

# Le operazioni di Assicurazione e la Teoria dell'utilità

Dr. Salvatore Scognamiglio

Università degli Studi di Napoli "Parthenope"

Lezioni di tecniche attuariali per le assicurazioni

Nella sua forma più elementare, un contratto di assicurazione è un accordo fra due parti, nel quale *l'assicurato* trasferisce *all'assicuratore* un danno aleatorio che può verificarsi in futuro, in cambio di un premio che paga alla data di stipula.

Il **premio** è il prezzo che l'assicurato paga per l'eliminazione del rischio che si verifichi il danno.

In questa sede converrà considerare solo il caso uniperiodale, con alcune ipotesi semplificatrici. L'analisi verrà condotta inoltre solo dal punto di vista dell'assicuratore.

Si assuma pertanto che:

- a) il contratto abbia inizio al tempo  $t = 0$ , con il pagamento del premio  $P \in \mathbb{R}^+$ , e termine al tempo  $s = 1$  con il rimborso del danno,
- b) l'assicuratore:
  - 1) abbia un capitale proprio certo  $c > 0$ ;
  - 2) effettui le proprie scelte in modo razionale, in base ad una funzione di utilità (crescente e concava);
  - 3) attribuisca probabilità agli eventi secondo la distribuzione di probabilità  $\mathbb{P}$ ;
  - 4) non abbia altri contratti assicurativi in corso;
  - 5) investa sul mercato dei capitali nel periodo  $[t, s]$  con rendimento certo  $i$ ;
- c) il danno sia una variabile aleatoria, le cui determinazioni si misurano in unità monetarie e si assume che:

$$\mathbb{P}_t(D \geq 0) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_t(D > 0) > 0 \quad (1)$$

dove il suffisso  $t$  ad  $\mathbb{P}$  indica il condizionamento all'informazione disponibile alla data  $t$ ;

- d) il mercato finanziario sia *perfetto* e, in particolare, privo di opportunità di arbitraggi non rischiosi (ipotesi di assenza di arbitraggio).

Prima della stipula del contratto, l'assicuratore ha una posizione patrimoniale netta che al tempo  $s$  avrà valore:

$$X = c(1 + i)$$

che è una quantità deterministica.

Stipulando il contratto di assicurazione la posizione netta in  $s$  cambia e diventa:

$$Y = (c + P)(1 + i) - D$$

che è soggetta al **rischio tecnico**, indotto dall'aleatorietà del danno.

## La Condizione d'indifferenza (1)

Dal punto di vista dell'assicuratore, quindi, l'operazione di assicurazione consiste nello scambiare la posizione futura  $X$  con la posizione futura  $Y$ .

La condizione di *indifferenza* dello scambio è che risulti:

$$\mathbb{E}_t[u(Y)] = \mathbb{E}_t[u(X)], \quad (2)$$

cioè che:

$$\mathbb{E}_t[u((c + P)(1 + i) - D)] = \mathbb{E}_t[u(c(1 + i))]$$

dove  $\mathbb{E}_t$  è l'aspettativa condizionata all'informazione disponibile al termine del periodo  $t$  e calcolata secondo la probabilità  $\mathbb{P}$ . In realtà, siccome la posizione  $X$  è stato supposto essere deterministica:

$$\mathbb{E}_t[u((c + P)(1 + i) - D)] = u(c(1 + i)) \quad (3)$$

L'equazione (3) significa che lo scambio del premio  $P$  (certo) al tempo  $t$  contro il danno  $D$  (aleatorio) al tempo  $s$  non provoca variazioni della posizione finanziaria netta dell'assicuratore in  $s$  dal punto di vista dell'utilità attesa in  $t$ .

Naturalmente nel caso nell'eq. (2):

- se vale la disuguaglianza " $>$ ", l'assicuratore "percepirà" vantaggiosa l'operazione di assicurazione, perchè ne deriva un incremento dell'utilità attesa,
- mentre se dovesse risultare " $<$ " la "percepirà" svantaggiosa l'operazione di assicurazione, perchè ne deriva una riduzione dell'utilità attesa.

