

MICROECONOMIA

Corso di Laurea in Economia Aziendale
(Cognomi E-N)

CAPITOLO 3

LA SCELTA RAZIONALE DEL CONSUMATORE

Vincenzo Lombardo

Dipartimento di Studi Aziendali ed Economici

SCelta CONSUMATORE

VINCOLO DI BILANCIO E PREFERENZE

1. VINCOLO DI BILANCIO

- ▶ Descrivere tutte le combinazioni di beni che il consumatore è in grado di comprare

2. PREFERENZE

- ▶ Selezionare tra tutte le opzioni disponibili quelle che il consumatore preferisce

3. SCelta

- ▶ Scelta combinazione ottima di beni date le risorse a disposizione (1 e 2 insieme)

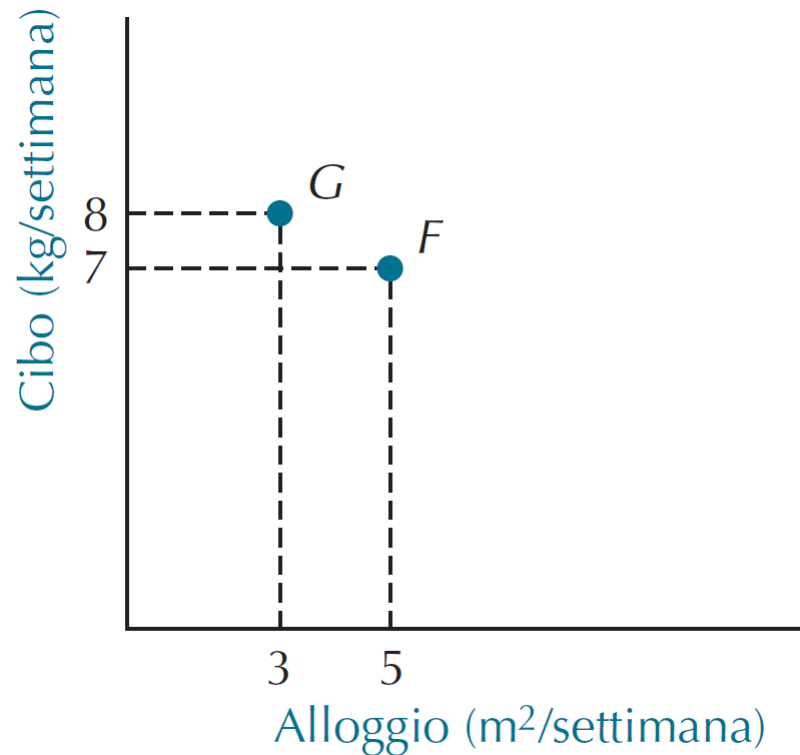
VINCOLO DI BILANCIO

IL VINCOLO DI BILANCIO

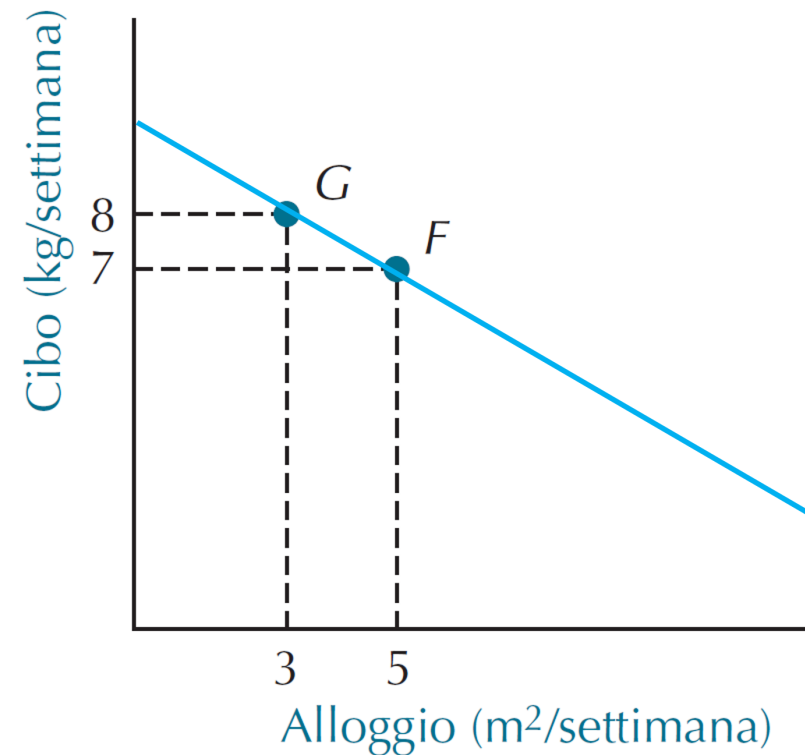
L'INSIEME DELLE OPPORTUNITÀ

Un paniere di beni rappresenta una combinazione di beni o servizi

Esempio: due panieri



Esempio: 'tutti' i panieri



IL VINCOLO DI BILANCIO

L'INSIEME DELLE OPPORTUNITÀ

- ▶ **Il vincolo** (o retta) **di bilancio** è l'insieme dei panieri che il consumatore può acquistare spendendo completamente il reddito
 - ▶ Indicando con A la quantità di alloggio, con C la quantità di cibo, con P_A e P_C i loro prezzi unitari, e con M il reddito

$$M = P_A A + P_C C$$

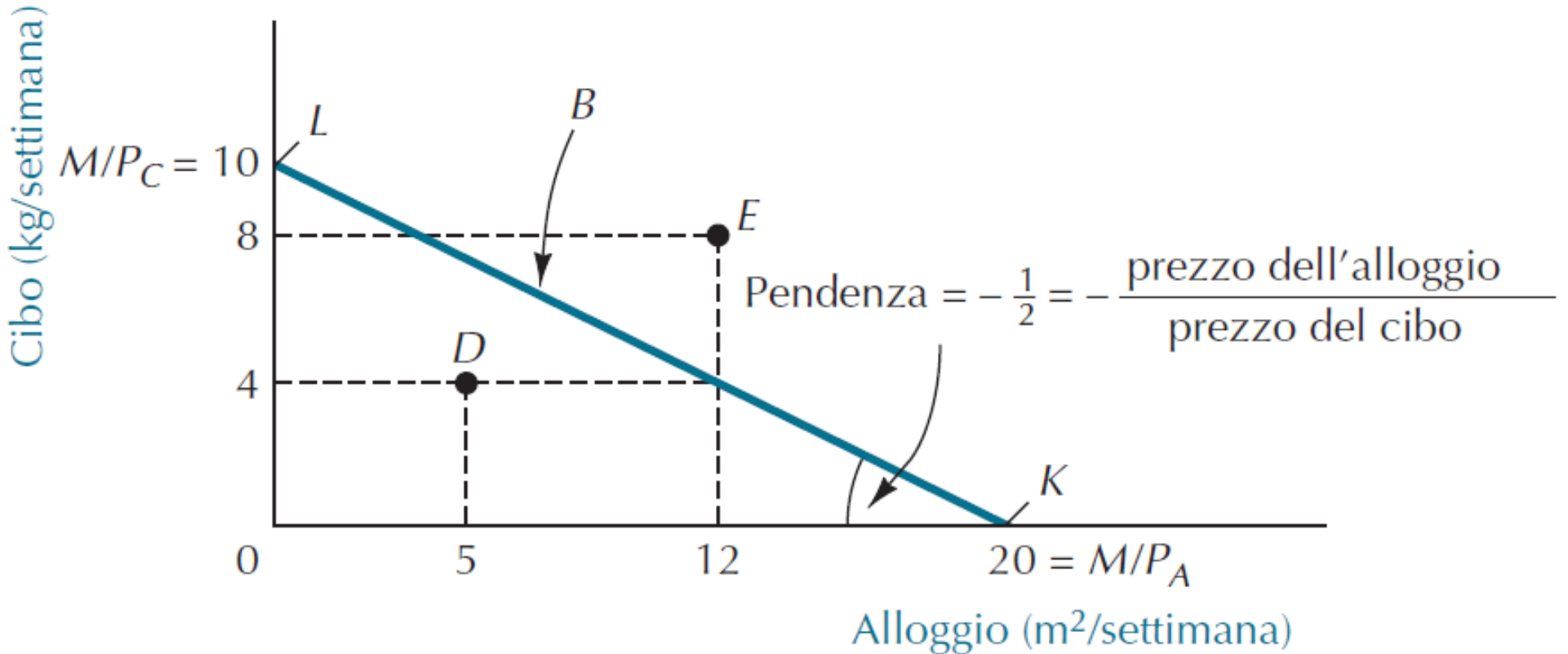
- ▶ L'insieme di bilancio è composto da tutti i panieri accessibili dato il reddito

$$M \geq P_A A + P_C C$$

IL VINCOLO DI BILANCIO

$$M = P_A A + P_C C \Rightarrow C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right) A$$

Esempio:
 $M = 100, P_A = 5, P_C = 10$



IL VINCOLO DI BILANCIO

▶ Vincolo: $M = P_A A + P_C C$

▶ Esplicitando il bene C rispetto al bene A , si può riscrivere

$$C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right) A$$

▶ M/P_C : intercetta verticale

▶ M/P_A : intercetta orizzontale

▶ $-(P_A/P_C)$: la pendenza del vincolo di bilancio

▶ Pendenza retta $\equiv -\Delta Y / \Delta X$ (variazione totale variabile Y wrt X)

▶ *Pendenza vincolo* $= -\Delta Y / \Delta X = -(M/P_C)/(M/P_A) = -(P_A/P_C)$

LA PENDENZA DEL VINCOLO DI BILANCIO

Dati due beni (assi) Y e X , e reddito (shift) M

- ▶ La pendenza del vincolo di bilancio è pari a

$$\text{Pendenza} = -\frac{M}{P_Y} / \frac{M}{P_X} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

- ▶ Il prezzo relativo dei due beni, in valore assoluto
 - ▶ Misura il saggio al quale Y può essere scambiato con X ; il **costo opportunità** del bene X in termini del bene Y
 - ▶ Nell'esempio $P_X/P_Y = 0.5$: il prezzo del bene X è la metà di quello di Y , il prezzo di Y è il doppio di quello di X
 - ▶ Il costo di una unità aggiuntiva di bene X in termini di Y è 0.5
 - ▶ Per avere un'unità aggiuntiva di Y è necessario rinunciare a 2 unità di X .

SPOSTAMENTI DEL VINCOLO DI BILANCIO DOVUTI A UNA VARIAZIONE DEI PREZZI

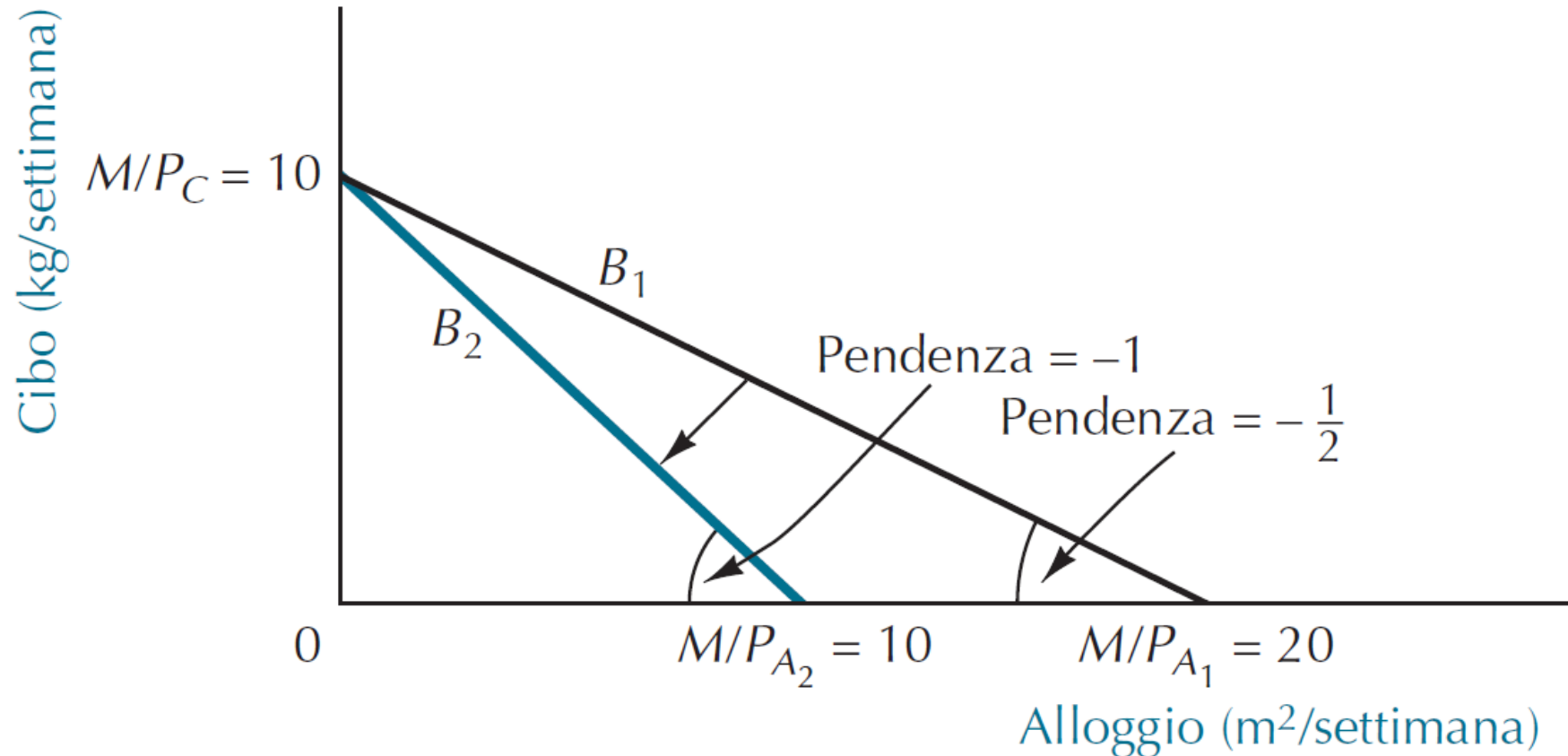
La variazione del prezzo di uno dei due beni determina una variazione della **pendenza** del vincolo di bilancio

- ▶ **Se il prezzo del bene sull'asse delle ascisse (X) aumenta**, il vincolo di bilancio diventa **più ripido**, l'intercetta orizzontale si sposta verso sinistra mentre l'intercetta verticale non varia
- ▶ **Se il prezzo del bene sull'asse delle ascisse (X) diminuisce**, il vincolo di bilancio diventa **meno ripido**, l'intercetta orizzontale si sposta verso destra mentre l'intercetta verticale non varia

AUMENTO PREZZO BENE X (ALLOGGIO)

$$C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right) A$$

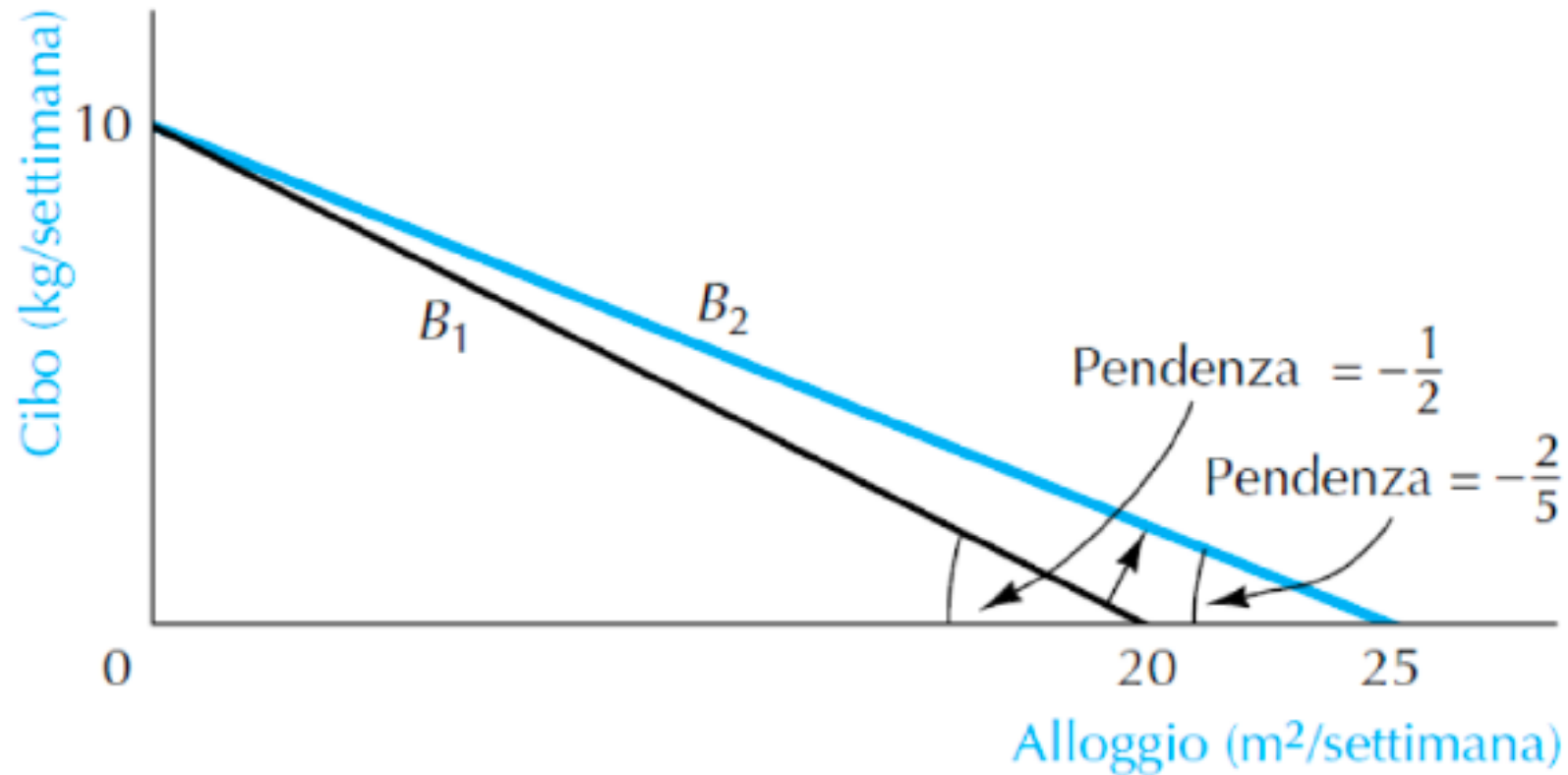
$$M = 100, P_C = 10, \\ B_1: P_A^1 = 5 \rightarrow B_2: P_A^2 = 10$$



