Esercitazione 4 - cap. 6 - Soluzione esercizi

martedì 4 aprile 2023 18.40

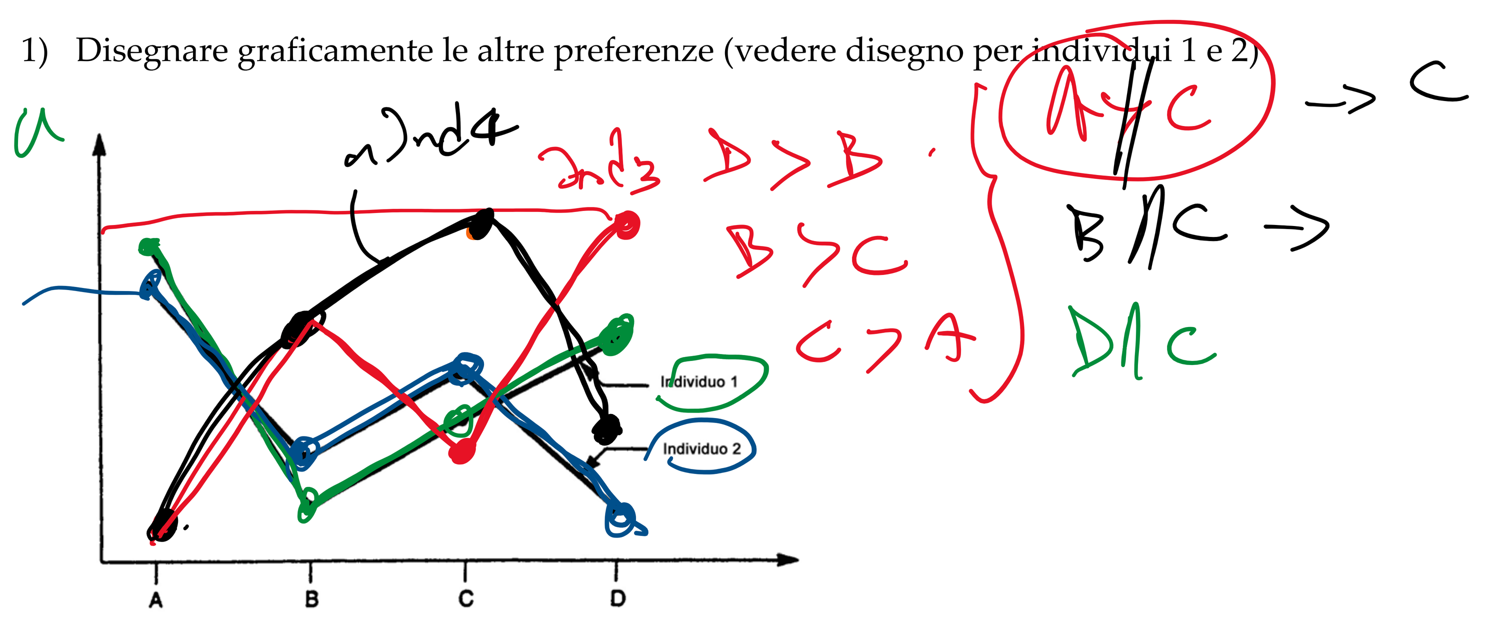
Voting - cap. 6

Esercizio 6.1 Libro

Supponiamo ci siano 5 individui (1, 2, 3, 4 e 5) con le seguenti preferenze per i progetti A, B, C e D

1	2	3	4	5
A	A	D	C	B
D	C	B	B	C
C	B	C	D	D
B	D	A	A	A

1) Disegnare graficamente le altre preferenze (vedere disegno per individui 1 e 2)



2) E' possibile che un progetto venga prescelto con voto a maggioranza? Se si, quale? Se no, perché?
Risposta: C vince in ciascun voto a coppie, per cui c'è un risultato di maggioranza stabile, nonostante il fatto che gli individui 1, 2, e 3 abbiano preferenze bimodali. Ciò dimostra che, sebbene le preferenze multimodali possano comportare delle incoerenze di voto, non sempre ciò si verifica.

