Le polizze tradizionali non rivalutabili

Dr. Salvatore Scognamiglio

Università degli Studi di Napoli "Parthenope"

Lezioni di Tecnica Attuariale delle Assicurazioni

La legge di equivalenza intertemporale finanziario-attuariale (1)

Nell'approccio attuariale tradizionale si considera una legge di equivalenza intertemporale basata su:

- una *legge esponenziale* con tasso annuo $i \geq 0$ fissato (tasso tecnico, ipotesi finanziaria);
- un modello probabilistico basato su un'unica *funzione di sopravvivenza* S fissata e usata per tutte le età e per tutte le date di valutazione (ipotesi demografica).

La coppia (i, S), che determina completamente la legge di equivalenza intertemporale, viene chiamata *base tecnica*.

La legge di equivalenza intertemporale finanziario-attuariale (2)

Fissata una base tecnica (i, S), un istante di valutazione t, un importo X_s pagabile in $s \geq t$ e legato alla durata della vita di un individuo, il *valore attuale attuariale* $V(t, X_s)$ è il valore in t di X_s calcolato secondo la base tecnica (i, S):

$$V(t, X_s) = \mathbb{E}_t(X_s)v^{s-t} \tag{1}$$

dove $v = (1+i)^{-1}$ è il fattore di sconto della legge esponenziale di tasso annuo i.

Osservazione: Utilizzando la defīnzione di base tecnica del I ordine, il valore $V(t, X_s)$ calcolato secondo (i, S) rappresenta il premio (unico) puro in t del contratto che paga X_s in s.
Se invece l'ipotesi demografica riflette le opinioni probabilistiche dell'assicuratore e la legge esponenziale di tasso annuo i è allineata con la legge di equivalenta finanziaria in vigore sul mercato al tempo t, il valore coincide con il premio (unico) equo.

Classificazione delle polizze

Fissata una base tecnica (i, S), si considera un individuo di età x anni che stipula una polizza al tempo $t = 0$, le polizze non rivalutabili possono essere classificate:

- in base alla tipologia di prestazioni:
  - prestazioni di capitale;
  - prestazioni di rendita vitalizia;
  - altre prestazioni;
- in base alla tipologia di premio:
  - premio unico;
  - premio annuo;
  - premio ricorrente.

Prestazioni di capitale: Capitale differito (1)

La prestazione di *capitale differito* (CD) con durata n anni prevede il pagamento di un capitale assicurato C dopo n anni, a condizione che l'assicurato sia in vita a quella data. La durata n viene chiamata anche *differimento*.
La prestazione aleatoria pagata dalla polizza al tempo n è quindi:

$$Y_n = \begin{cases} C & se \ T_x > n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

l'aleatorietà della prestazione riguarda il pagamento o meno della prestazione che, se verrà pagata, sarà comunque C.
Se si indica con $\mathbb{1}_{\{T_x>n\}}$ la funzione indicatrice dell'evento $\{T_x > n\}$, la prestazione contrattualmente prevista può essere scritta nella forma:

$$Y_n = C\mathbb{1}_{\{T_x>n\}}$$

e può essere pertanto vista come un contratto di tipo zero-coupon, con pagamento aleatorio.

Prestazioni di capitale: Capitale differito (2)

Nel modello tradizionale il valore all'emissione della prestazione risulta essere:

$$V(0,Y_n) = V(0, C\ \mathbb{1}_{\{T_x>n\}}) = C\ V(0,\mathbb{1}_{\{T_x>n\}}) = C\ \mathbb{E}_0(\mathbb{1}_{\{T_x>n\}})v^n =$$

$$C\ \mathbb{P}_0(T_x > n)v^n = C\,{}_np_x\,v^n$$

Viene spesso utilizzata la notazione:

$${}_nE_x = {}_np_x\,v^n \tag{2}$$

per indicare il valore di una prestazione di capitale differito unitario dopo n anni riferito ad una testa di età corrente x. In base a questa notazione si ha quindi

$$V(0,Y_n) = C\ {}_nE_x\,.$$

Prestazioni di capitale: Temporanea Caso Morte (1)