RIDUZIONE PREZZO BENE X (ALLOGGIO)

$$C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right) A$$

$$M = 100, P_C = 10, \\ B_1: P_A^1 = 5 \rightarrow B_2: P_A^2 = 4$$



SPOSTAMENTI DEL VINCOLO DI BILANCIO DOVUTI A UNA VARIAZIONE DEI PREZZI

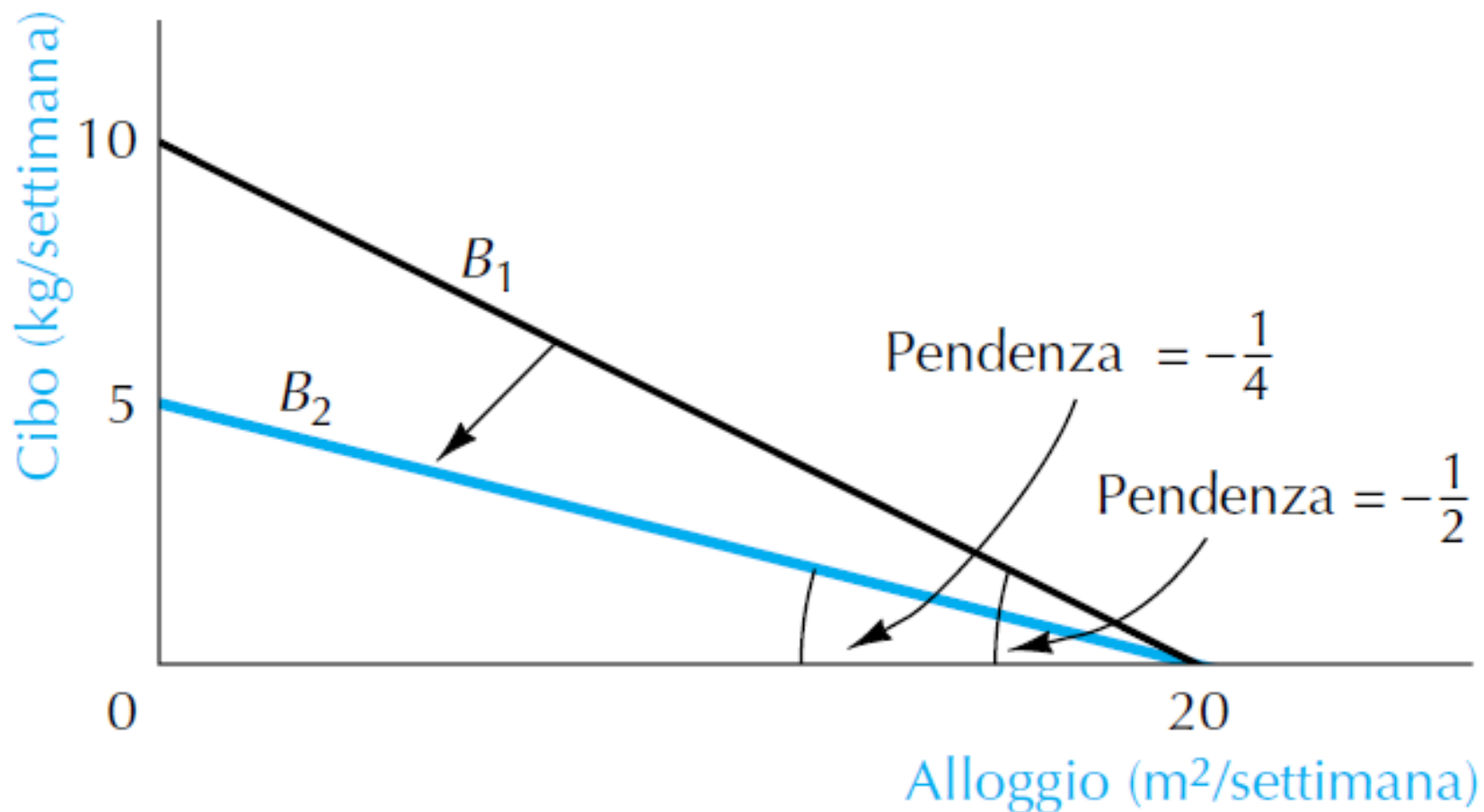
La variazione del prezzo di uno dei due beni determina una variazione della **pendenza** del vincolo di bilancio

- ▶ **Se il prezzo del bene sull'asse delle ordinate (Y) aumenta**, il vincolo di bilancio diventa **meno ripido**, l'intercetta verticale si sposta verso il basso mentre l'intercetta orizzontale non varia
- ▶ **Se il prezzo del bene sull'asse delle ordinate (Y) diminuisce**, il vincolo di bilancio diventa **più ripido**, l'intercetta verticale si sposta verso l'alto mentre l'intercetta orizzontale non varia

AUMENTO PREZZO BENE Y (CIBO)

$$C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right) A$$

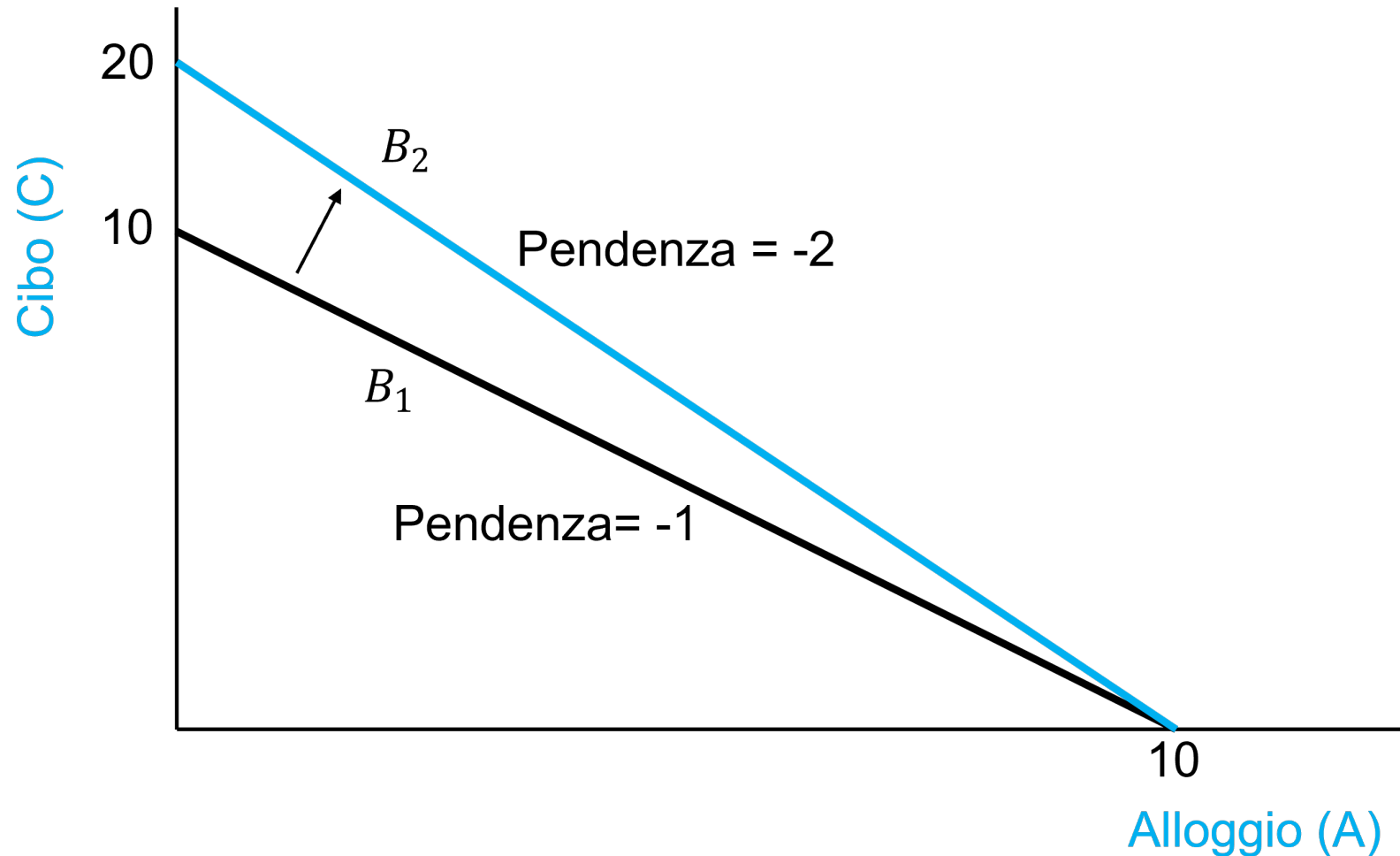
$$M = 100, P_A = 5, \\ B_1: P_C^1 = 10 \rightarrow B_2: P_C^2 = 20$$



RIDUZIONE PREZZO BENE Y (CIBO)

$$C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right) A$$

$$M = 100, P_A = 10, \\ B_1: P_C^1 = 10 \rightarrow B_2: P_C^2 = 5$$



SPOSTAMENTI DEL VINCOLO DI BILANCIO DOVUTI A UNA VARIAZIONE DEL REDDITO

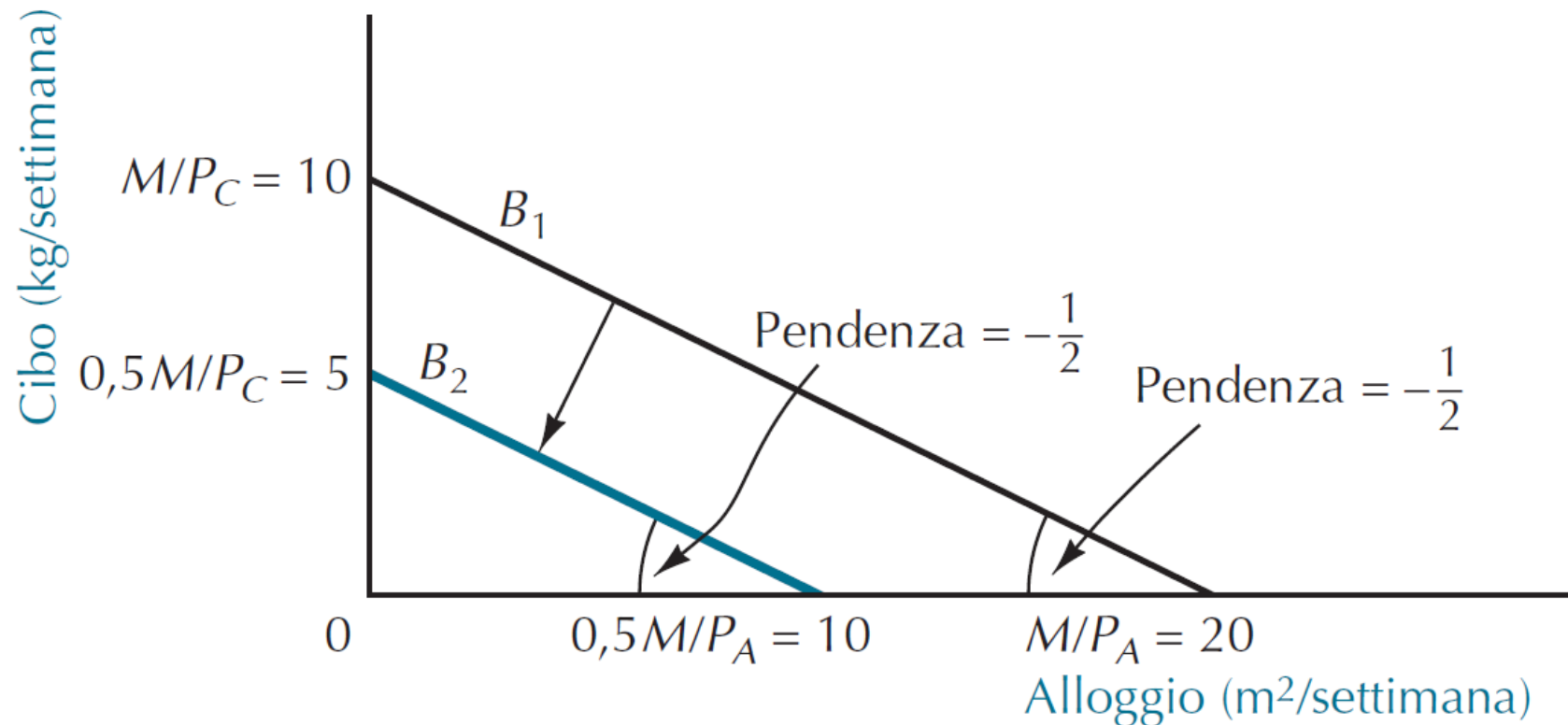
- ▶ Le variazioni del reddito non modificano la pendenza del vincolo di bilancio
- ▶ Quando il **reddito aumenta**, il vincolo di bilancio si sposta parallelamente verso destra
- ▶ Quando il **reddito diminuisce**, il vincolo di bilancio si sposta parallelamente verso sinistra

RIDUZIONE DEL REDDITO

$$C = \frac{M}{P_C} - \left(\frac{P_A}{P_C}\right)A$$

$$P_A = 5, P_C = 10$$

$$B_1: M_1 = 100 \rightarrow B_2: M_2 = 50$$



VINCOLO DI BILANCIO BENE COMPOSITO

- ▶ Vincolo di bilancio con $N > 2$ beni

$$M = P_1X_1 + P_2X_2 + \dots + P_nX_n$$

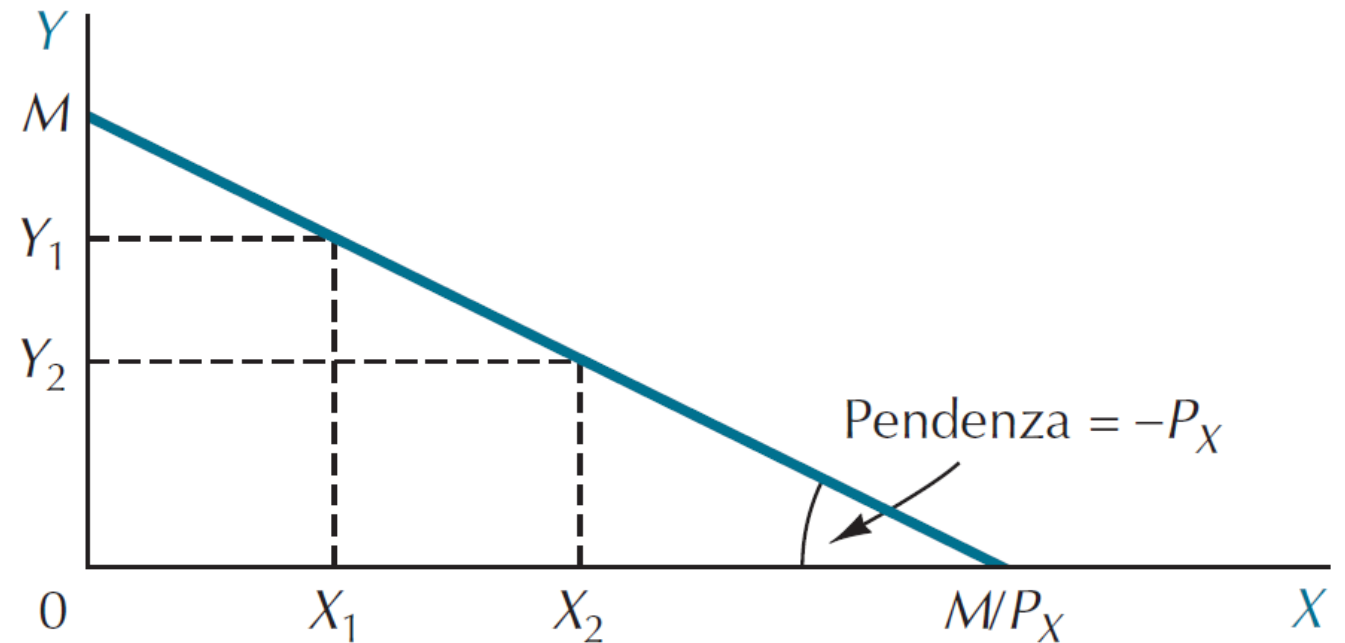
- ▶ Bene composito Y : rappresenta tutti i beni eccetto X_1 (ad es.)