***** ALTRI ESERCIZI *****

Esercizio 1
Consideriamo i seguenti benefici netti derivanti dall'adozione dei due progetti di legge, X e Y:

Elettore	Progetto X	Progetto Y
A	6	-3
B	-1	5
C	-2	-3

→ +3
→ +4
→ -5
+2

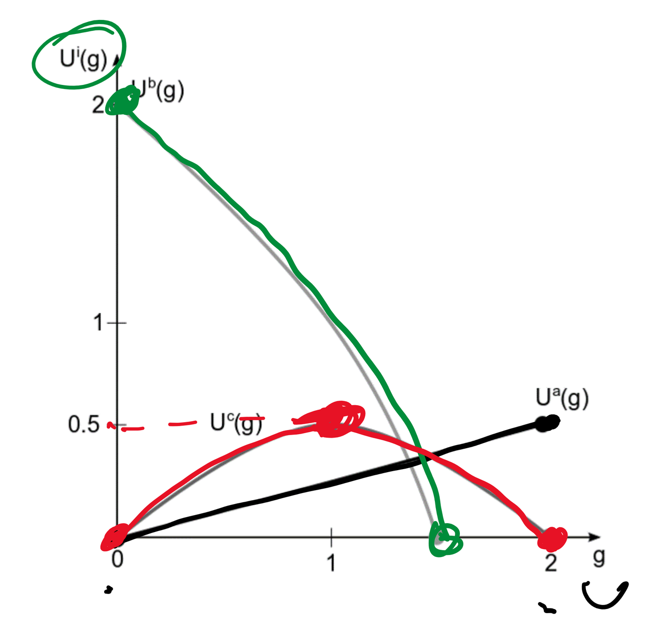
1) Si identifichi l'opportunità di scambio di voti presente in questa situazione.
Risposta: Da soli, né il progetto X né quello Y passeranno. Entrambi saranno sconfitti 2-1. Se la persona A scambia il voto con B entrambi i progetti passeranno con 2-1 voti.

2) Si identifichino i potenziali guadagni per gli elettori.
Risposta: Con entrambi i progetti approvati, l'utilità complessiva della persona A è 3. Per la persona B l'utilità complessiva è 4. Per la persona C l'utilità complessiva è -5.

3) Si spieghi perché lo scambio dei voti aumenta l'efficienza.
Risposta: Con l'approvazione del progetto X la società ne ha beneficiato, perché ha un beneficio totale di 3. Lo scambio dei voti ha permesso anche l'approvazione del progetto Y, sebbene non dovrebbe avere alcun beneficio totale per la società dato che è -1.

Esercizio 2 (Elettore mediano - preferenze differenti)
Abbiamo 3 consumatori la cui funzione di utilità dipende da G, una quantità di bene pubblico. Quest'economia può produrre una quantità di bene pubblico compresa fra 0 e 2.
Il primo individuo ha funzione di utilità: $U_a = \frac{G}{4}$
Il secondo: $U_b = 2 - G^2$
Il terzo individuo invece: $U_c = G - \frac{G^2}{2}$ $= 2 - \frac{2^2}{2} = 0$; $U_c(1) = 1 - \frac{1^2}{2} = .5$

1) Disegnare le preferenze dei 3 consumatori. Sono unimodali o multimodali?
Risposta: vedere disegno. U_a, sempre crescente, U_b sempre decrescente, U_c, prima crescente poi decrescente. Sono tutte unimodali (single-peaked).

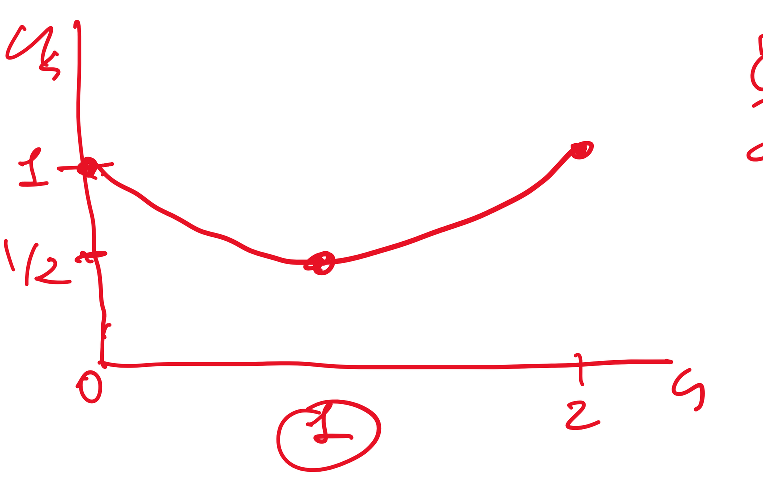


$U_a = \frac{G}{4}$; $\hat{U}_a$; $G = 2$

$U_B = 2 - G^2$; $\hat{U}_B$; $G = 0$

U_c ; $\frac{\partial U_c}{\partial G} = 1 - G = 0$
$G = 1$

2) Qual è l'outcome di questa elezione? Si può applicare il teorema dell'elettore mediano?
Risposta: Le tre preferenze sono single-peaked quindi si può applicare il teorema elettore mediano. Per trovare quale è l'outcome scelto bisogna trovare quali sono le policy ottime scelte dai 3 consumatori.
Quindi, prima bisogna derivare il punto ottimale di G per i tre elettori, che si ottiene massimizzando le utilità rispetto a G.
Per A si ha: $\frac{\partial U_a}{\partial G} = \frac{1}{4}$
Siccome la derivata prima è strettamente crescente l'individuo A vorrà il massimo ottenibile nell'economia. A voterà per G=2.



