (n + \delta + g)\left(\frac{k}{y}\right)^*$$

per cui

$$s_{Gold} = (n + \delta + g)\left(\frac{k}{y}\right)^*_{GOLD} = (0,04 + 0,03) \cdot 4,29 = 0,30$$

Quindi per raggiungere lo stato stazionario della regola aurea il saggio di risparmio deve crescere dal 17,5% al 30%.

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Esercizio n.5

Due Paesi A e B hanno la stessa Funzione di Produzione

$$y=(k)^{1/3}$$

a) Assumendo che

$$\delta = 0,05 \qquad n = 0$$
$$s_A = 0,1 \qquad g_A = 0,03$$
$$s_B = 0,1 \qquad g_B = 0,05$$

Calcolare il capitale per lavoratore, il prodotto per lavoratore, e il consumo di stato stazionario. Commentare i risultati

Nello stato stazionario sappiamo che

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k = 0$$

da cui

$$sf(k) = (\delta + n + g)k$$

sostituendo la funzione di produzione otteniamo

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

$$sk^{1/3} = (\delta + n + g)k$$

$$k^{2/3} = \frac{s}{\delta + n + g}$$

$$k = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Per trovare il valore di k^* basta semplicemente inserire i valori

$$\text{Paese}_A : k^* = \left(\frac{0.1}{0.05 + 0.03} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.39$$

$$\text{Paese}_B : k^* = \left(\frac{0.1}{0.05 + 0.05} \right)^{\frac{3}{2}} = 1$$

Determinato il capitale per lavoratore di stato stazionario possiamo immediatamente calcolare il reddito per lavoratore di stato stazionario

$$y_A^* = \left(k^* \right)^{1/3} = (1.39)^{1/3} = 1.11$$

$$y_B^* = \left(k^* \right)^{1/3} = (1)^{1/3} = 1$$

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)

Per ottenere il consumo dalla Domanda di beni sappiamo che

$$c=(1-s)\cdot y$$

ecco perché

$$c_A^* = (1-0,1)\cdot 1,11 = 1; \qquad c_B^* = (1-0,1)\cdot 1 = 0,9;$$

b) A quale tasso cresce il prodotto aggregato ed il capitale aggregato nello stato stazionario in entrambi i paesi? Confrontare i risultati con quelli ottenuti nel punto a).

Nello stato stazionario sappiamo che sia K che L crescono ad un tasso $n+g$. Quindi nel paese A, K e L cresceranno ad un tasso del 3% mentre in B cresceranno al 5%.

In a) nel paese A il capitale per lavoratore effettivo era maggiore rispetto al paese B, ma siccome il paese B ha un tasso di crescita del progresso tecnologico maggiore, la sua economia a livello aggregato crescerà in misura maggiore rispetto ad A.

This document is available free of charge on StuDocu.com

Scaricato da Aniello Ferraro (f.nello.92@gmail.com)