Vincolo diventa

$$M = P_1X_1 + Y$$

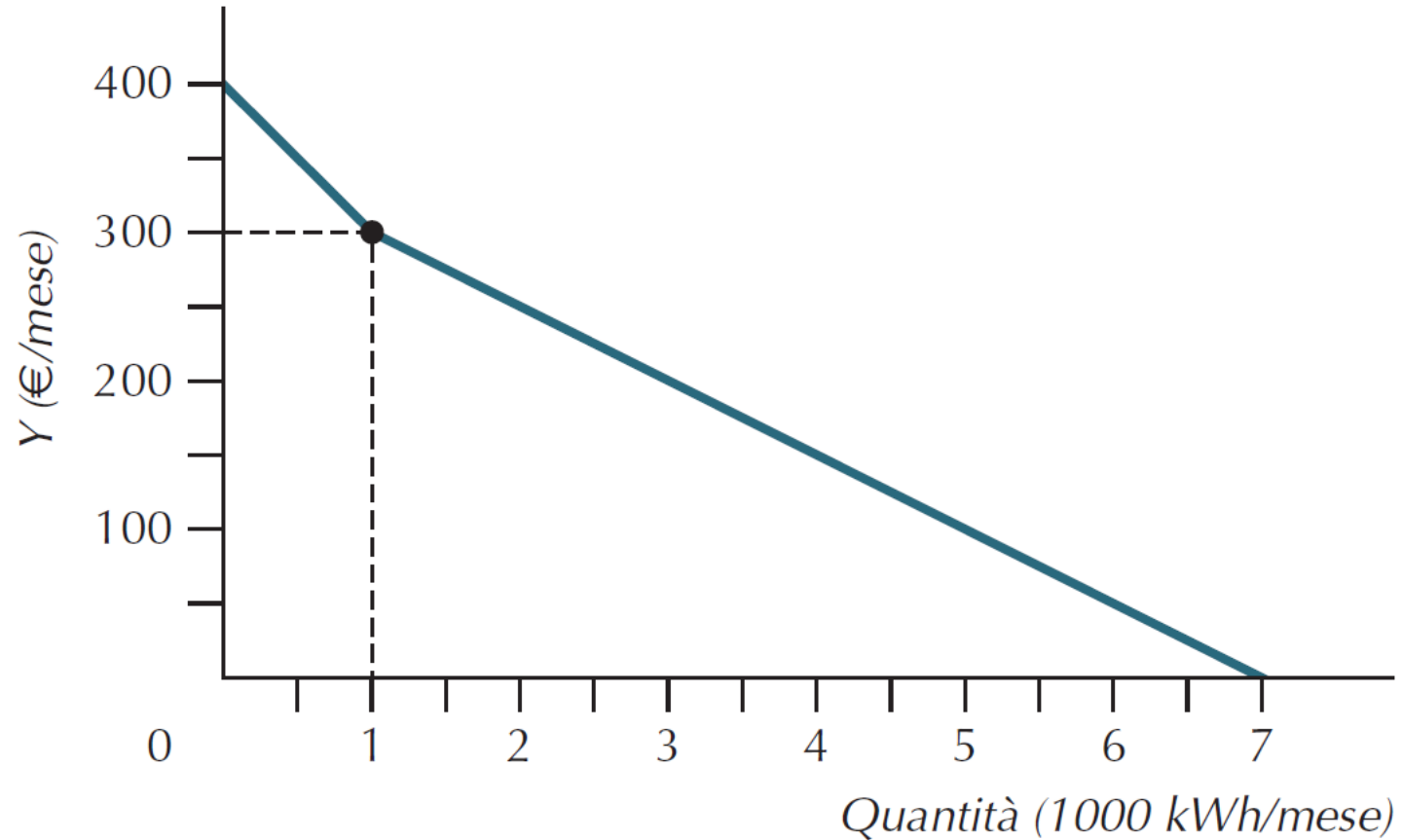
Prezzo di Y ? Numerario

- ▶ Prezzo del bene Y come unità di misura



VINCOLO DI BILANCIO NON LINEARE

- ▶ Vincoli di bilancio non lineari (“a gomito”)
 - ▶ Variano prezzi relativi dei beni lungo il vincolo
 - ▶ Es: Prezzo energia: 0.10 per i primi 1000kw e poi 0.05



PREFERENZE

LE PREFERENZE DEL CONSUMATORE

- ▶ Le preferenze del consumatore illustrano le modalità con le quali il consumatore ordina i panieri di beni (confronta la loro desiderabilità)
- ▶ Un ordinamento di preferenze è uno schema attraverso il quale il consumatore ordina tutti i possibili panieri secondo le sue preferenze
- ▶ Per poter derivare un ordinamento dei diversi panieri sono necessarie alcune proprietà delle preferenze

LE PREFERENZE DEL CONSUMATORE

ASSIOMI

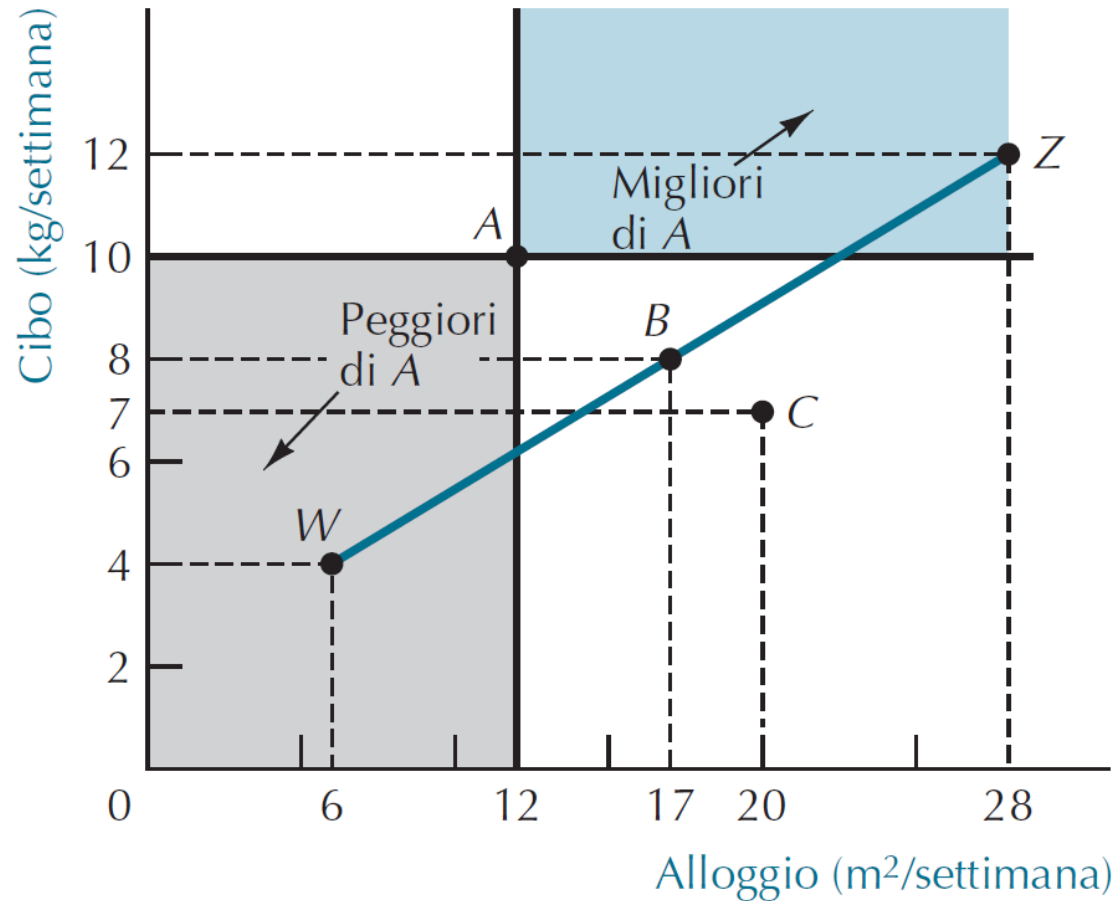
Le proprietà fondamentali (assiomi) delle preferenze

1. **Completezza:** il consumatore è sempre in grado di classificare tutte le possibili combinazioni di beni.
2. **Transitività:** se il consumatore preferisce il paniere A al paniere B e il paniere B al paniere C, allora preferirà sempre il paniere A al paniere C (anche per indifferenza)
3. **Non sazietà** o monotonicità: a parità di condizioni, il consumatore preferisce avere quantità maggiori di un determinato bene
4. **Convessità:** le combinazioni di beni intermedie sono preferite a quelle estreme (amore per la varietà)
5. **Continuità:** piccoli cambiamenti delle quantità disponibili di un bene, non modificano le preferenze in modo improvviso

CURVE DI INDIFFERENZA

- ▶ Una curva di indifferenza mostra tutte le combinazioni dei panieri che assicurano al consumatore lo stesso livello di soddisfazione
- ▶ Una mappa o insieme di curve di indifferenza mostra differenti livelli di soddisfazione in corrispondenza di diversi panieri di beni ordinati a seconda del livello di desiderabilità