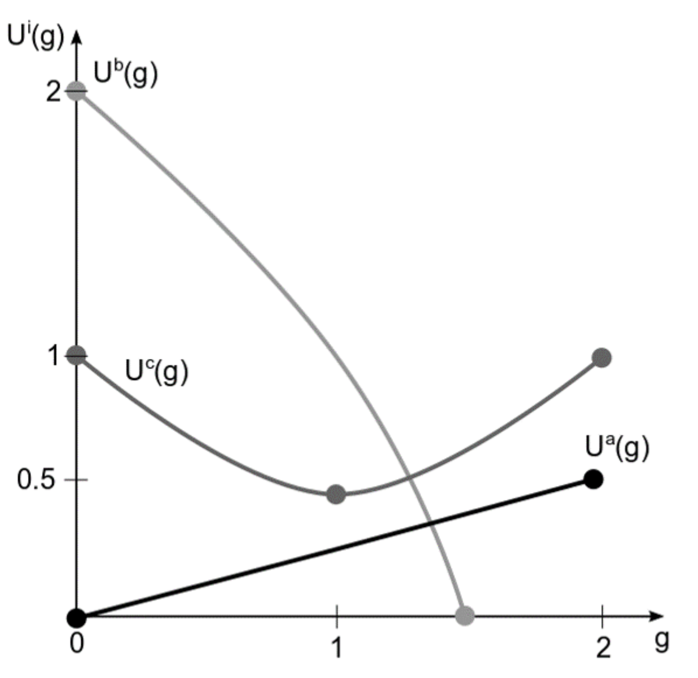
$\frac{\partial U_a}{\partial G} = \frac{2G}{2} - 1$
$= G - 1$
$G < 1$
$G = 1$

Il punto ottimo di B è dato da:
$\frac{\partial U_b}{\partial G} = -2G = 0 \Rightarrow G_b = 0$
Quindi il consumatore b voterà per G=0.

Per C si ha:
$\frac{\partial U_c}{\partial G} = 1 - G = 0 \Rightarrow G_c = 1$
C voterà per G=1.

L'opzione vincitrice sarà G=1, che batte le altre due opzioni in voto di maggioranza. Questa opzione è anche quella dell'elettore mediano. Infatti le tre preferenze sono:
$G_a^* = 2, G_b^* = 0, G_c^* = 1$ ed il valore $G_m^* = G_c^* = 1$

1) Cosa succederebbe se le preferenze dell'agente C fossero $\boxed{U_c = 1 + \frac{G^2}{2} - G}$
Risposta: Le preferenze di C non sono più unimodali (single-peaked) ma bimodali (double-peaked). In particolare ora le preferenze di C hanno due massimi, uno quando $g = 0$, in $U_c(0) = 1$, e uno in cui $g = 2, U_c(2) = 1$, ed un minimo nel valore $g = 1, U_c(1) = \frac{1}{2}$. Vedere disegno.



Quindi l'agente C ora preferirà votare o $g_C^* = 0$ *oppure* $g_C^* = 2$. In questo caso, non si può applicare il teorema del median voter ed infatti il risultato delle elezioni a maggioranza dipende dall'ordine delle votazione. Se si mette ai voti la politica $g = 0$, vincerà a maggioranza perché sarà votata da C e da B, se si mette ai voti la politica $g = 2$, vincerà perché votata da C e da A.

Esercizio 3 (Elettore mediano - redditi differenti)
Si immagini di avere 3 consumatori (a, b, c) con stesse preferenze per un bene privato c ed uno pubblico g, date da

$$U^i(c_i, g) = c_i + \ln g$$

Il bene pubblico è finanziato da una tassa sul reddito (prossime lezioni) pari a τ:

$$g = \tau y_i$$

Il vincolo di bilancio di ogni consumatore è:

$$c + g = y_i \Rightarrow c_i = (1 - \tau)y_i$$

Si assuma che il governo fissi la tassa in modo che il bilancio sia in equilibrio, cioè

$$g = \tau\, \bar{y}$$

dove $\bar{y}$ è il reddito medio dei consumatori.