Una polizza *temporanea caso morte* (TCM) di durata n anni prevede il pagamento di un capitale assicurato C alla data del decesso dell'assicurato, qualora questo si verifichi entro n anni dalla stipula.
La prestazione assicurata è quindi prevista alla data T_x, può essere scritto nella forma:

$$Y_{T_x} = \begin{cases} C & se\ T_x \leq n, \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

ed è quindi caratterizzata da una data di pagamento aleatoria, oltre che dall'aleatorietà del pagamento stesso, che potrebbe non esserci se l'assicurato sarà in vita alla scadenza.

Tradizionalmente si assume per semplicità che il pagamento non avvenga alla data di decesso dell'assicurato, ma alla fine dell'anno di ricorrenza anniversaria nel quale il decesso si sia verificato.
Poichè si è posto a $t = 0$ la data di emissione della polizza, ciò significa che i pagamenti possano verificarsi solo a tempi interi e, poichè si può scomporre l'evento $\{T_x \leq n\}$ nell'unione disgiunta

$$\{T_x \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{k-1 < T_x \leq k\},$$

la prestazione contrattuale può essere descritta come un vettore di pagamenti aleatori $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ai tempi $\mathbf{t} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$

$$Y_k = \begin{cases} C & \textit{se } k-1 < T_x \leq k, \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} = C\mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}$$

Prestazioni di capitale: Temporanea Caso Morte (3)

Con questa semplificazione il valore alla stipula dello zero-coupon della scomposizione in scadenza in k è dato da:

$$V(0, Y_k) = V(0, C\ \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}) = C\ \ V(0, \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}) =$$

$$C\ \mathbb{P}_0(k-1 < T_x \leq k)v^k = C\,{}_{k-1|1}q_x\, v^k$$

il valore delle prestazioni complessivamente previste dalla polizza è quindi

$$V(0, \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{n} V(0, Y_k) = C \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1|1}q_x\, v^k$$

Viene spesso usata la notazione

$${}_nA_x = \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1|1}q_x\, v^k \tag{3}$$

per indicare il valore della prestazione temporanea caso morte con capitale assicurato unitario. Si noti inoltre che se $i = 0$ risulta ${}_nA_x = {}_nq_x$.

Prestazioni di capitale: Temporanea Caso Morte con Capitale Variabile

Una variante della TCM è la TCM con capitale assicurato variabile in modo prefissato. Per ogni anno k è definito contrattualmente uno specifico capitale assicurato C_k e la prestazione prevista per il tempo k è

$$Y_k = C_k \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}$$

il valore alla stipula della prestazione è quindi

$$V(0,\mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{n} C_{k\;k-1|1}q_x\, v^k$$

Un esempio tipico è quello di polizza con capitale assicurato decrescente linearamente: fissato il capitale assicurato C_1 si ha

$$C_2 = C_1 - \frac{1}{n}C_1 = \frac{n-1}{n}C_1,$$

$$C_3 = C_2 - \frac{1}{n}C_1 = \frac{n-2}{n}C_1,$$

$$\dots$$

$$C_n = C_{n-1} - \frac{1}{n}C_1 = \frac{1}{n}C_1.$$

Prestazioni di capitale: Temporanea Caso Morte con Capitale Decrescente

Un altro esempio tipico, diffuso soprattutto nelle compagnie di bancassicurazione, è quello dove il capitale assicurato decresce come il debito residuo di un mutuo sottoscritto dall'assicurato.

In questo caso, normalmente, il *beneficiario* della prestazione è il mutuante, che tipicamente impacchetta la polizza assieme al mutuo in un unico prodotto, per tutelarsi contro il rischio che la morte del mutuario possa interrompere all'ammortamento del debito.