La condizione d'indifferenza è strutturalmente diversa dalla condizione di *equità* che invece implica che:

$$\mathbb{E}_t[Y] = \mathbb{E}_t[X] \quad (4)$$

ma visto che  $X$  è deterministico:

$$\mathbb{E}_t[Y] = c(1 + i) \quad (5)$$

Si indicherà con  $P$  il premio che soddisfa la condizione d'indifferenza:

$$\mathbb{E}_t[u((c + P)(1 + i) - D)] = \mathbb{E}_t[u(c(1 + i))] \quad (6)$$

Mentre con  $E$  si indicherà il premio che soddisfa la condizione di equità:

$$\mathbb{E}_t[(c + E)(1 + i) - D] = c(1 + i) \quad (7)$$

che equivale alla:

$$E = \frac{\mathbb{E}_t(D)}{1 + i} \quad (8)$$

E' facile verificare che per l'assicuratore, la condizione di indifferenza è più forte della condizione di equità, nel senso che un contratto equo è svantaggioso.



Se infatti vale la condizione di equità:

$$u(\mathbb{E}_t[(c + E)(1 + i) - D]) = u(c(1 + i)) \quad (9)$$

e per la disuguaglianza di Jensen si ha che:

$$\mathbb{E}_t[u((c + E)(1 + i) - D)] < u(\mathbb{E}_t[(c + E)(1 + i) - D]) \quad (10)$$

e quindi si può concludere che:

$$\mathbb{E}_t[u((c + E)(1 + i) - D)] < u(c(1 + i)) \quad (11)$$

cioè che la condizione di equità comporta la svantaggiosità per l'assicuratore. In altri termini, l'assicuratore che praticasse il premio equo  $E$  proporrebbe al pubblico un contratto per lui svantaggioso, cioè venderebbe "sotto costo".

Fissato un danno  $D \in \mathbb{R}^+$  la condizione d'indifferenza può essere utilizzata per determinare il *premio di indifferenza*  $P$ , cioè il premio che rende l'operazione indifferente per l'assicuratore.

Mentre si è già osservato che il premio equo  $E$ , che soddisfa la condizione di equità renderebbe svantaggiosa l'operazione per l'assicuratore, quindi il premio di indifferenza, detto anche *premio puro* deve essere maggiore del premio equo:

$$E < P$$

e si può quindi definire la differenza:

$$L = P - E$$

come il caricamento di sicurezza. Esso quantifica in unità monetarie al tempo  $t$  l'avversione dell'assicuratore al rischio insito nell'operazione di assicurazione del danno  $D$ .

La terminologia deriva dal fatto, già richiamato, che l'assicuratore non può praticare premi equi, altrimenti fallirebbe: deve quindi essere *prudente*, caricando i premi con il caricamento di sicurezza.

Il caricamento di sicurezza si esprime spesso in percentuale del premio puro, come *tasso di caricamento di sicurezza*:

$$I = \frac{L}{P}$$

Il caricamento di sicurezza è un caricamento *implicito*, che l'assicuratore non è tenuto a dichiarare all'assicurato, diversamente dal *caricamento per spese*, che invece, nei rami vita, normalmente deve essere esplicitato in polizza.

si assuma che il danno  $D$  possa assumere una sola determinazione positiva  $d > 0$  con probabilità positiva  $p > 0$  e che sia quindi nullo con probabilità  $(1 - p)$ .

In questo caso il premio equo  $E$  può essere ricavato dalla condizione di equità:

$$p[(c + E)(1 + i) - d] + (1 - p)(c + E)(1 + i) = c(1 + i)$$

che, semplificando e ponendo  $v = (1 + i)^{-1}$ , è equivalente a:

$$E = pdv. \tag{12}$$

Invece il premio puro  $P$  si calcola a partire dalla condizione di indifferenza e richiede la specificazione della funzione di utilità  $u(x)$ .

ESEMPIO: Si consideri un'assicurazione in cui il danno può avere un'unica realizzazione  $d = 100$  con una probabilità di  $p = 0.05$ , un tasso d'interesse  $i = 0.05$  e un capitale iniziale  $c = 1000$ . La funzione di utilità è di tipo esponenziale:

$$u(x) = -e^{-rx} \quad r = 0.001.$$

Determinare:

- Premio Equo  $E$ ;
- Premio Puro  $P$ ;
- Caricamento di sicurezza  $L$  e tasso di caricamento di sicurezza.