PANIERI CON LO STESSO LIVELLO DI SODDISFAZIONE



3. Non sazietà (+transitività)

$$Z \succ A, A \succ W \Rightarrow Z \succ W$$

4. Convessità

Panieri intermedi preferiti

5. Continuità

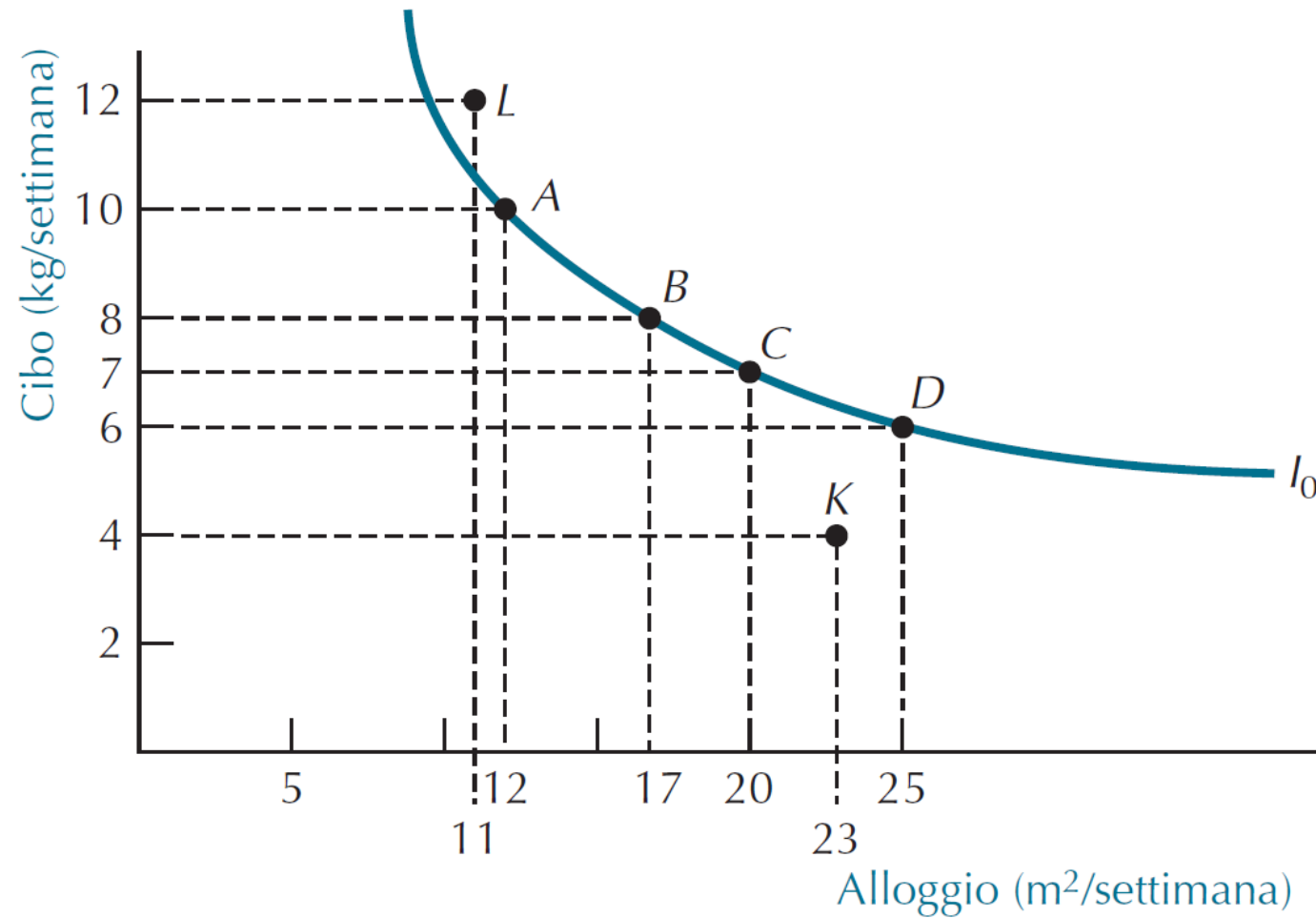
Ordinamento preferenze *continuo*

$$Z \succ W \Rightarrow (Z \pm \varepsilon) \succ W$$

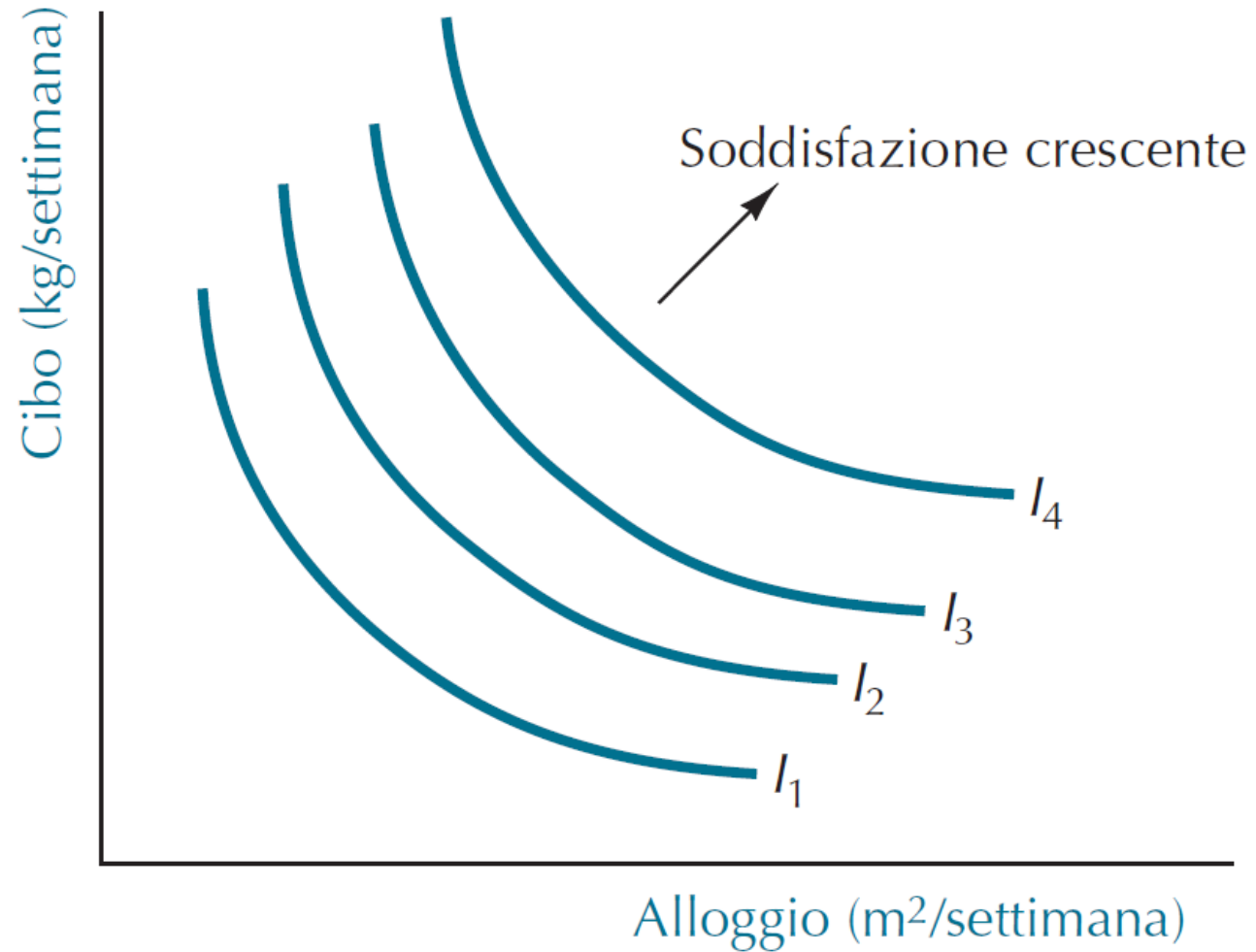
► $Z \succ A, A \succ W$

∃ un paniere su ZW: $B \sim A$

UNA CURVA DI INDIFFERENZA



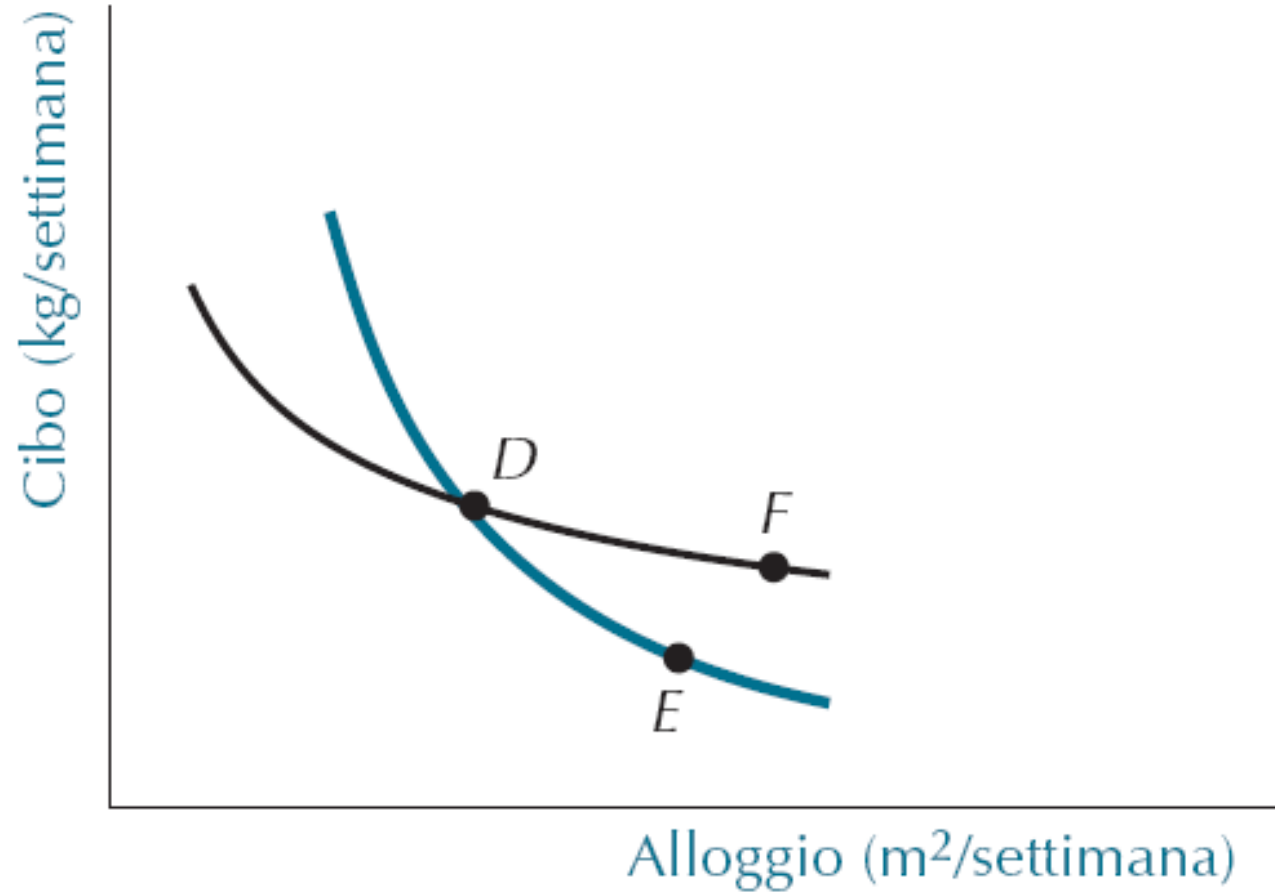
MAPPA DI CURVE DI INDIFFERENZA



ALCUNE PROPRIETÀ DELLE CURVE DI INDIFFERENZA

- ▶ Le curve di indifferenza coprono tutti i panieri
- ▶ Ciascun paniere può giacere su un'unica curva di indifferenza (*completezza*)
- ▶ Le curve di indifferenza hanno pendenza negativa (*non sazietà*)
- ▶ Le curve di indifferenza non si intersecano mai
- ▶ L'inclinazione di una curva di indifferenza si riduce man mano che ci si sposta verso destra (*convessità delle preferenze*)

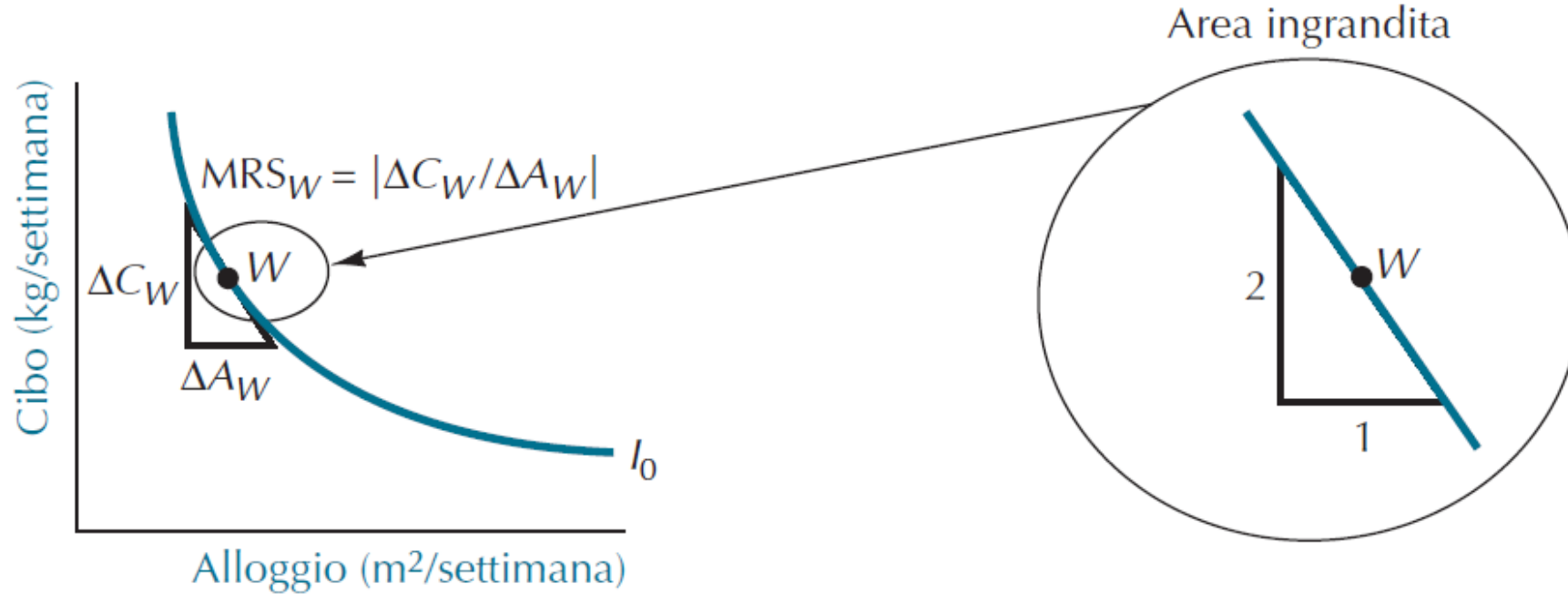
DUE CURVE DI INDIFFERENZA NON SI INTERSECANO MAI



SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE

- ▶ Il saggio marginale di sostituzione (SRS o MRS in inglese) è il tasso al quale il consumatore è disposto a sostituire una piccola quantità del bene misurato sull'asse Y in cambio di una piccola quantità aggiuntiva del bene misurato sull'asse X
- ▶ Il saggio marginale di sostituzione corrisponde all'inclinazione della curva di indifferenza (in valore assoluto)

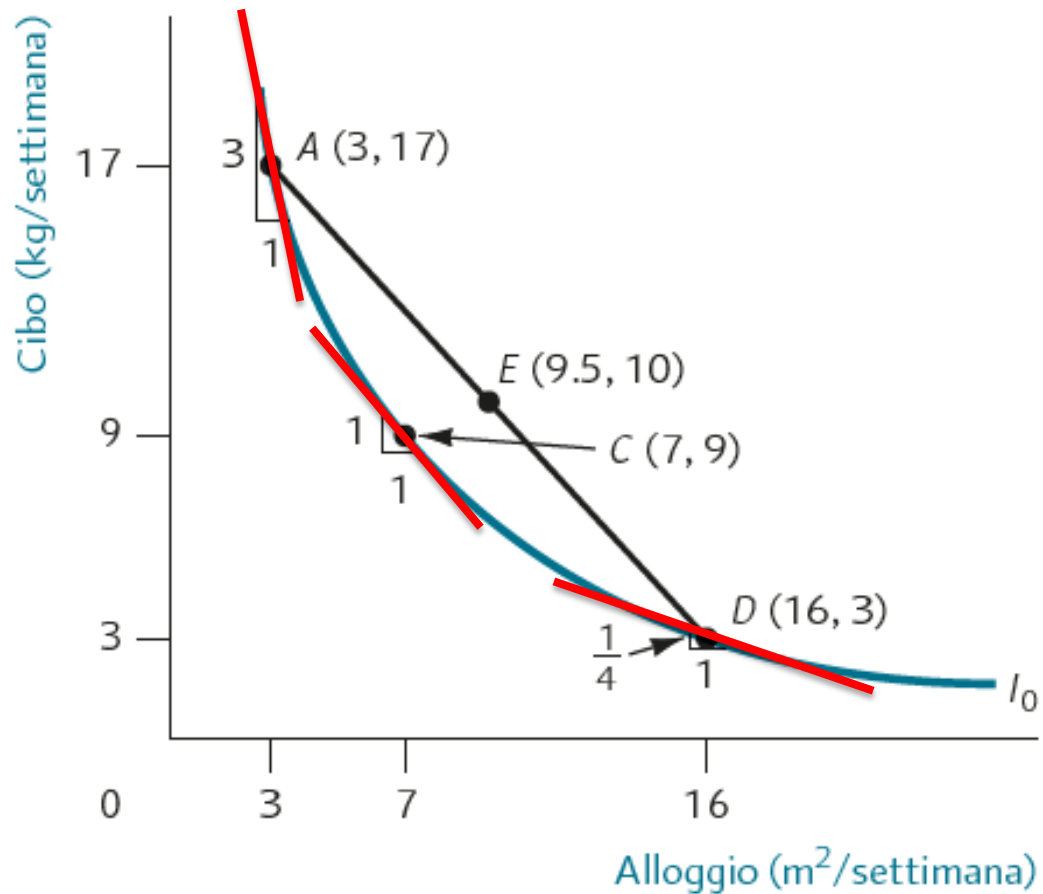
SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE



- ▶ Il saggio marginale di sostituzione corrisponde alla pendenza (in valore assoluto) della curva di indifferenza, in ciascun punto
- ▶ $MRS = 2$: il consumatore chiede 2 unità di cibo per compensare riduzione di 1 unità di alloggio

SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE

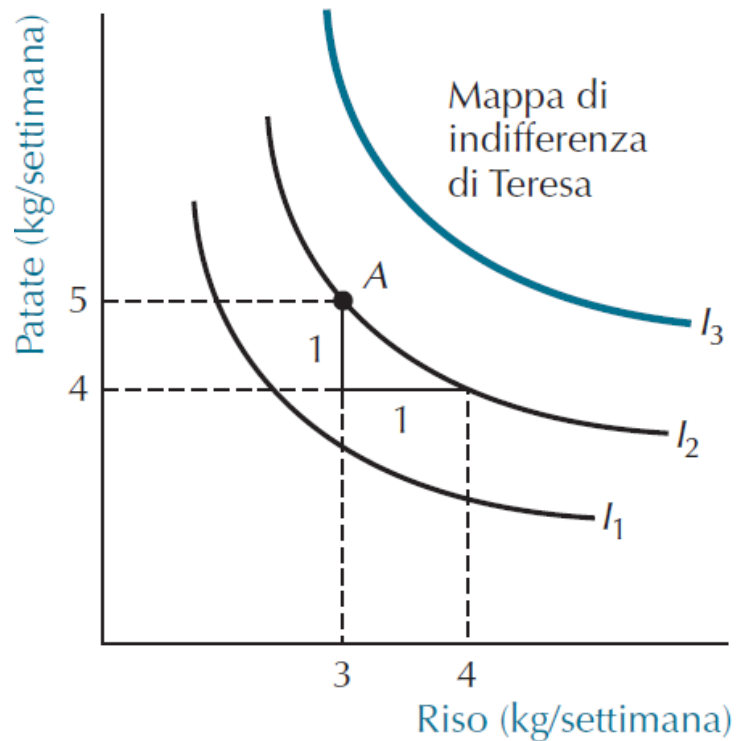
SMS decrescente: proprietà di convessità delle preferenze



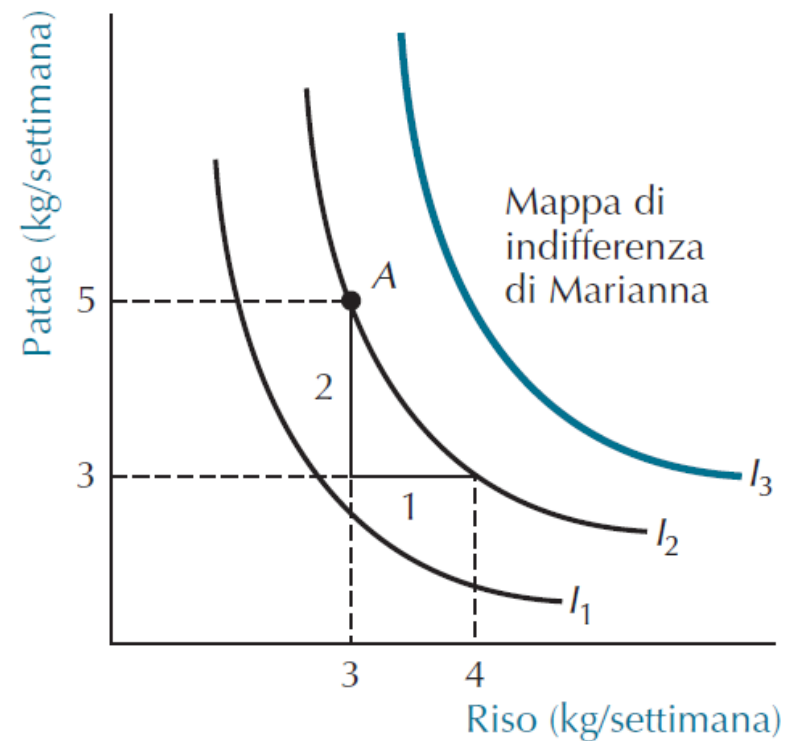
SMS cresce (si riduce) spostandosi verso sinistra (destra)

- ▶ Minore è la quantità di cui disponiamo di un certo bene (alloggio) maggiore è la compensazione (cibo) che chiediamo per cederne un'ulteriore unità.
- ▶ Siamo disposti a rinunciare più facilmente a beni che abbiamo in grande quantità per ottenere beni che non abbiamo

CURVE DI INDIFFERENZA E PREFERENZE INDIVIDUALI



(a)