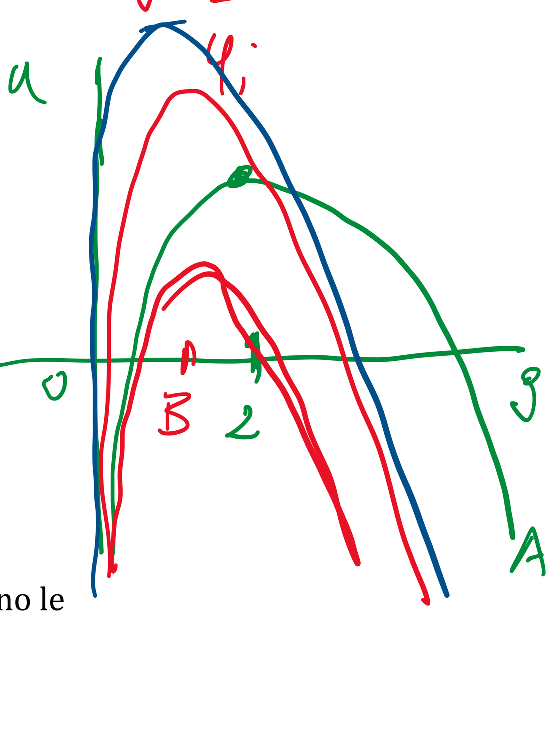
$U_i' > 0 \Rightarrow$
$\frac{1}{g} > \frac{y_i}{\bar{y}} \Rightarrow$
$\frac{\bar{y}}{y_i} > g \Rightarrow g < \bar{y}$

Quindi le preferenze di ogni consumatore possono essere riscritte come

$$U^i(c_i, g) = (1 - \tau)y_i + \ln g = \left(1 - \frac{g}{\bar{y}}\right)y_i + \ln g \Rightarrow$$

$$\boxed{U^i = (\bar{y} - g)\frac{y_i}{\bar{y}} + \ln g} \Rightarrow \frac{\partial U^i}{\partial g} = -\frac{y_i}{\bar{y}} + \frac{1}{g}$$

Si assuma che i redditi dei tre consumatori siano $y_a = 10, y_b = 15, y_c = 35$.



1) Verificare che le preferenze sono single-peaked.
Risposta: facendo la derivata di U rispetto a g
$\frac{\partial U^i}{\partial g} = -\frac{y_i}{\bar{y}} + \frac{1}{g} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial g} > 0$ *se* $g < \frac{\bar{y}}{y_i}$ e viceversa. Quindi le preferenze sono unimodali.
Disegnarle.

2) Quale è il livello massimo di spesa pubblica preferito da ogni consumatore
Risposta:
$\frac{\partial U^i}{\partial g} = -\frac{y_i}{\bar{y}} + \frac{1}{g} = 0 \Rightarrow g_i^* = \frac{\bar{y}}{y_i}$ $\bar{y} = 20$;

3) Quale è il livello di spesa pubblica (tassa) votato dai cittadini?
Risposta: dati i redditi dei 3 cittadini, il reddito medio è $\bar{y} = 20$, quindi si ha che i 3 hanno le seguenti preferenze per g:

$g_a^* = \frac{20}{10} = 2, g_b^* = \frac{20}{15} = 1.33, g_c^* = \frac{20}{35} = 0.57.$

Il risultato elettorale implica che sarà scelto il livello di spesa pubblica mediano g=1.33 corrispondente a quella scelta dall'elettore con il reddito mediano y=15.
Nota elettore mediano ha reddito minore del reddito medio.

$\tau = \frac{g}{\bar{y}} = \frac{1.33}{20} =$

4) Quanto paga ogni cittadino?
L'aliquota $\tau = \frac{g}{\bar{y}} = \frac{1.33}{20} = 0.0665 = 6.65\%$. Quindi
a paga $\tau y_a = 0.065 * 10 = 0.665$; b paga $\tau y_b = 0.065 * 15 = 0.9975$, c paga $\tau y_c = 0.065 * 35 = 2.3275$.
Infatti $\tau(y_a + y_b + y_c) = 0.065 * 60 = 3.99 = G^{TOT} \Rightarrow g = \frac{G^{TOT}}{3} = 1.33$

5) Cosa succede se i redditi dei cittadini sono $y_a = 10, y_b = 22, y_c = 28$?
Risposta: il reddito medio resta pari a 20 ma il reddito mediano (22) ora è maggiore di quello medio. Ovvero, cambia la distribuzione del reddito tra i cittadini, con la maggioranza di cittadini con un reddito maggiore di quello medio. Come risultato si ha che ora la scelta ottima del bene pubblico sarà usando passaggi in (2) e in (3):
$g_a^* = \frac{20}{10} = 2, g_b^* = \frac{20}{22} = 0.91, g_c^* = \frac{20}{28} = 0.71$. In questo caso, il livello di bene pubblico votato sarà sempre quello mediano ma sarà più basso e pari a $g_b^* = 0.91$.
L'aliquota in questo caso sarà pari $\tau = 0.045 = 4.55\%$.