## Esempio Numerico (2)

Il premio Equo è ricavato a partire dalla condizione di equità e in questo caso è uguale:

$$E = pdv$$

Il premio Puro è ricavato a partire dalla condizione di indifferenza che in questo caso diventa:

$$-pe^{-r((c+P)(1+i)-d)} - (1-p)e^{-r(c+P)(1+i)} = -e^{-rc(1+i)}$$

che deve essere risolta rispetto a  $P$ . In altre parole si cerca lo zero della funzione:

$$f(P) = -pe^{-r((c+P)(1+i)-d)} - (1-p)e^{-r(c+P)(1+i)} + e^{-rc(1+i)} = 0$$

che con semplici passaggi, si risolve con:

$$P = \frac{1}{r} \log[pe^{rd} + (1-p)]v \quad (13)$$

## Esempio Numerico (2)

Il premio Equo è ricavato a partire dalla condizione di equità e in questo caso è uguale:

$$E = pdv$$

Il premio Puro è ricavato a partire dalla condizione di indifferenza che in questo caso diventa:

$$-pe^{-r((c+P)(1+i)-d)} - (1-p)e^{-r(c+P)(1+i)} = -e^{-rc(1+i)}$$

che deve essere risolta rispetto a  $P$ . In altre parole si cerca lo zero della funzione:

$$f(P) = -pe^{-r((c+P)(1+i)-d)} - (1-p)e^{-r(c+P)(1+i)} + e^{-rc(1+i)} = 0$$

che con semplici passaggi, si risolve con:

$$P = \frac{1}{r} \log[pe^{rd} + (1-p)]v \quad (13)$$

## Esempio Numerico (3)

Utilizzando i dati assegnati è possibile determinare il premio equo  $E$ :

$$E = pdv = 0.05 \cdot 100 \cdot (1 + 0.05)^{-1} = 4.761905,$$

e il premio puro  $P$ :

$$P = \frac{1}{r} \cdot \log[pe^{rd} + (1 - p)]v = 1000 \cdot \frac{\log(0.05 \cdot e^{\frac{100}{1000}} + 0.95)}{1.05} = 4.995017,$$

il caricamento di sicurezza ed il relativo tasso risultano:

$$L = P - E = 4.995017 - 4.761905 = 0.233112,$$

$$I = L/P = \frac{0.233112}{4.995017} = 4.67\%.$$



## Esempio Numerico (4)

e se il danno fosse diverso? Calcolare le stesse grandezze per  $d \in \{50, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$ .

Table: Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità esponenziale

d	E	P	L	I(%)
50	2.380952	2.438357	0.057404	2.35%
100	4.761905	4.995017	0.233112	4.67%
150	7.142857	7.675381	0.532524	6.94%
200	9.523810	10.485059	0.961250	9.17%
250	11.904762	13.429883	1.525121	11.36%
300	14.285714	16.515905	2.230191	13.50%
400	19.047619	23.136893	4.089274	17.67%
500	23.809524	30.401067	6.591543	21.68%
600	28.571429	38.365288	9.793859	25.53%
700	33.333333	47.090324	13.756991	29.21%
800	38.095238	56.640899	18.545661	32.74%
900	42.857143	67.085685	24.228542	36.12%

## Esempio Numerico (4)

e se il danno fosse diverso? Calcolare le stesse grandezze per  $d \in \{50, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$ .

**Table:** Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità esponenziale

d	E	P	L	I(%)
50	2.380952	2.438357	0.057404	2.35%
100	4.761905	4.995017	0.233112	4.67%
150	7.142857	7.675381	0.532524	6.94%
200	9.523810	10.485059	0.961250	9.17%
250	11.904762	13.429883	1.525121	11.36%
300	14.285714	16.515905	2.230191	13.50%
400	19.047619	23.136893	4.089274	17.67%
500	23.809524	30.401067	6.591543	21.68%
600	28.571429	38.365288	9.793859	25.53%
700	33.333333	47.090324	13.756991	29.21%
800	38.095238	56.640899	18.545661	32.74%
900	42.857143	67.085685	24.228542	36.12%

## Esempio Numerico (5)

e se il coefficiente di avversione (assoluta)  $B = 1/r$  al rischio fosse diverso?  
Calcolare le stesse grandezze per  
 $B \in \{500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500\}$

Table: Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità esponenziale

B	E	P	L	I(%)
500	4.761905	5.242530	0.480625	9.17%
750	4.761905	5.075880	0.313975	6.19%
1000	4.761905	4.995017	0.233112	4.67%
1250	4.761905	4.947270	0.185365	3.75%
1500	4.761905	4.915755	0.153850	3.13%
1750	4.761905	4.893398	0.131493	2.69%
2000	4.761905	4.876713	0.114809	2.35%
2500	4.761905	4.853475	0.091571	1.89%
3000	4.761905	4.838061	0.076156	1.57%
3500	4.761905	4.827088	0.065183	1.35%
4000	4.761905	4.818879	0.056974	1.18%
4500	4.761905	4.812506	0.050601	1.05%