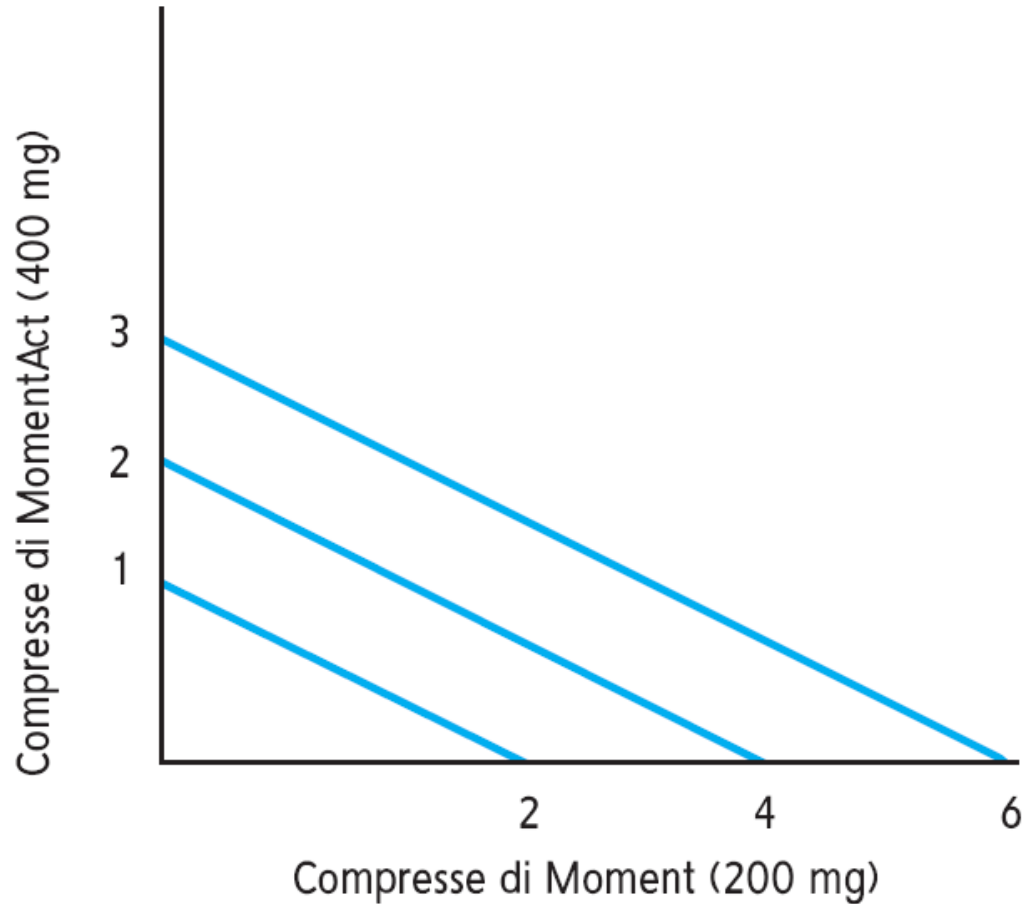


(b)

Esempio: A Teresa piacciono di più le patate mentre a Marianna piace di più il riso. SMS tra patate e riso di Marianna è più alto di quello di Teresa nel punto A.

CASI PARTICOLARI

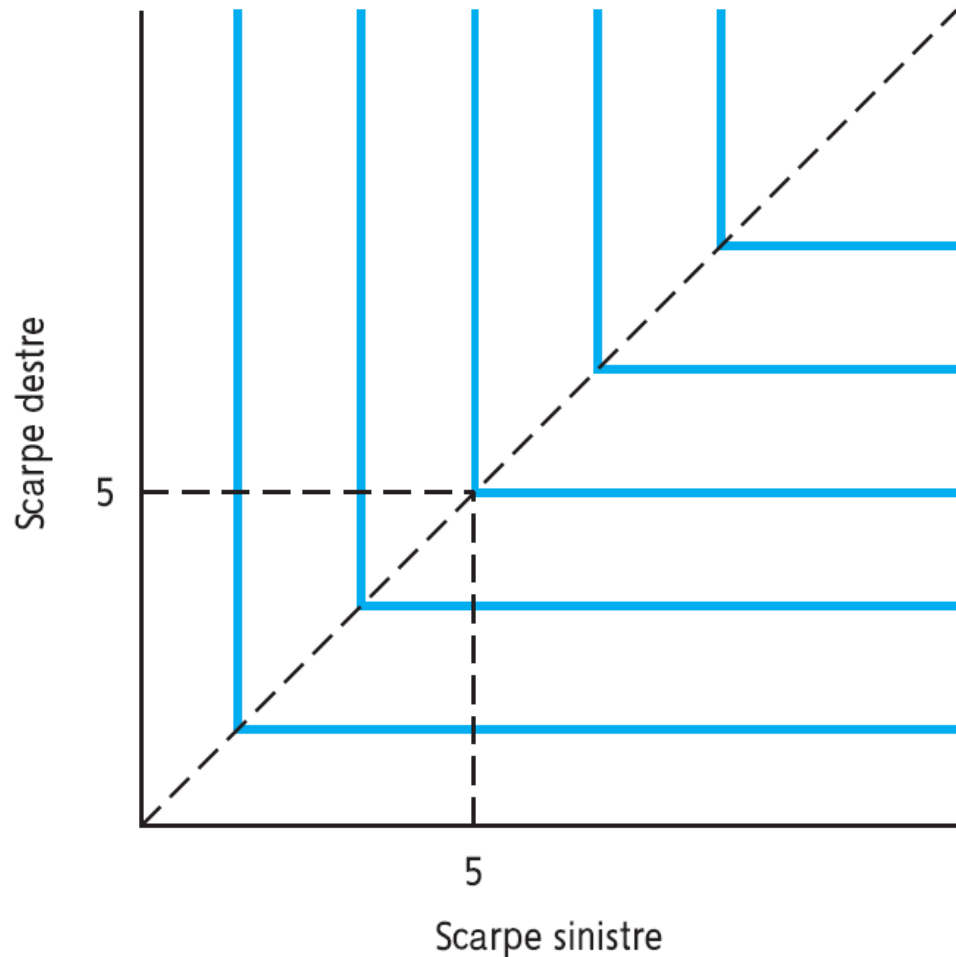
BENI PERFETTI SOSTITUTI



- ▶ Beni intercambiabili secondo una proporzione fissa
 - Due Moment (200) sono sostituti perfetti di un Moment (400)
- ▶ CI sono rappresentate da linee rette con inclinazione pari all'opposto del SMS
- ▶ CI hanno SMS costante

CASI PARTICOLARI

BENI PERFETTI COMPLEMENTI

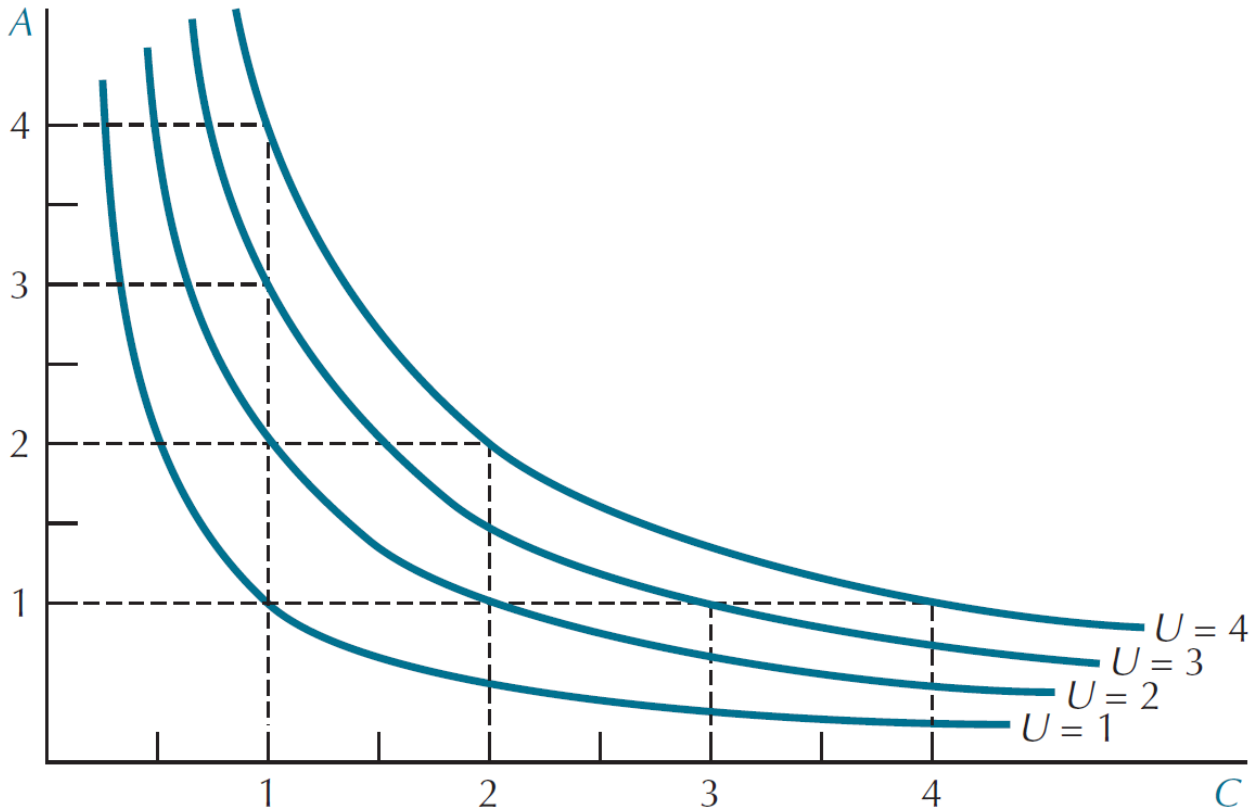


- ▶ Beni consumati in proporzione fissa
 - 1 scarpa dx e 1 sx (proporzione 1:1)
 - 2 zucchero per 1 caffè (proporzione 2:1)
- ▶ CI hanno forma ad **L**
 - ▶ Vertice della L in corrispondenza di paniere con giuste proporzioni
 - ▶ Per aumentare soddisfazione bisogna aumentare beni in stessa proporzione
 - due scarpe dx e due sx
 - 3 dx e 2 sx non aumentano soddisfazione

L'APPROCCIO DELLA FUNZIONE DI UTILITÀ

- ▶ Una funzione di utilità assegna un numero a ciascun paniere in modo tale che ai panieri giudicati migliori venga assegnato un numero più elevato rispetto ai panieri giudicati inferiori
- ▶ Una funzione di utilità è analoga a una mappa di curve di indifferenza poiché entrambe forniscono una descrizione completa dell'ordinamento delle preferenze del consumatore

FUNZIONE DI UTILITÀ E CURVE DI INDIFFERENZA

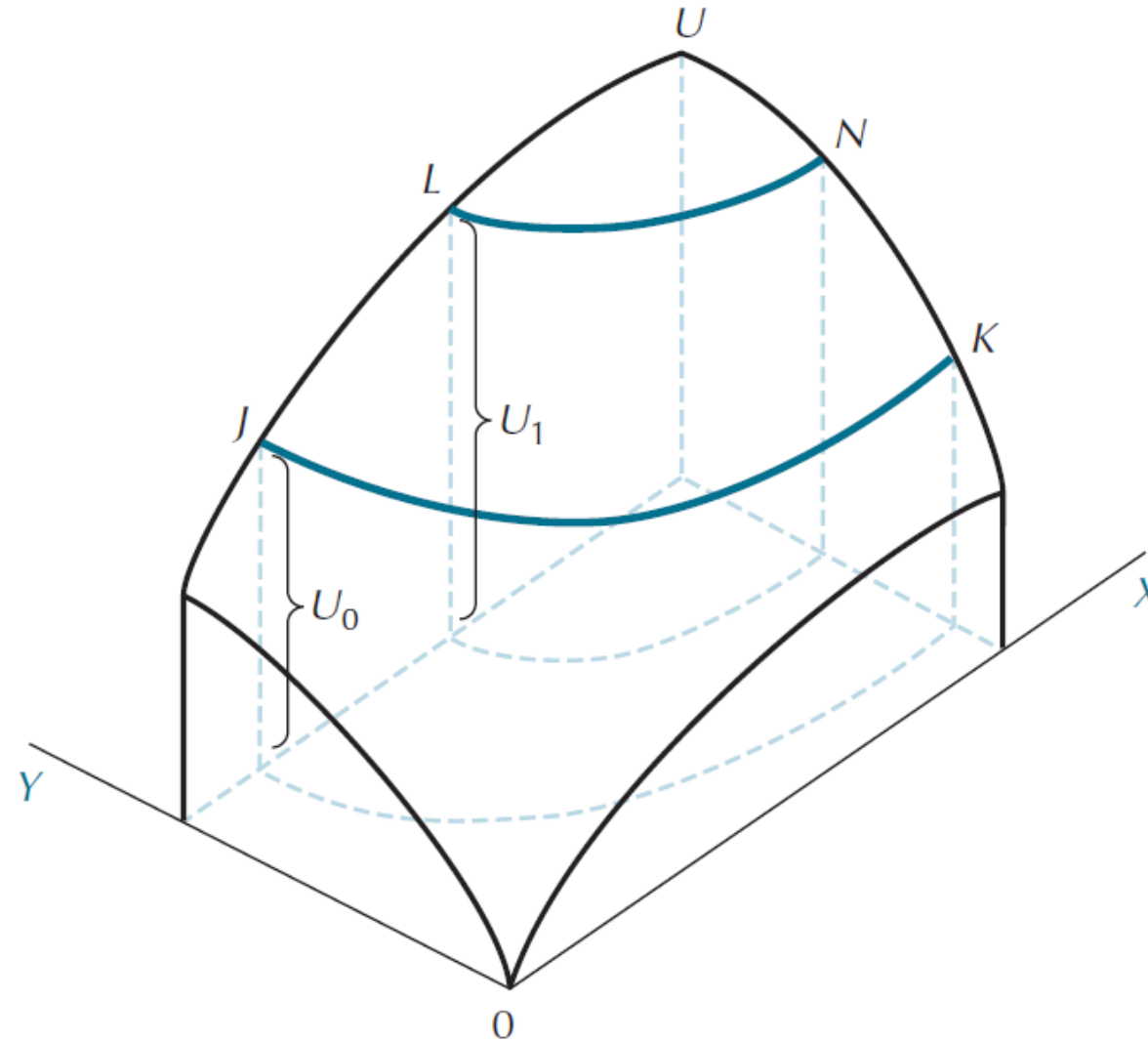


- ▶ Sia $U = C \times A$ una funzione di utilità
- ▶ Ordina le utilità U a seconda delle quantità di C e A
- ▶ Riscrivendo:

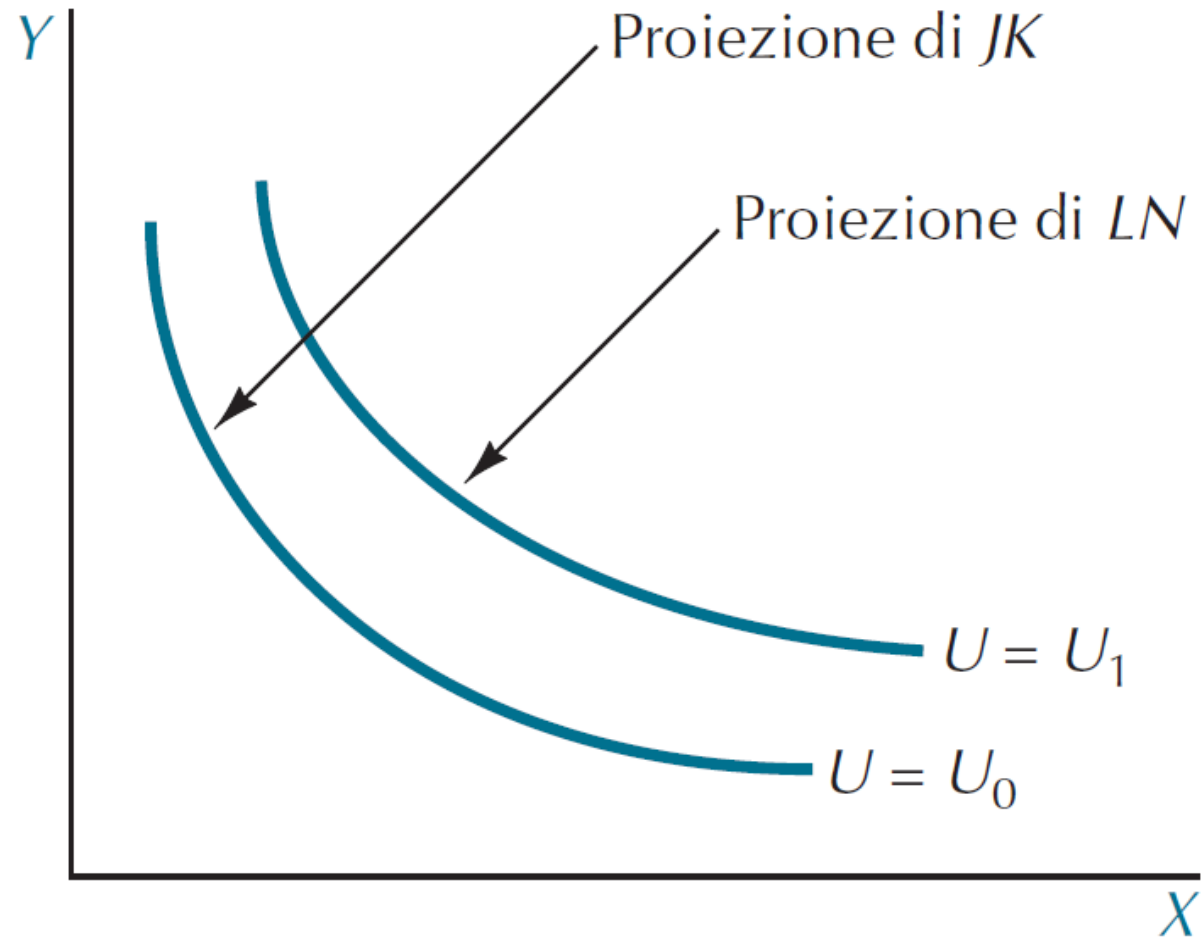
$$A = \frac{U_k}{C}$$

dove U_k è una specifica utilità U di livello k

FUNZIONE DI UTILITÀ TRIDIMENSIONALE



CURVE DI INDIFFERENZA COME PROIEZIONI



LA FUNZIONE DI UTILITÀ

- ▶ L'utilità è un concetto ordinale e non cardinale
- ▶ Differenze nella grandezza dell'utilità non hanno alcuna interpretazione di per se stesse
- ▶ L'utilità tra individui diversi non è in alcun modo comparabile
- ▶ Qualsiasi trasformazione di una funzione di utilità che preservi l'ordinamento originale dei panieri è una rappresentazione altrettanto buona delle preferenze quanto la rappresentazione originaria
- ▶ Esistono anche approcci teorici basati su utilità cardinale
 - ▶ Es: status (conspicuous consumption)