Un polizza di vita intera (VI) è il caso limite della polizza temporanea caso morte, con durata $n = \omega_x$. L'aleatorietà del contratto riguarda quindi solo la data di pagamento; l'assicuratore dovrà comunque pagare, prima o poi, il capitale assicurato. Si possono ripetere tutte le considerazioni svolte per le TMC e la notazione in uso per il valore di una vita intera con capitale assicurato unitario è

$$A_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_{k-1|1}q_x \, v^k \tag{4}$$

Osservazione: Nel caso in cui $i = 0$ risulta

$$A_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_{k-1|1}q_x = 1 \tag{5}$$

e il valore della vita intera non dipende dall'ipotesi demografica e coincide con il capitale assicurato.

Prestazioni di capitale: Polizza Mista (1)

Una polizza mista di durata n anni paga il capitale assicurato C sia in caso di vita a scadenza che alla data del decesso, se questo avviene entro la scadenza. Può pertanto essere vista come un portafoglio di due polizze: un capitale differito e un temporanea caso morte con lo stesso capitale assicurato. Unendo i risultati ottenuti nelle sessioni dedicate alle due componenti possiamo descrivere le prestazioni della polizza mista come un vettore $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ai tempi $\mathbf{t} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$Y_k = \begin{cases} C \quad se \quad k-1 < T_x \leq k \; (prestazione\ caso\ morte\ in\ k) \\ C \quad se \quad k = n \ e \ T_x > n \; (prestazione\ caso\ vita\ a\ scadenza) \\ 0 \quad altrimenti. \end{cases}$$

Prestazioni di capitale: Polizza Mista (2)

il cui valore è la somma dei valori delle due componenti:

$$V(0, \mathbf{Y}) = C({}_nE_x + {}_nA_x)$$

Come nel caso della vita intera, anche nella polizza mista l'aleatorietà del contratto riguarda la data di pagamento della prestazione e non l'importo: l'assicurato ha la certezza di dover corrispondere la prestazione ma non se alla scadenza (caso vita) o prima (caso premorienza).

Osservazione: Nel caso di tasso tecnico nullo $i = 0$ si ha che

$$({}_nE_x + {}_nA_x) = 1$$

e il valore della mista non dipende dalla base demografica e coincide con il capitale assicurato.

Una variante della polizza mista è la polizza mista con capitale assicurato caso vita C^v diverso dal capitale assicurato caso morte C^m. Il vettore delle prestazioni contrattualmente previste per questa polizza é

$$Y_k = \begin{cases} C^m & se \quad k-1 < T_x \leq k \ (prestazione\ caso\ morte\ in\ k) \\ C^v & se \quad k = n\ e\ T_x > n\ (prestazione\ caso\ vita\ a\ scadenza) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

e il valore della polizza é

$$V(0, \mathbf{Y}) = C^v{}_n E_x + C^m{}_n A_x$$

Prestazioni di capitale: Contratto di Capitalizzazione

Un contratto di capitalizzazione di durata n prevede che al contraente venga pagato a scadenza un capitale C con certezza, indipendentemente quindi dalla durata della sua (o di altrui) vita. Tecnicamente non è quindi un contratto di assicurazione. Non lo è nemmeno giuridicamente, anche se la normativa lo prevede come una forma contrattuale che per essere commercializzata ha bisogno di un particolare autorizzazione, che è inclusa nella più restrittiva autorizzazione a vendere contratti di assicurazione del ramo vita.
Il valore della data di stipula del contratto è ovviamente:

$$V(0, C) = Cv^n.$$

La prestazione di una polizza a *termine fisso* è simile alla prestazione di una polizza mista, con l'unica differenza che la prestazione caso morte, anzichè essere pagata alla durata del decesso dell'assicurato, viene pagata alla scadenza n della polizza. Se facciamo riferimento ad una polizza con capitale assicurato C^v e capitale assicurato C^m, il contratto prevede un unica prestazione Y_n al tempo n, definita da:

$$Y_n = \begin{cases} C^m & se \;\; T_x \leq n \\ C^v & se \;\; T_x > n, \end{cases} \quad = C^v \mathbb{1}_{\{T_x > n\}} + C^m \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}}$$

