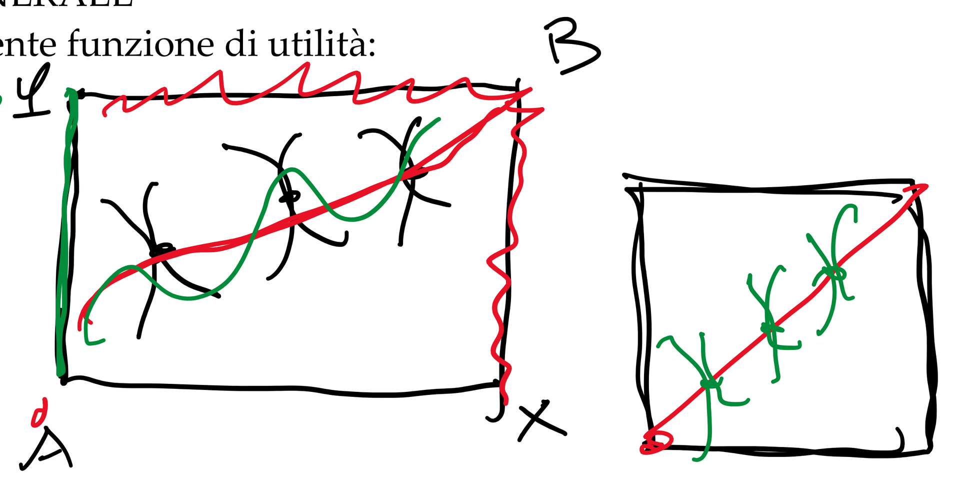
Esercitazione 1 - cap. 3 - Soluzione esercizi

giovedì 9 marzo 2023 15.15

$SMS = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \frac{0.5x^{-0.5}y^{0.5}}{0.5x^{0.5}y^{-0.5}} =$

ESERCIZIO 1: CALCOLO CURVA CONTRATTI IN GENERALE

Si immagini di avere due consumatori, a e b, con la seguente funzione di utilità:
$U^i = x^{0.5}y^{0.5}, i = a, b$ $\quad U = x^{0.5}y^{0.5}$



Derivare la curva dei contratti CC. Risposta.

Il SMS per ogni consumatore è dato da $SMS^i_{xy} = \frac{y}{x}$.

$CC: SMS^a = SMS^b \Rightarrow \frac{y_a}{x_a} = \frac{y_b}{x_b}$ $\rightarrow \frac{y_a}{x_a} = \frac{\omega_y - y_a}{\omega_x - x_a}$

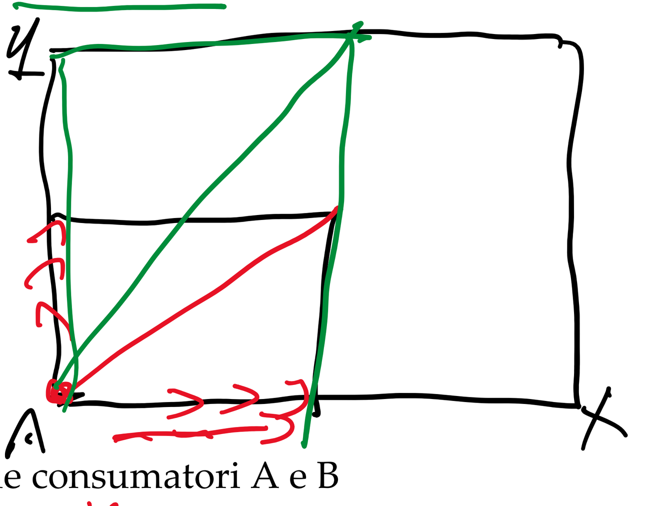
Usando le dotazioni aggregate (grandezza scatola di Edgeworth) si ha: $\omega_y = y_a + y_b; \omega_x = x_a + x_b \Rightarrow$

Sostituendo in CC da eguaglianza SMS:

$y_a\omega_x - y_a x_a = x_a\omega_y - x_a y_a$

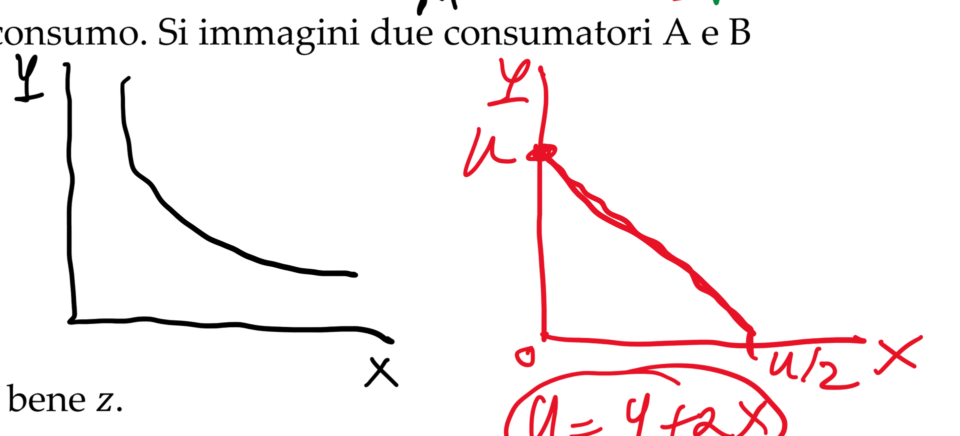
$$y_a = \frac{x_a(\omega_y - y_a)}{\omega_x - x_a} \Rightarrow y_a(\omega_x - x_a) = x_a(\omega_y - y_a) \Rightarrow y_a\omega_x = x_a\omega_y \Rightarrow \boxed{y_a = \frac{\omega_y}{\omega_x}x_a.}$$

A seconda delle dotazioni y e x si ha curva CC.



ESERCIZIO 2: Edgeworth e allocazione pareto efficiente nel consumo. Si immagini due consumatori A e B abbiano le seguenti funzioni di utilità

$U^A = XY, U^b = y + 2X$ $\quad U^A = XY \quad SMS = \frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} = \frac{Y}{X}$



$U = Y + 2X$

$Y = U - 2X$

$SMS^B = \frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} = 2$

Le dotazioni **iniziali** sono: $\omega^a_x = 1, \omega^a_y = \frac{1}{2}; \omega^b_x = 1, \omega^b_y = \frac{3}{2}$.

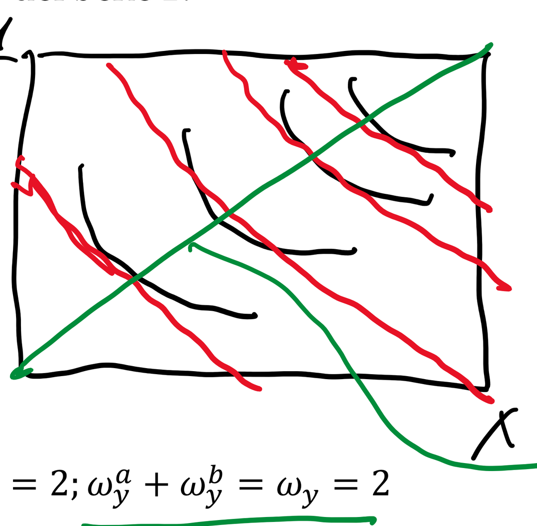
Nota con ω^i_z indichiamo le dotazioni **iniziali** dell'agente i del bene z.

Si assuma il prezzo del bene x come numerario, $p_x = 1$.

$SMS = \frac{P_x}{P_y}$

1) *Derivare la curva dei contratti.*

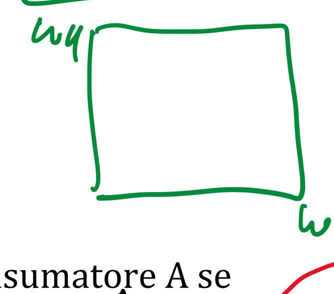
   $SMS^a = SMS^b \Rightarrow \frac{y^a}{x^a} = 2 \Rightarrow y^a = 2x^a$