FUNZIONE DI UTILITA'

UTILITA' TOTALE E MARGINALE

- ▶ L'utilità marginale (MU) di un bene è l'utilità addizionale che il consumatore ottiene dal consumo di una unità addizionale di quel bene, quando il consumo di tutti gli altri beni del suo paniere rimane costante
- ▶ Data una funzione $U = f(C, A)$, con U utilità totale

$$\Delta U = MU_C \Delta C + MU_A \Delta A$$

- ▶ Utilità marginale $MU_X = \Delta U / \Delta X = \partial U / \partial X$
 - ▶ Come varia utilità totale al variare di una unità marginale (aggiuntiva) di X tenendo fermo il consumo degli altri beni

UTILITA' TOTALE E MARGINALE

ESEMPIO – Funzione di Utilità: $U(X, Y) = X^{0.5} \times Y^{0.5}$

- ▶ Utilità totale U per un paniere $X = 10, Y = 10 \Rightarrow$

$$U = 10^{0.5} \times 10^{0.5} = 10$$

- ▶ Utilità marginale: qual è la variazione in utilità se X aumenta da 10 a 11?

$$U = 11^{0.5} \times 10^{0.5} \approx 10.47$$

$$MU_X = 10.47 - 10 = 0.47$$

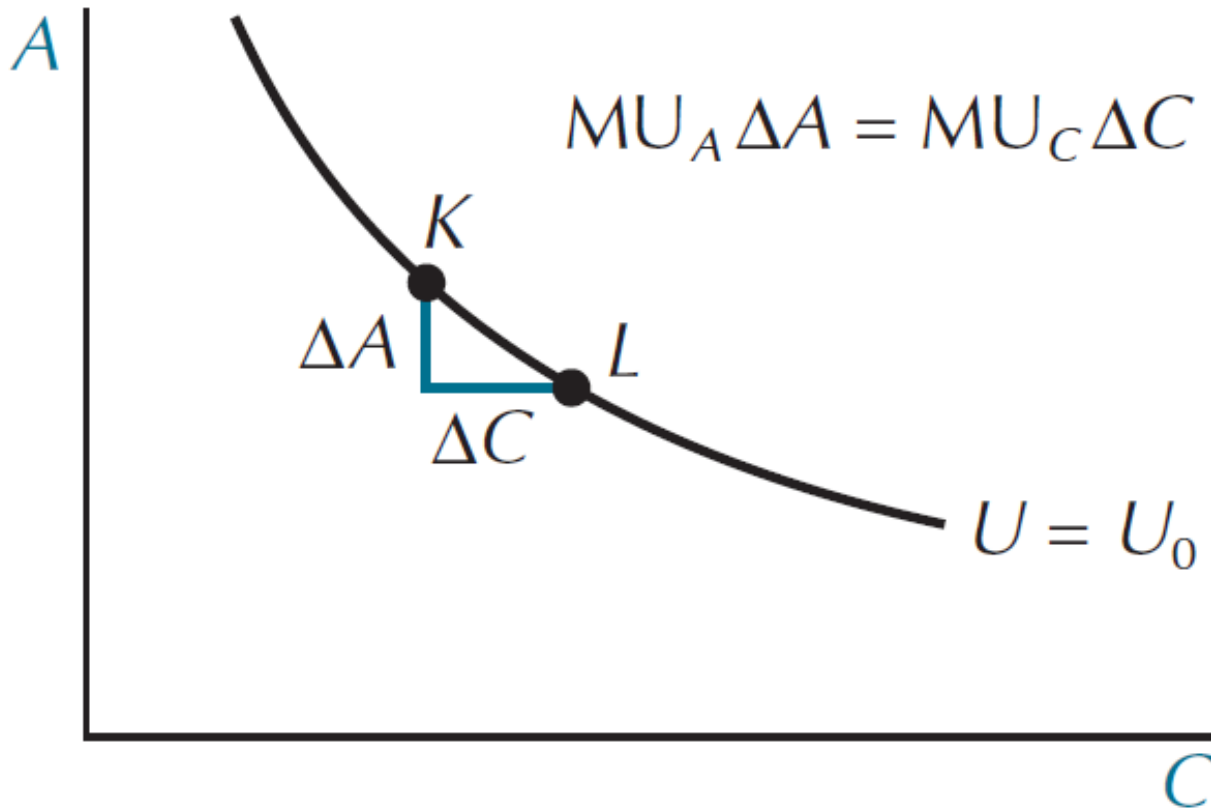
- ▶ In generale

$$MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = 0.5 Y^{0.5} X^{-0.5} = 0.5 \left(\frac{Y}{X}\right)^{0.5}$$

- ▶ Se calcoliamo MU_X in $X = 11$

$$MU_X = 0.5 \left(\frac{10}{11}\right)^{0.5} = 0.47$$

UTILITA' MARGINALE E SMS



- ▶ Data una funzione $U = f(C, A)$

$$\Delta U = MU_C \Delta C + MU_A \Delta A$$

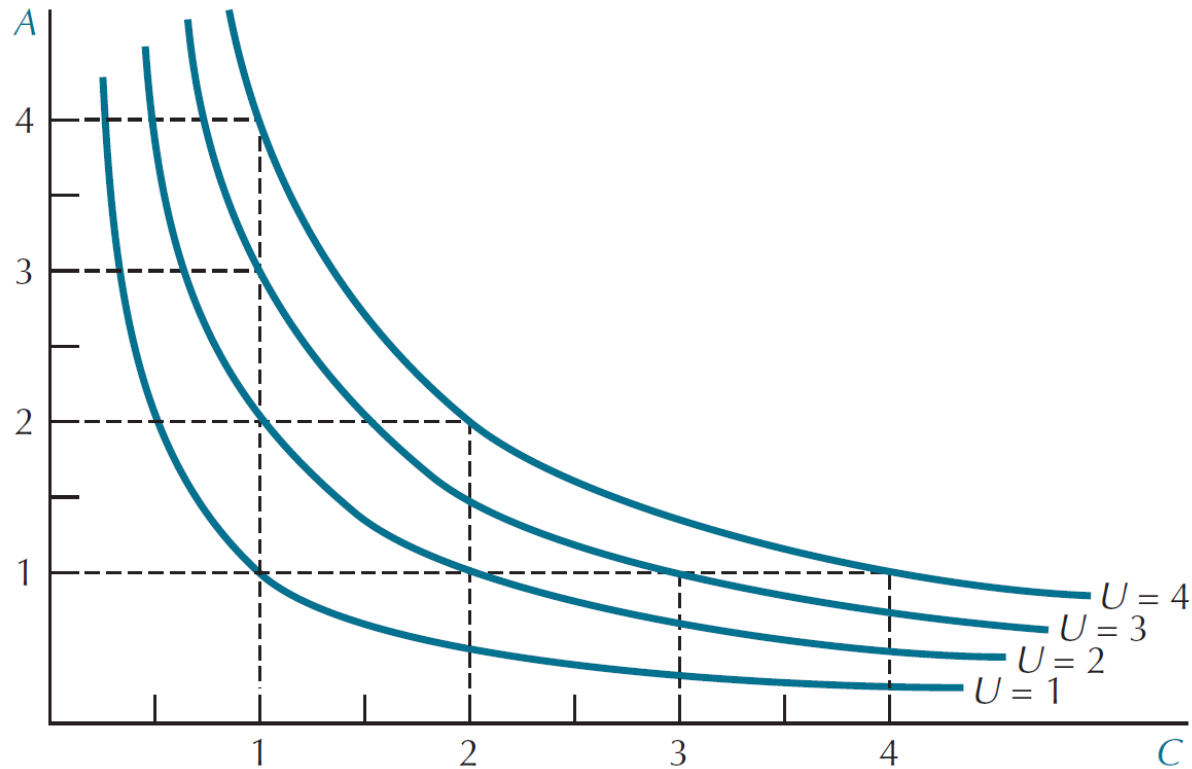
- ▶ Lungo una curva di indifferenza, l'utilità rimane costante: $\Delta U = 0 \Rightarrow$

$$MU_C \Delta C = -MU_A \Delta A \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\Delta A}{\Delta C} \right| = SMS = \frac{MU_C}{MU_A}$$

- ▶ La pendenza di una curva di indifferenza (SMS) risulta pari al rapporto, in valore assoluto, tra le utilità marginali dei beni

FUNZIONE DI UTILITÀ E CURVE DI INDIFFERENZA



- ▶ Funzioni di utilità del tipo

$$U = C^a \times A^b$$

- ▶ Curve di indifferenza convesse

- ▶ Esempio: $U = C \times A$; $a = b = 1$

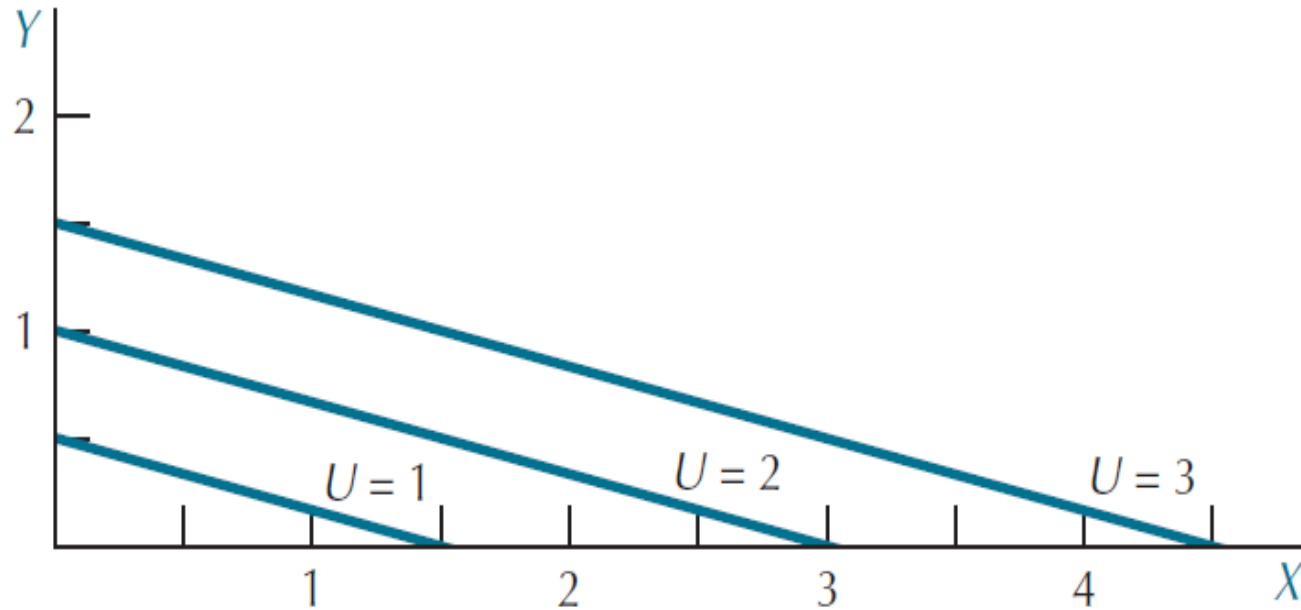
- ▶ $MU_C = \partial U / \partial C = A$;

- ▶ $MU_A = \partial U / \partial A = C$

$$SMS_{CA} = \frac{MU_C}{MU_A} = \frac{A}{C}$$

- ▶ SMS decrescente

FUNZIONE DI UTILITÀ E CURVE DI INDIFFERENZA



- ▶ Funzioni di utilità del tipo

$$U(X, Y) = aX + bY$$

- ▶ Curve indifferenza lineari
- ▶ Beni sostituti
- ▶ Grado sostituibilità dipende dai parametri a e b

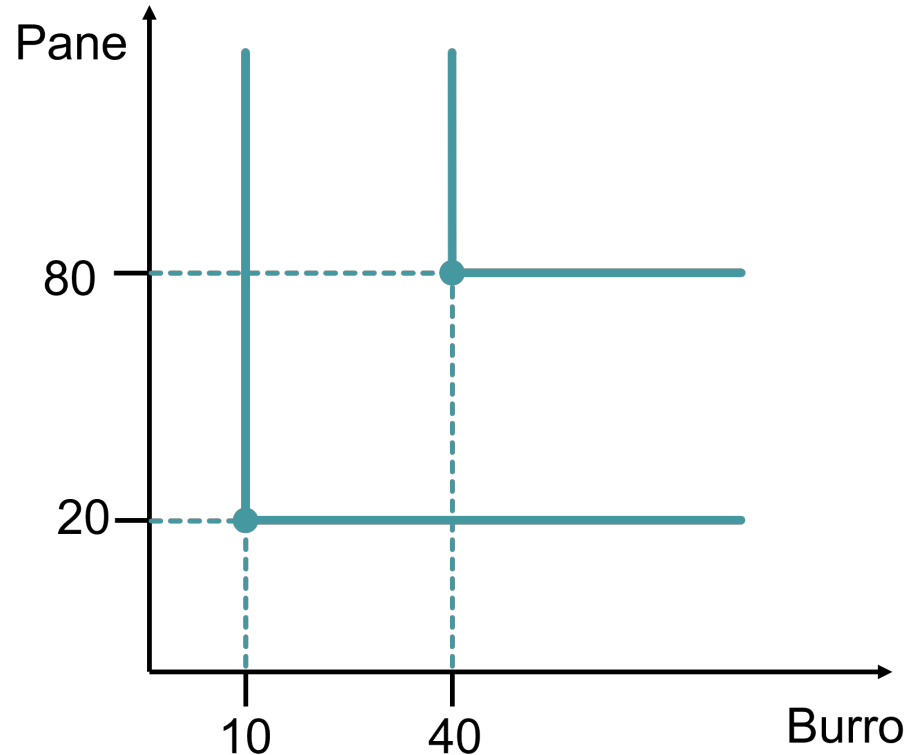
Esempio: $U(X, Y) = (2/3)X + 2Y$

$$MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{2}{3}; MU_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = 2$$

$$SMS_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{2/3}{2} = 1/3$$

- ▶ SMS costante (linea retta)

FUNZIONE DI UTILITÀ E CURVE DI INDIFFERENZA



- ▶ Funzioni di utilità del tipo:
$$U(X, Y) = \min(aX, bY)$$
- ▶ Curve indifferenza a **L**
- ▶ Beni complementi
- ▶ Grado complementarietà dipende dai parametri a e b
- ▶ Esempio: $U(X, Y) = \min(2X, Y)$