Vi è quindi incertezza nell'importo della prestazione che però verrà corrisposta con certezza alla scadenza.
Poiche:

$$\mathbb{E}_0(\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}) = \mathbb{P}_0(T_x > n) = {}_np_x$$
$$\mathbb{E}_0(\mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}}) = \mathbb{P}_0(T_x \leq n) = {}_nq_x$$

il valore della prestazione è

$$V(0, Y_n) = C^v{}_np_x v^n + C^m{}_nq_x v^n.$$

Prestazioni di rendita vitalizia

Una *rendita vitalizia* è una prestazione che prevede il pagamento periodo di un importo monetario a patto che l'assicurato sia in vita; non è prevista nessuna prestazione in caso di decesso dell'assicurato. Nel seguito faremo riferimento soltanto al caso di periodicità annuale a rata costante R.
Una rendita vitalizia possono essere distinte in:

- **temporanea**, quando la prestazione si esaurisce dopo un certo numero di anni e **a vita intera** quando la prestazione copre l'intera vita residua,
- **anticipate**, quando ciascuna rata è pagata all'inizio dell'anno di riferimento, o **posticipate**, quando la rata è pagata a fine anno,
- **immediata** se inizia al momento della stipula, **differita** se inizia in un istante di tempo futuro.

Una **rendita vitalizia immediata posticipata** è un tipo di rendita che inizia all'istante $t = 0$ e prevede il pagamento delle rate alla fine di ogni periodo. Sia R la rata della rendita, risulta che per ogni $k > 0$:

$$Y_k = R \ \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \tag{6}$$

Il valore in $t = 0$ di ogni singola prestazione Y_k è

$$V(0, Y_k) = V(0, R\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}) = R \ V(0, \mathbb{1}_{\{T_x > k\}}) = R \ \mathbb{P}_0(T_x > k)v^k = R \, {}_k p_x \, v^k$$

mentre il valore alla stipula dell'intero contratto di rendita è quindi:

$$V(0, \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{\omega_x} V(0, Y_k) = \sum_{k=1}^{\omega_x} R \, {}_k p_x \, v^k = R \ a_x, \tag{7}$$

dove

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k \tag{8}$$

è il valore di una rendita vitalizia posticipata di rata unitaria.

Una **rendita vitalizia immediata anticipata** è un tipo di rendita che inizia all'istante $t = 0$ e prevede il pagamento delle rate all'inizio di ogni periodo. La prestazione al tempo $k > 0$ è ancora espressa dall'equazione (6) e si aggiunge una prestazione (certa) alla stipula $Y_0 = R$.
Il valore della rendita è:

$$V(0, \mathbf{Y}) = R\ddot{a}_x \tag{9}$$

dove

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega_x} {}_kp_x v^k = 1 + a_x \tag{10}$$

è il valore di una rendita vitalizia anticipata di rata unitaria.

Rendite differite

Se il contratto prevede che la rendita vitalizia sia erogata dopo un differimento di m anni si ha la prestazione di *rendita vitalizia differita*, che può essere anticipata o posticipata. Sono quindi presenti due fasi contrattuali: il *periodo di differimento*, durante il quale non vengono erogate prestazioni, e il *periodo di pagamento della rendita* che dal punto di vista dell'assicurato, è detto anche *periodo di godimento della rendita.* Se si pone

$$ {}_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k \tag{11} $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k = {}_m p_x \, v^m + {}_{m|}a_x = {}_m E_x + {}_{m|}a_x \tag{12} $$

il valore alla stipula delle varie tipologie di rendita vitalizia differita unitarie, il valore $V(0, \mathbf{Y})$ può essere calcolato moltiplicando per l'ammontare della rata R.

Altre Prestazioni

Oltre alle tipologie di prestazioni già discusse, le polizze vita presenti nella pratica commerciale italiana possono avere altre prestazioni, delle quali daremo solo alcuni cenni.

1. prestazioni complementari;
2. concessione di opzioni di riscatto;
3. concessione di opzioni di conversione;
4. concessione di opzioni di differimento;
5. polizze di rendite vitalizie riversibili.