## Esempio Numerico (5)

e se il coefficiente di avversione (assoluta)  $B = 1/r$  al rischio fosse diverso?  
Calcolare le stesse grandezze per  
 $B \in \{500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500\}$

**Table:** Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità esponenziale

B	E	P	L	I(%)
500	4.761905	5.242530	0.480625	9.17%
750	4.761905	5.075880	0.313975	6.19%
1000	4.761905	4.995017	0.233112	4.67%
1250	4.761905	4.947270	0.185365	3.75%
1500	4.761905	4.915755	0.153850	3.13%
1750	4.761905	4.893398	0.131493	2.69%
2000	4.761905	4.876713	0.114809	2.35%
2500	4.761905	4.853475	0.091571	1.89%
3000	4.761905	4.838061	0.076156	1.57%
3500	4.761905	4.827088	0.065183	1.35%
4000	4.761905	4.818879	0.056974	1.18%
4500	4.761905	4.812506	0.050601	1.05%

Per considerare la propria avversione al rischio l'assicuratore deve rinunciare alla semplicità di calcolo del premio equo. Anzi, spesso non ha a disposizione un'espressione in forma chiusa del premio puro ma deve calcolarlo per via numerica.

Per ovviare a questo inconveniente si ricorre spesso alla logica della *base tecnica del I ordine*, distorcendo la misura di probabilità e il tasso d'interesse per incorporarvi l'avversione al rischio dell'assicuratore. Formalmente, si definisce base tecnica del I ordine ogni coppia  $(\mathbb{P}^I, i^I)$  di misura di probabilità e tasso d'interesse tali che il premio equo calcolato con  $(\mathbb{P}^I, i^I)$  risulti uguale al premio puro  $P$  cioè tale che:

$$\mathbb{E}_t^I(D)(1 + i^I)^{-1} = P = \mathbb{E}_t(D)(1 + i)^{-1} + L$$

avendo indicato con  $\mathbb{E}^I$  l'aspettativa calcolata con la misura di probabilità  $\mathbb{P}^I$ . Il caricamento di sicurezza viene quindi incorporato nell'aspettativa distorta e nello sconto ad un tasso modificato.

In generale la base tecnica del I ordine non è unica.

- Il tasso di interesse del I ordine  $i^I$ , detto anche tasso tecnico, è solitamente non negativo e minore-uguale al tasso di mercato  $i$ ;
- mentre la distribuzione di probabilità  $\mathbb{P}^I$  assegna probabilità maggiori di  $\mathbb{P}$  al verificarsi del danno  $D$ .

Per questo motivo la base tecnica del I ordine viene anche detta *base tecnica prudentiale*.

Si riprenda l'esempio numerico descritto in precedenza. Ogni base tecnica del I ordine  $(p^l, i^l)$  deve soddisfare l'equazione:

$$p^l d(1 + i)^{-1} = P$$

Nel caso di  $r = 1/1000$  e  $d = 100$ , per esempio, si sceglie  $l^l = i$ , la probabilità del I ordine  $\text{è } p^l$  è univocamente determinata e risulta:

$$p^l = \frac{P(1 + i)}{d} = \frac{4.995017 \cdot 1.05}{100} = 5.2448\%$$

se invece si pone  $p^l = p$ , il tasso tecnico  $l^l$  è univocamente determinato da:

$$i^l = \frac{pd}{P} - 1 = \frac{0.05 \cdot 100}{4.995017} - 1 = 0.998\%$$

La *riserva matematica* di un contratto di assicurazione è l'importo monetario che l'assicuratore deve immobilizzare a fronte dell'impegno nei confronti dell'assicurato. Nello schema uniperiodale considerato in questo capitolo essa coincide con il premio puro. Poichè, fissata una base tecnica del I ordine:

$$P = \mathbb{E}_t^I(D)(1 + i')^{-1}$$

la riserva matematica è il valore atteso scontato della prestazione, calcolato con la base tecnica del I ordine.

Si noti che l'appostamento della riserva matematica non garantisce la solvibilità dell'assicuratore. Essa è infatti determinata in base alla prudenzialità, cioè all'avversione al rischio dell'assicuratore. Il regolamentatore tipicamente richiede un'ulteriore immobilizzazione di capitale per garantire la solvibilità del contratto, il *margin di solvibilità* o *Solvency Capital Requirement (SCR)*.