2) *Derivare le scelte ottime dei due consumatori.*

   $SMS^A = SMS^B \Rightarrow \frac{Y_A}{X_A} = 2$ $\quad \boxed{Y_A = 2X_A}$ CC

   Le dotazioni iniziali complessive sono $\omega^a_x + \omega^b_x = \omega_x = 2; \omega^a_y + \omega^b_y = \omega_y = 2$



   a. *Consumatore A:* vincolo di bilancio determinato da valore di mercato delle sue dotazioni

      i. *Vincolo di bilancio:* $\boxed{M^a = \omega^a_x p_x + p_y\omega_y{}^a}$. $\quad M^A = P_x x^a + P_y y^a$

      Qual è il reddito M^a? $M^a = dotazioni * prezzi$, ovvero quanto denaro avrebbe il consumatore A se vendesse le sue dotazioni al prezzo di mercato?

      $SMS^A = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{Y_A}{X_A} = \frac{P_x}{P_y}$

      Quindi, $M^a = p_x\omega^a_x + p_y\omega^a_y = p_x 1 + p_y * \frac{1}{2}$ $\quad M^A = P_x X_A + P_y Y_A$

      Il vincolo di bilancio del consumatore A è quindi:

      $SMS^B = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow 2 = \frac{P_x}{P_y}$

      $M^a = p_x\omega^a_x + p_y\omega^a_y = p_x 1 + p_y * \frac{1}{2} = x^a + p_y y^a$. Usando $p_x = 1$, abbiamo

      $M^A = 1 + p_y * \frac{1}{2} = x^a + p_y y^a \Rightarrow$ ***Vincolo consumatore A***: $\boxed{\mathbf{1 - x^a = p_y\left(y^a - \frac{1}{2}\right)}}$

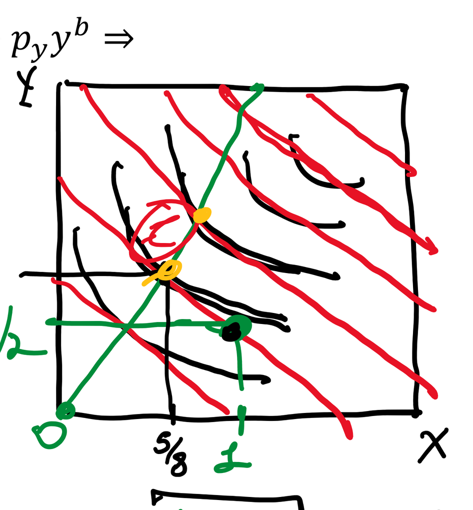
      $P_y = \frac{1}{2}$

      $\frac{Y_A}{X_A} = 2 \Rightarrow Y_A = 2X_A$

   b. *Consumatore B*: $M^b = p_x\omega^b_x + p_y\omega^b_y \Rightarrow 1 + \frac{3}{2}p_y = x^b + p_y y^b \Rightarrow$

      Vincolo consumatore B: $\boxed{\mathbf{1 - x^b = p_y\left(y^b - \frac{3}{2}\right)}}$

   c. *Scelta ottima di B*: $SMS^b = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \boxed{2 = \frac{1}{p_y}} \Rightarrow \mathbf{p_y = \frac{1}{2}}$



   d. *Scelta ottima di A:*

      i. *Step 1: SMS=rapporto dei prezzi.*

      $\boxed{SMS = \frac{y^a}{x^a} = \frac{1}{p_y} \Rightarrow y^a = \frac{x^a}{p_y};}$ $\quad SMS^A = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{1}{P_y}$ $\quad Y_A = \frac{X_A}{P_y}$

      CC: $Y_A = 2X_A$ $\quad \frac{10}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\quad X_A = 1$ $\quad Y_A = \frac{1}{2}$

      ii. Step 2: sostituire condizione in step 1 nel vincolo di A.