Altre Prestazioni:prestazioni complementari

Spesso i prodotti assicurativi comprendono delle **prestazioni complementari** che coprono rischi non propriamente vita.
Tra questi ci sono:

- prestazioni complementari in caso di eventi legati alla *salute dell'assicurato* quali, ad esempio la sopraggiunta invalidità permanente o la perdta dell'autosufficienza;
- assicurazioni complementari per *morte accidentale* (ACMA) e da *incidente stradale* (ACMAIS); un esempio diffuso è la polizza mista con ACMAIS dove la prestazione caso morte viene raddoppata in caso di morte accientale e triplicata nel caso la morte accidentale sia dovuta a cause legate alla circolazione di autoveicoli;
- prestazioni legate al *rendimento scolastico dell'assicurato*, come nel caso della mista con bonus scolastico, dove la prestazione caso vita è indicizzata al volo di maturità dell'assicurato.

Altre Prestazioni:concessione di opzioni di riscatto

Normalmente all'assicurato viene data la facoltà di riscattare il contratto, risolvendolo e incassando anticipatamente la prestazione, che viene però abbattuta di una *penale di riscatto*. Da un punto di vista teorico si tratta di un' *opzione americana* con sottostante la prestazione stessa, anche se nella pratica non viene valutata come tale: l'esperienza mostra che non è possibile fare l'ipotesi che l'assicurato eserciterà razionalmente ma sarà piuttosto condizionato da esigenze indotte alle sue scelte di consumo.

Nelle polizze che prevedono una prestazione in caso di vita a scadenza è spesso incorporata l'opzione di poter convertire l'importo della prestazione a scadenza in una rendita vitalizia, a condizioni contrattualmente stabilite alla data di stipula del contratto (*opzione di conversione in rendita*). Simmetricamente, nelle polizze di rendita differita, è normalmente concessa all'assicurato l'opzione, da esercitarsi al termine del differimento, di convertire la rendita di un capitale immediatamente esigibile e contrattualmente fissato alla stipula del contratto (*opzione di conversione in capitale*). Come nel caso dell'opzione di riscatto, la valutazione di queste opzioni non può essere condotta in ipotesi di esercizio razionale.

Altre Prestazioni:concessione di differimento

Un'altro opzione spesso inserita nei contratti che prevedono prestazioni in caso di vita a scadenza è il *differimento automatico di scadenza* (DAS). Anche questa è un'opzione che l'assicurato può esercitare in caso di vita alla scadenza contrattuale e prevede che la prosecuzione del contratto alle stesse condizioni, tacitamente rinnovabile di anno in anno finchè l'assicurato non decida di incassare la prestazione.

Hanno una certa diffusione le polizze di *rendita vitalizia reversibile*, immediate o differite. Sono polizze in cui vi sono più assicurati (solitamente due) e la rendita vitalizia che viene pagata al primo assicurato è reversibile (in tutto o in parte) al secondo, se sarà in vita al decesso del primo. Si tratta pertanto di una polizza che è legata alle durate della vita in più teste.

Premio Unico (1)

In una polizza a premio unico l'assicurato corrisponde all'assicuratore all'atto della stipula un premio in cambio delle prestazioni che percepirà nei tempi e nei modi previsti dalla tipologia contrattuale. E' importante ricordare che il premio unico praticato dall'assicuratore, detto *premio di tariffa*, non può essere inferiore al premio unico puro, che già comprende il caricamento di sicurezza (*caricamento implicito*).
Normalmente è strettamente maggiore e la maggiorazione rispetto al premio puro è il *caricamento esplicito*.

Se si fissa, al tempo zero di stipula una base tecnica del primo ordine (i, S), un flusso di prestazioni $\mathbf{Y}$ e l'età dell'assicurato x e si indica con U il premio unico e con T il premio unico di tariffa, dovrà risultare che:

$$T \geq U = V(0, \mathbf{Y})$$

e il caricamento esplicito (*o caricamento totale*) è:

$$H = T - U \geq 0$$

Premio Unico (2)