SCELTA OTTIMA DEL CONSUMATORE

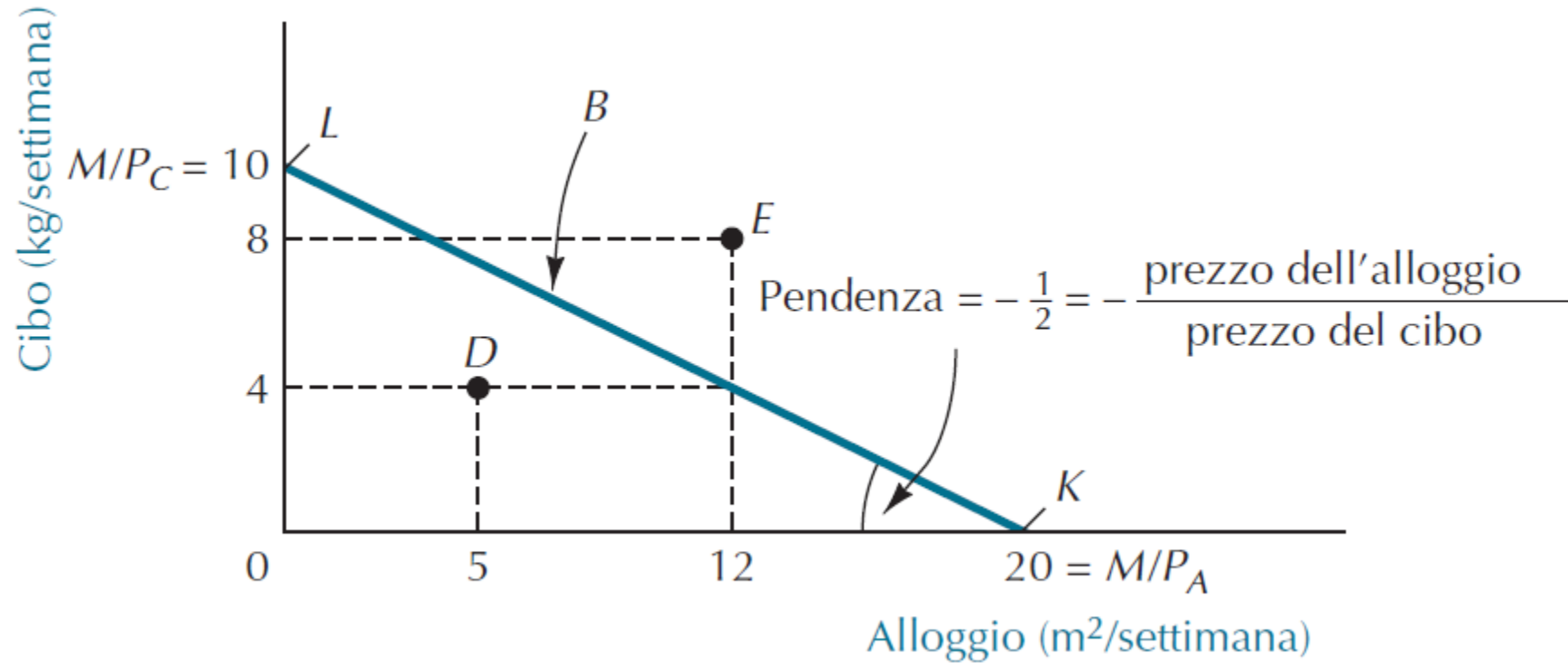
LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE

REGOLA DI OTTIMIZZAZIONE DEL CONSUMO

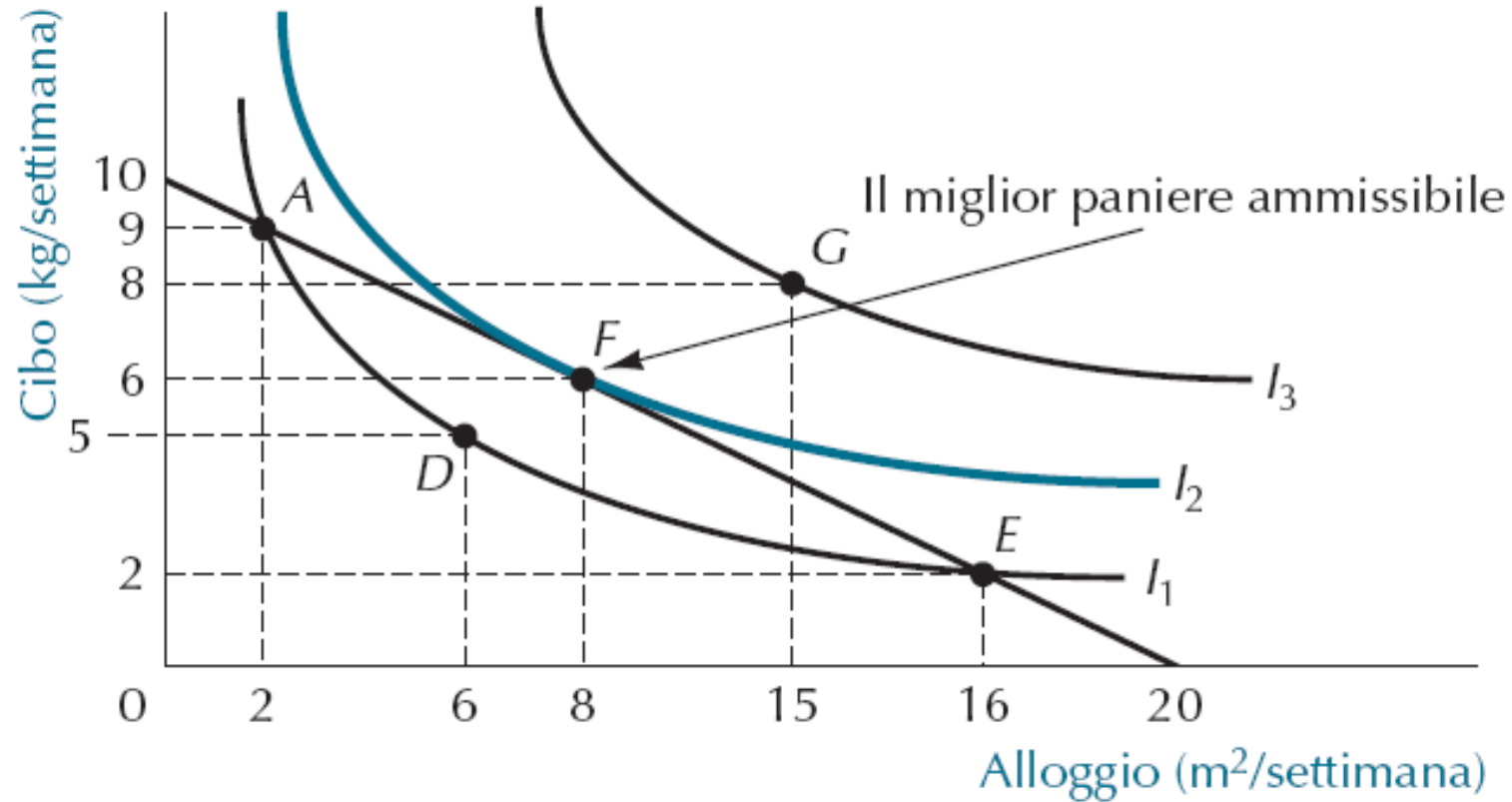
Il consumatore sceglie il paniere di consumo in corrispondenza del quale la curva di indifferenza è tangente al vincolo di bilancio

PERCHE'?

VINCOLO DI BILANCIO



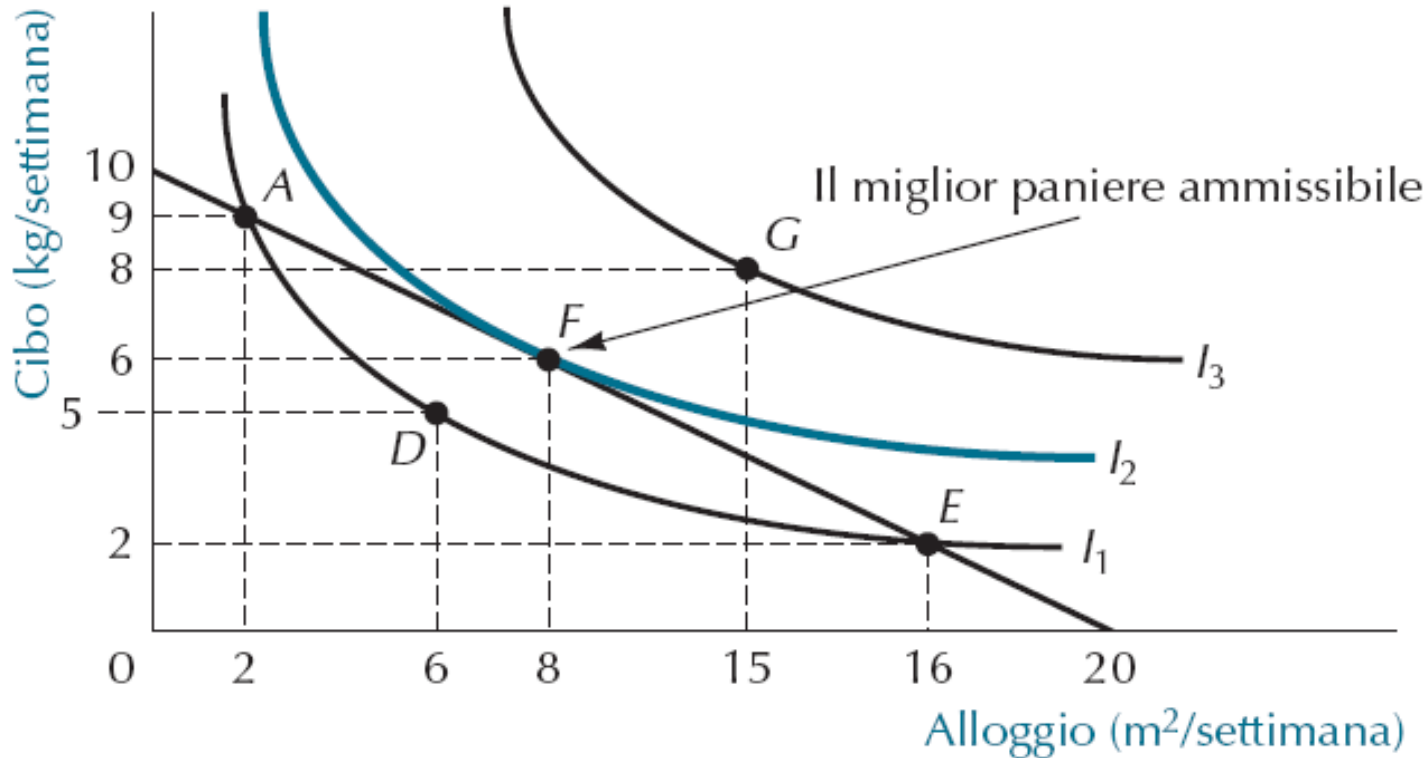
IL MIGLIOR PANIERE AMMISSIBILE



Analisi costi – benefici marginali

- ▶ La pendenza del vincolo di bilancio rappresenta il costo opportunità di una unità aggiuntiva di alloggio in termini di cibo
- ▶ La pendenza della curva di indifferenza (SMS) rappresenta il beneficio di consumare una unità aggiuntiva alloggio rispetto ad una di cibo

PROCESSO DI SCELTA OTTIMA



- ▶ Punto E: pendenza vincolo ($1/2$) > pendenza curva di indifferenza ($1/4$)
- ▶ Il costo opportunità di una unità in più di alloggio è maggiore del beneficio che genera
- ▶ Individuo riduce alloggio e compra più cibo per migliorare benessere

Se la pendenza del vincolo è diversa da quella della curva di indifferenza, si può sempre scegliere un paniere migliore, se *la soluzione è interna*

LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE

SOLUZIONI INTERNE

REGOLA

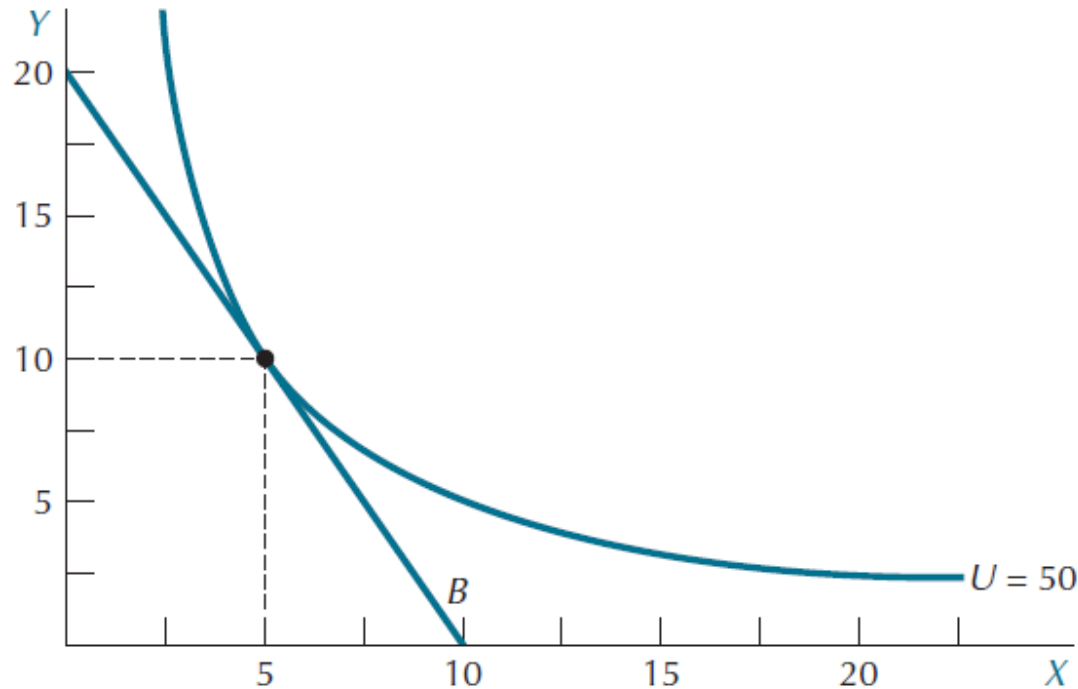
- ▶ Il consumatore sceglie il paniere di consumo in corrispondenza del quale la curva di indifferenza è tangente al vincolo di bilancio
- ▶ La condizione di ottimo implica l'eguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione e il prezzo relativo dei beni

$$SMS_{AC} = \frac{MU_A}{MU_C} = \frac{P_A}{P_C}$$

- ▶ Nel punto di ottimo, il saggio al quale il consumatore è disposto a scambiare i beni tra di loro è lo stesso al quale i due beni si possono scambiare nel mercato

LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE

SOLUZIONI INTERNE



Step 1: condizione di ottimo

SMS = prezzo relativo

$$SMS_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Step 2: sostituire (1) in vincolo

$$M = P_X X + P_Y Y$$

Esempio: $U = XY$, $P_X = 4$, $P_Y = 2$, $M = 40$

► Step 1: $SMS_{XY} = \frac{Y}{X}$; $\frac{P_X}{P_Y} = 2 \Rightarrow Y = 2X$

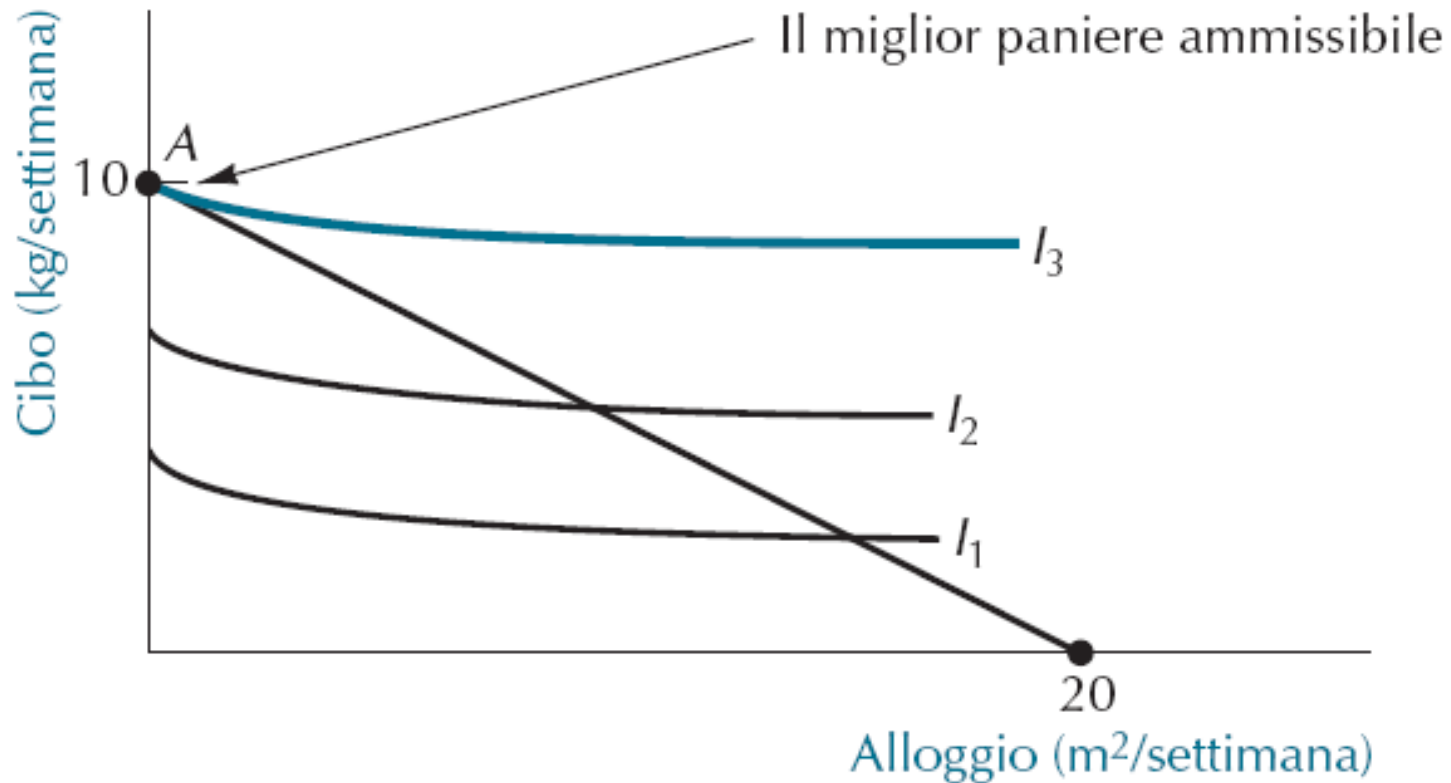
► Step 2: $40 = 4X + 2Y = 4X + 2(2X) \Rightarrow 40 = 8X \Rightarrow X^* = 5; Y^* = 2X = 10$

LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE

SOLUZIONI D'ANGOLO

- ▶ In alcuni casi non esiste un punto di tangenza tra vincolo di bilancio e curva di indifferenza (soluzione interna)
- ▶ In questo caso il SMS è sempre superiore o inferiore rispetto alla pendenza del vincolo
- ▶ La soluzione ottima prevede che il consumatore consumi solo uno dei due beni
- ▶ Le soluzioni d'angolo si verificano più spesso per i beni altamente sostituibili

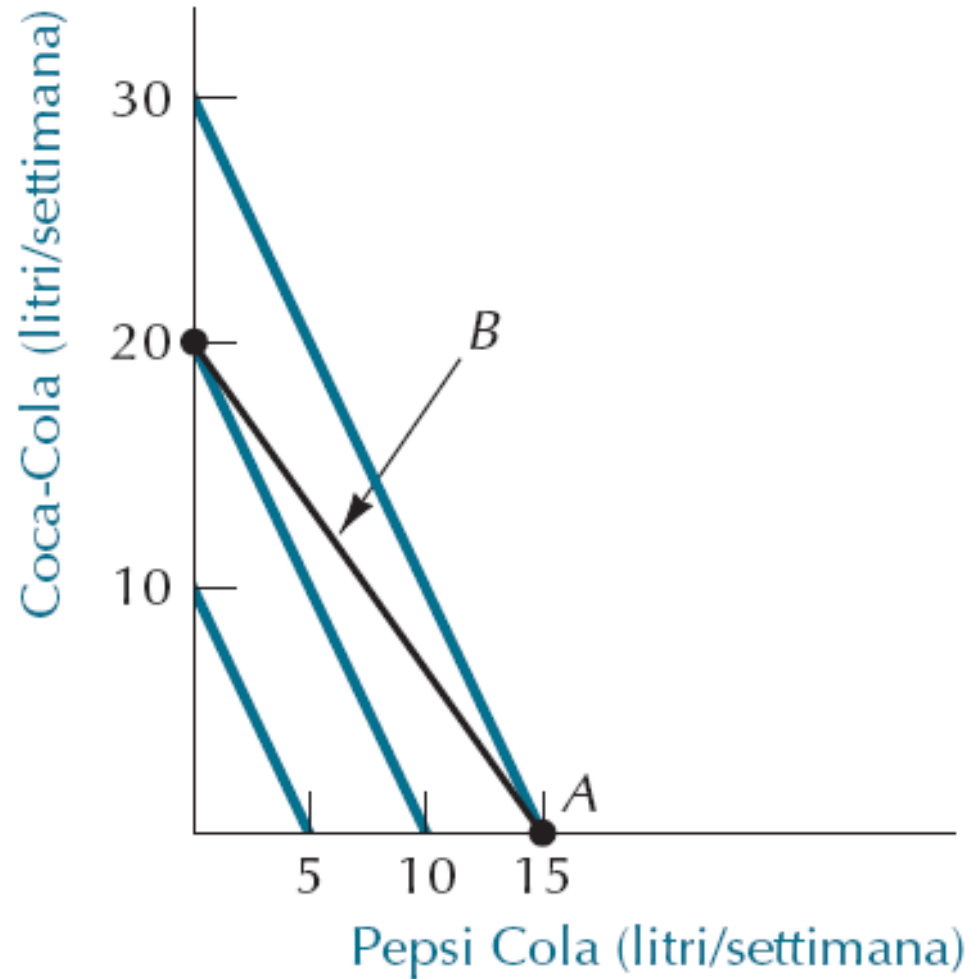
SOLUZIONI D'ANGOLO



In **(A)**: pendenza delle curve di indifferenza sempre inferiore a pendenza del vincolo

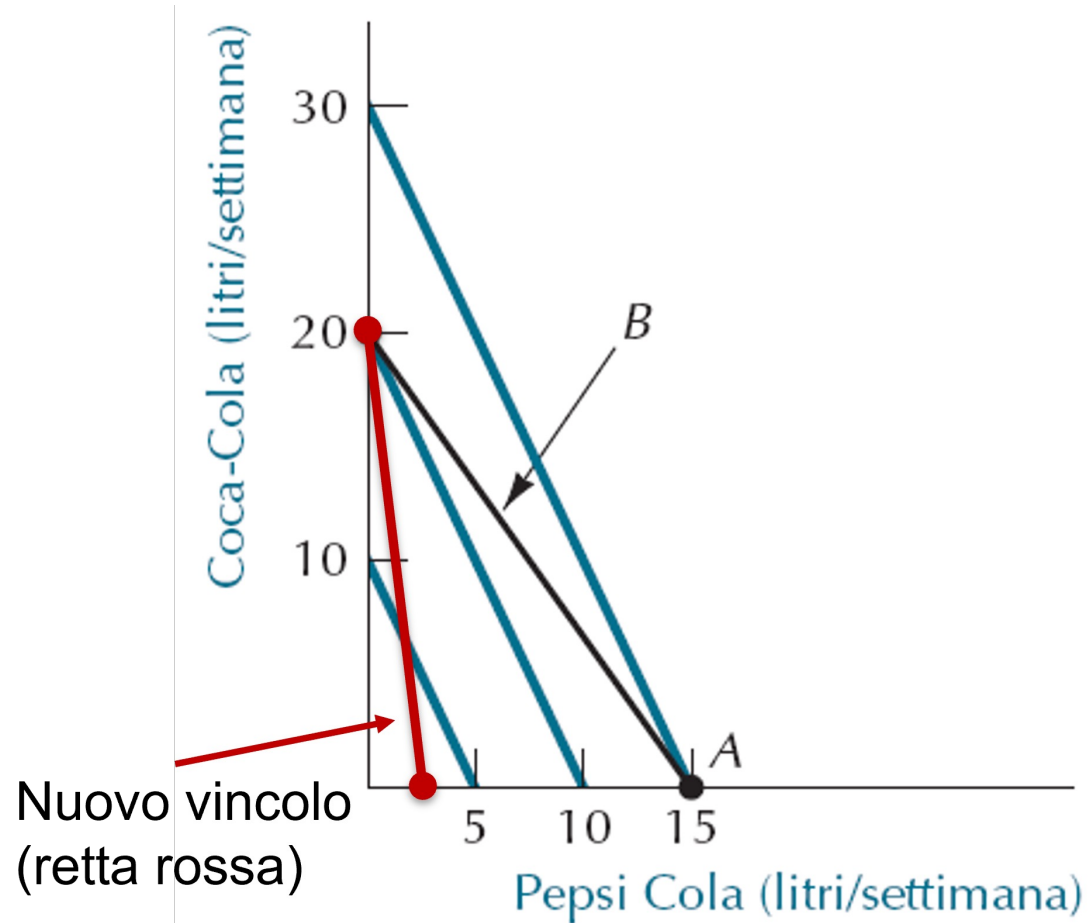
- ▶ Consumatore è disposto a rinunciare ad una quantità di cibo inferiore a quella necessaria a comprare una unità di alloggio
- ▶ Quando il SMS tra alloggio e cibo è sempre inferiore alla pendenza del vincolo, la scelta migliore è quella di acquistare solo cibo

LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE PERFETTI SOSTITUTI



SMS > Pendenza del vincolo
il consumatore sceglie solo
bene su asse X (Pepsi)

LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE PERFETTI SOSTITUTI



$SMS < Pendenza\ del\ vincolo$
Il consumatore sceglie solo
bene su asse Y (Coca-cola)

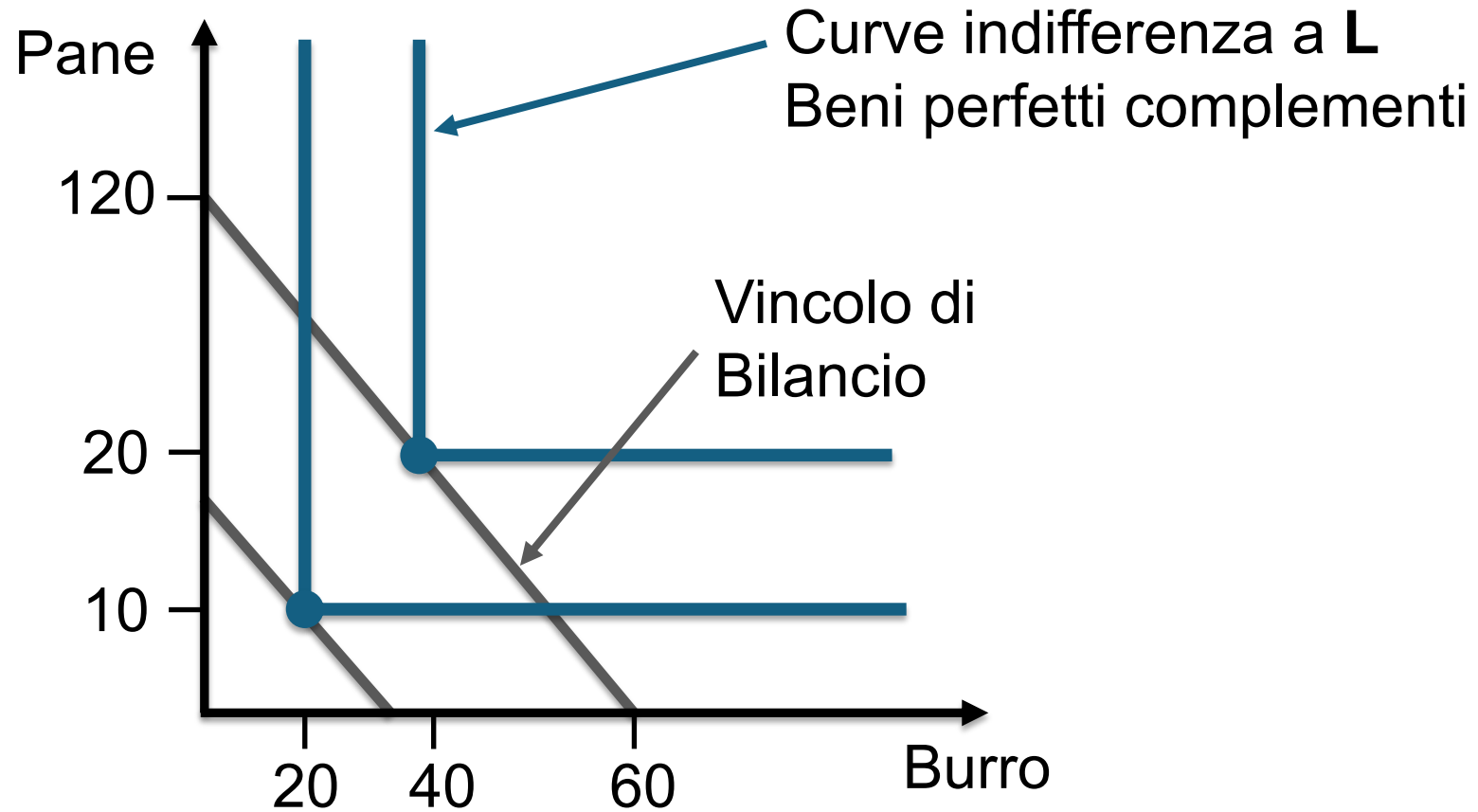
IL PANIERE OTTIMO

PERFETTI SOSTITUTI (RECAP)

Regola generale

- ▶ Con perfetti sostituti, le curve di indifferenze sono rette
 - ▶ SMS costante, non più decrescente
- ▶ Se curve indifferenza sono più inclinate del vincolo di bilancio
 - ▶ $SMS > \text{Rapporto prezzi}$
 - ▶ Scelta solo paniere su asse orizzontale
- ▶ Se curve indifferenza sono meno inclinate del vincolo di bilancio
 - ▶ $SMS < \text{Rapporto prezzi}$
 - ▶ Scelta solo paniere su asse verticale

LA SCELTA DEL PANIERE MIGLIORE PERFETTI COMPLEMENTI



SCELTA OTTIMA – METODO DI RISOLUZIONE (1)

CONDIZIONI DI OTTIMO + VINCOLO DI BILANCIO

$$U = XY, P_X = 4, P_Y = 2, M = 40$$

► Step 1: condizione di ottimo

$$SMS_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{Y}{X}$$

► SMS = rapporto dei prezzi

$$SMS_{XY} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{Y}{X} = 2 \Rightarrow \mathbf{Y = 2X}$$

► Step 2: sostituire (1) in vincolo

$$M = P_X X + P_Y Y \Rightarrow$$

$$40 = 4X + \mathbf{2Y} = 4X + 2(\mathbf{2X}) \Rightarrow 40 = 8X \Rightarrow$$

$$\mathbf{X^* = 5, Y^* = 2X = 10}$$

SCELTA OTTIMA – METODO DI RISOLUZIONE (2)

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Problema di massimizzazione vincolata

- ▶ Max Utilità $U(X, Y)$; es: $U(X, Y) = XY$
- ▶ Sotto il Vincolo $M = P_X X + P_Y Y$; es: $P_X = 4, P_Y = 2, M = 40$

▶ Step 1: scrivere la Funzione Lagrangiana \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \underbrace{U(X, Y)}_{\text{Funzione Obiettivo}} - \underbrace{\lambda}_{\text{Moltiplicatore di Lagrange}} \underbrace{(P_X X + P_Y Y - M)}_{\text{Vincolo}}$$

- ▶ λ : moltiplicatore di Lagrange (notare segno e vincolo)
- ▶ Valore marginale di allentare il vincolo di bilancio
- ▶ Misura l'utilità marginale che il consumatore riceve se varia il reddito

SCELTA OTTIMA – METODO DI RISOLUZIONE (2)

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Massimizzare la Funzione Lagrangiana

$$\max_{X,Y,\lambda} \mathcal{L} = U(X, Y) - \lambda(P_X X + P_Y Y - M)$$

► **Step 2: condizioni**

$$1) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} - \lambda P_X = 0 \implies \frac{\partial U}{\partial X} = \lambda P_X$$

$$2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Y} - \lambda P_Y = 0 \implies \frac{\partial U}{\partial Y} = \lambda P_Y$$

$$3) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - P_X X - P_Y Y = 0 \implies M = P_X X + P_Y Y$$

Sistema di 3 equazioni in 3 incognite X, Y, λ

SCELTA OTTIMA – METODO DI RISOLUZIONE (2)

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

- ▶ **Step 3: risoluzione sistema equazioni 1-3**

- ▶ Dividere equazioni 1 e 2 \Rightarrow

$$\frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{\lambda P_X}{\lambda P_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

- ▶ Usare vincolo da equazione 3 (come in metodo 1)

SCELTA OTTIMA – METODO DI RISOLUZIONE (2)

SOSTITUZIONE DIRETTA DEL VINCOLO IN UTILITA'

- ▶ **Step 1:** esplicitare vincolo in funzione di uno dei due beni

$$40 = 4X + 2Y \Rightarrow Y = 20 - 2X$$

- ▶ **Step 2:** sostituire vincolo in U

$$\hat{U}(X) = X(20 - 2X)$$

- ▶ **Step 3:** trovare punto di massimo della funzione $\hat{U}(X)$

- ▶ Derivata prima uguale a zero

$$\frac{d\hat{U}(X)}{dX} = 20 - 4X = 0 \Rightarrow X^* = 5$$

- ▶ Condizioni del secondo ordine per un max: derivata seconda negativa

$$\frac{d^2\hat{U}(X)}{dX^2} = -4 < 0$$