      $1 - X_A = P_y\left(Y_A - \frac{1}{2}\right) \rightarrow Y_A = \frac{X_A}{P_y}$

      Usando il vincolo di A:

      $1 - x^a = p_y\left(\frac{x^a}{p_y} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 - x^a = x^a - \frac{1}{2}p_y \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}p_y = 2x^a \Rightarrow$

      $\mathbf{x^a = \frac{2 + p_y}{4}; y^a = \frac{2 + p_y}{4p_y}}$;

      Usando $p_y = \frac{1}{2}$ *da scelta consumatore B*; $\mathbf{x^a = \frac{5}{8}; y^a = \frac{10}{8}}$

   e. ***SCELTE OTTIME FINALI:*** $\mathbf{x^b = \omega_x - x^a = 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}; y^b = \omega_y - y^a = 2 - \frac{10}{8} = \frac{6}{8}}$

3) *Le soluzioni sono Pareto-efficienti?*

   a. Da contract curve in 1: $y^a = 2x^a$; sostituendo le soluzioni ottime di A si ha che è così perchè $10/8 = 2 * x^a$

   b. Le allocazioni del competitive equilibrium sono quindi: $x^a = \frac{5}{8}; y^a = \frac{10}{8}; x_b = \frac{11}{8}; y_b = \frac{6}{8}$

   $\omega^A_x \quad \omega^A_y$

   $M^A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

4) *Si immagini governo voglia un'altra allocazione differente:* $A = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$. *E' un'allocazione paretiana di competitive equilibrium?*

   $X_A \; Y_A \quad X_B \; Y_B$

   $Y_A = 2X_A = 2\frac{3}{4}$

   a. Check se è su curva contratti. L'allocazione desiderata dal governo sarebbe $x_a = \frac{3}{4}, y_a = \frac{3}{2}$.
   Da CC x *A:* $y_a = 2x_a$, quindi ok perchè effettivamente 3/2=2*3/4. E' un'allocazione pareto-efficiente.

   b. *E' realizzabile (feasible)?* Per A no, perché il suo reddito non è sufficiente a comprare le quantità richieste.

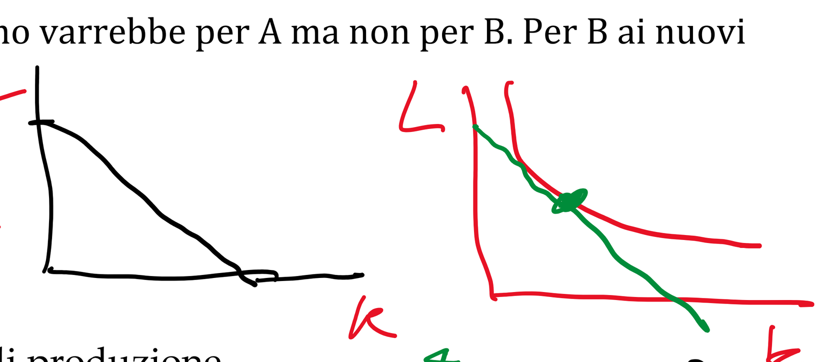
   Al prezzo di equilibrio di $p_y = \frac{1}{2}$, la sua dotazione iniziale e le scelte ottime implicano che il reddito è $M^a = 1 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{10}{8} * \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. La dotazione che vorrebbe il governo vale per il consumatore A $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{6}{4} > \frac{5}{4}$

   Quindi per comprare la dotazione richiesta dal governo, il consumatore dovrebbe risorse maggiori di quelle che ha.

   c. *Anche se in allocazione proposta utilità di entrambi consumatori sarebbero maggiori di quelle iniziali e quelle di scelta ottima, non sono ammissibili*

5) *Si immagini che il governo annunci un prezzo di* $p_y = \frac{1}{4}$. *Raggiungerebbe l'allocazione nuova?*
   No, non sulla curva contratti. Al nuovo prezzo, condizione ottimo varrebbe per A ma non per B. Per B ai nuovi prezzi si ha $SMS = 2 < 4$, e quindi domanderebbe più y.

$MRST = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\partial q/\partial K}{\partial q/\partial L}$