Spesso si percentualizza il caricamento H rispetto al premio di tariffa T, ottenendo il *tasso di caricamento*:

$$h = \frac{H}{T}$$

che risulta ovviamente non negativo e minore di 1. Il premio unico di tariffa è allora dato da:

$$T = U + hT$$

cioè da:

$$T = \frac{U}{1 - h} \tag{13}$$

Nella pratica assicurativa il caricamento esplicito H è chiamato *caricamento per spese*. L'idea è che l'assicuratore deve caricare il premio con il caricamento H per recuperare le spese che subisce durante la vita del contratto. La terminologia incorpora però spesso una certa dose di "ipocrisia", in quanto il caricamento H viene spesso calibrato in modo sovrabbondante, almeno nelle intenzioni dell'assicuratore, rispetto alle spese previste e incorpora quindi una parte di utile.

Caricamento esplicito

Tradizionalmente il caricamento totale viene scomposto in tre componenti non negative:

$$H = G + A + I \tag{14}$$

dove:

- G è la componente che compensa le *spese di gestione della polizza*: sono le spese che l'assicuratore subisce negli anni di durata del contratto per la gestione amministrativa della polizza;
- A le *spese di acquisizione*: sono la provvigione che l'assicuratore versa all'agente che ha procurato il contratto;
- I le *spese di incasso* del premio che coprono le spese sostenute dalla rete di vendita per l'incasso del premio.

Premio Unico (3): Esempio

ESEMPIO 1. In un contratto di capitalizzazione con capitale a scadenza C e durata n il premio unico puro è $U = Cv^n$.
Equivalentemente il capitale a scadenza è $C = U(1+i)^n$ e da quest'ultima relazione deriva il nome della forma contrattuale: la prestazione a scadenza è il premio unico puro capitalizzato.

ESEMPIO 2. In una polizza di capitale differito con capitale assicurato C, durata n ed età dell'assicurato x il premio unico puro è $U = C\,{}_nE_x$.

Premio Annuo (1)

Il contratto può prevedere che il premio, anzichè essere versato in unica soluzione alla stipula del contratto, possa essere rateizzato in rate annuali anticipate, il cui pagamento è subordinato all'essere in vita dell'assicurato. In una *polizza a premio annuo* quindi, l'assicurato scambia una rendita vitalizia anticipata con le prestazioni previste dalla forma contrattuale e che sono a carico dell'assicuratore, normalmente il premio annuo è costante e nel seguito faremo riferimento solo a questo caso.
La rendita vitalizia dei premi è inoltre normalmente temporanea, con durata coincidente con la durata del contratto, possono aversi tuttavia casi di durata del pagamento dei premi è minore della durata contrattuale e questa capita tipicamente nella vita intera.

Premio Annuo (2)

Si assume fissata la base tecnica del I ordine (i, S), il flusso $\mathbf{Y}$ delle prestazioni e l'età x dell'assicurato al tempo zero di stipula. In riferimento al caso di premio annuo costante e durata pagamento premi n, l'importo X_k che l'assicurato deve corrispondere all'assicurazione al tempo $k \geq 0$ è:

$$X_k = \begin{cases} P \ \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} & se \ k < n \\ 0 & se \ k \geq n \end{cases} \tag{15}$$

dove P è il livello costante del premio annuo. Lo scambio del flusso $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ dei premi con il flusso $\mathbf{Y}$ delle prestazioni è in equilibrio attuariale se e solo se:

$$V(0, \mathbf{X}) = V(0, \mathbf{Y}) \tag{16}$$

Poichè $V(0, \mathbf{Y}) = U$ e $V(0, \mathbf{X}) = P_n\ddot{a}_x$, la condizione di equilibrio diventa:

$$P = \frac{U}{{}_n\ddot{a}_x} \tag{17}$$

che è la formula di rateizzazione del premio unico U in n annualità vitalizie anticipate di importo P.