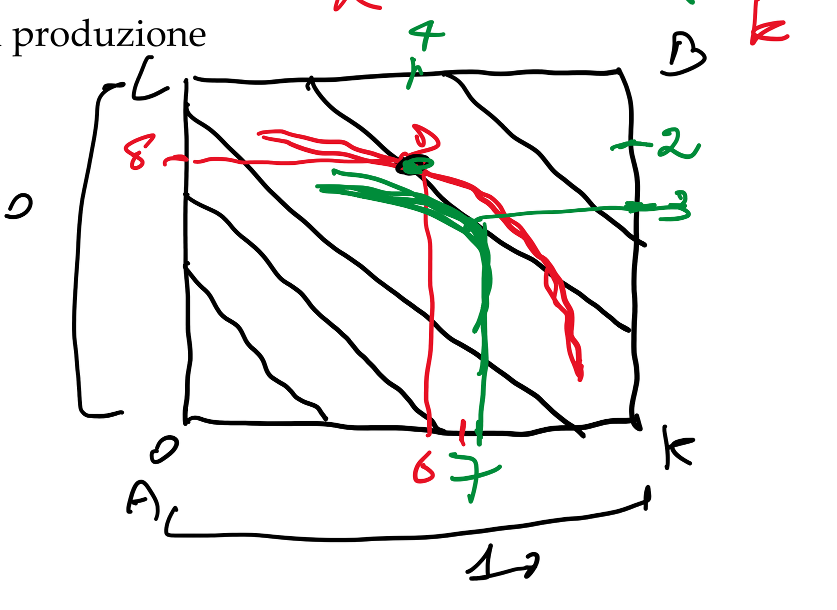


ESERCIZIO 3: allocazioni efficienti nella produzione.

Si immagini di avere due imprese a e b con le seguenti funzioni di produzione

Impresa A: $q_a = k_a + l_a$; impresa b: $q_b = k_b^{\frac{1}{2}}l_b^{\frac{1}{2}}$;

Dotazioni inziali: $\omega^a_k = 6, \omega^a_l = 8;\ \omega^b_k = 4; \omega^b_l = 2.$



1) Allocazione iniziale è Pareto efficiente? No.

   a. MRTS: $MRTS^a_{k,l} = 1, MRTS^b_{k,l} = \frac{MP_k}{MP_l} = \frac{l_b}{k_b} =$

   In dotazioni iniziali: $MRTS^a = 1 > MRTS^b = \frac{1}{2}$

2) Trovare l'allocazione paretiana k e l, assumendo che il tasso di interesse $r = 1$.

   a. La condizione per trovare la scelta ottima di K e L è data dalla minimizzazione dei costi dell'impresa che implica che
   $MRTS = \frac{r}{w}$ $\quad MRST^A = 1 = \frac{1}{w} \Rightarrow \boxed{w = 1}$ $\quad MRST^B = \frac{L^B}{K^B} = \frac{r}{w} \Rightarrow \boxed{L^B = K^B}$

   Quindi: $MRTS^a = \frac{1}{w} \Rightarrow w = 1; MRTS^b = \frac{l_b}{k_b} = \frac{1}{w} \Rightarrow Usando\ w = 1 \Rightarrow l_b = k_b$

   Nelle dotazioni iniziali $CT^b = r\omega^b_k + w\omega^b_l = 4 + 2 = 6$. Quindi $6 = rk_b + l_b w = l_b + l_b \Rightarrow l_b = k_b = 3$

   $\omega_k = \omega^a_k + \omega^b_k = 10; \omega_l = \omega^a_l + \omega^b_l = 10; k_a = \omega_k - k_b = 7; l_a = \omega_l - l_b = 7.$

   $CT^B = 6 =$

   Quindi l'allocazione finale è: $\boxed{\mathbf{l_b = k_b = 3; l_a = k_a = 7}}$.

3) Dimostrare che l'allocazione è un miglioramento paretiano

   a. In dotazioni iniziali: $Q^0 = q_a + q_b = 14 + 2 * 2^{0.5}$;

   b. In dotazioni equilibrio: $Q^F = 14 + 3 = 17 > Q^0$

   $Q^0 =$

   $q_a^0 = 14; \; q_b^0 = 2 \cdot 2^{0.5}$

   $L^B = K^B = 3$

   $L^A = K^A = 7$

   $q_a^* = 14 \quad q_b^* = 3$

Eserc. 2

$U^A = X \cdot Y \; ; \; U^B = XY \; ; \; P_x = 1$

$\omega^A_x = 2 \; ; \; \omega^A_y = 6 \; ; \quad \omega^B_x = 8 \; ; \; \omega^B_y = 4$

1) Disegnare CI, dotazioni

2) Scrivere Vincoli Bilancio

3) Allocazione Efficiente