Premio Annuo (3)

Il premio annuo calcolato in base alla (17) è naturalmente il *premio annuo puro*. Come nelle polizze a premio unico, il premio annuo effettivamente corrisposto dall'assicurato è il premio *annuo di tariffa* Π, ottenuto aggiugendo al premio annuo puro il caricamento per spese. Indicando nuovamente il tasso di caricamento totale con h, il premio annuo di tariffa risulta:

$$\Pi = \frac{P}{1-h} \tag{18}$$

che considerando le equazioni (13) e (18) può essere definito come:

$$\Pi = \frac{T}{{}_{n}\ddot{a}_{x}} \tag{19}$$

Premio Annuo (4)

Nelle polizze a premio annuo l'assicurato ha tipicamente la facoltà di *riduzione della polizza*, che è un opzione di trasformazione del contratto da premio annuo a premio unico: l'assicurato che si avvale di questa facoltà interrompe il versamento dei premi, l'assicuratore riduce conseguentemente le prestazioni e la polizza prosegue come se fosse stata originariamente stipulata a premio unico e con le prestazioni ridotte.

Anche nelle polizze a premio annuo il caricamento totale $H = \Pi - P$ che grava sul premio annuo è la somma delle tre componenti imputabili alle spese di gestione, di acquisizione e di incasso.

Tutte le forme contrattuali presenti nella pratica possono essere a premio unico o a premio annuo, con l'eccezione della capitalizzazione, per le quali il caso a premio annuo non è previsto.

Premio Ricorrente (1)

In una polizza a premio annuo l'assicuratore costituisce l'intero capitale assicurato alla stipula del contratto, nonostante l'assicurato versi a quella data solo la prima annualità di premio. In una polizza a *premio unico ricorrente*, invece il capitale assicurato si costituisce progressivamente con il versamento dei premi.

Lo schema contrattuale prevede il versamento di una succesione di un certo numero di premi anticipati, ciascuno dei quali attiva una linea di assicurazione con un suo capitale assicurato. Il modo più semplice di considerare una polizza a premio unico ricorrente è pertanto quello di vederla come un portafoglio di *polizze a premio unico* della stessa tipologia, con la prima a pronti e le altre a termine.

Premio Ricorrente (2)

Siano $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-1}$ gli n premi unici ricorrenti di tariffa previsti dal contratto, pagabili rispettivamente ai tempi $0, 1, \ldots, n-1$.
Sia h_g il tasso di caricamento totale del premio Π_g. Se $\mathbf{Y}_g$ è il vettore di prestazione della g-esima linea, attivato con il versamento del g-esimo premio, allora per ogni g il premio unico ricorrente puro è:

$$\Pi_g(1 - h_g) = P_g = V(g, \mathbf{Y}_g)$$

Nella pratica assicurativa, per semplicità contrattuale, il premio unico ricorrente di tariffa è normalmente costante.

Premio Ricorrente (3)

Un contratto di capitalizzazione a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata di n anni, prevede il versamento di n premi ai tempi $0, 1, \ldots, n-1$. Alla stipula si ha il versamento del primo premio, cui corrisponde il premio puro:

$$P = \Pi(1-h) \tag{20}$$

e il capitale a scadenza

$$C_{0,n} = P(1+i)^n = \Pi(1-h)(1+i)^n \tag{21}$$

Con il versamento del secondo premio al tempo 1 si attiva la seconda linea, che ha lo stesso premio puro e capitale a scadenza:

$$C_{1,n} = P(1+i)^{n-1} = \Pi(1-h)(1+i)^{n-1} \tag{22}$$

Premio Ricorrente (4)

Generalizzando per ogni $g < n$ si attiva una linea con capitale a scadenza:

$$C_{g,n} = P(1+i)^{n-g} = \Pi(1-h)(1+i)^{n-g} \tag{23}$$

Alla scadenza contrattuale la prestazione complessiva è la somma delle prestazioni attivate con ciascuna linea:

$$\sum_{g=0}^{n-1} C_{g,n} = \Pi(1-h)\sum_{g=0}^{n-1}(1+i)^{n-g}$$

$$= \Pi(1-h)(1+i)^n \sum_{g=0}^{n-1}(1+i)^{-g} = \Pi(1-h)\frac{(1+i)^n - 1}{1-v}$$

Si osservi che il premio puro è costante ma, se $i > 0$, il capitale a scadenza attivato è decrescente con g.