Per la matematica la vita non è un fenomeno rilevante nei suoi aspetti biologici, ma solo relativamente alla misurazione della sua durata.

La vita è schematizzabile come una sequenza di intervalli di tempo di lunghezza infinitesima: il primo è quello in cui si verifica l'evento nascita, l'ultimo quello in cui si verifica l'evento decesso.

La durata di vita a priori è invece una variabile casuale continua, essendo aleatorio il momento del decesso. Proprio perché è associato a una variabile continua, il decesso non è un evento puntuale, ma si verifica in un intervallo temporale

COLLETTIVITÀ: insieme di individui che possiede una o più caratteristiche comuni qualitative (come l'appartenenza a una certa popolazione) o quantitative (come per esempio l'età).

collettività CHIUSA gli appartenenti alla collettività possono solo uscire.

Collettività APERTA possono entrare nella collettività nuovi membri.

Una collettività può essere SUDDIVISA IN GRUPPI o UNITARIA

Noi considereremo il caso di una collettività unitaria chiusa soggetta a una sola causa di eliminazione e ammetteremo che tutte le funzioni biometriche definite soddisfino le condizioni di continuità e derivabilità.

CONVENZIONI

Istante di stipulazione del contratto ⇒ ORIGINE

unità di misura del tempo l'ANNO

l'anno h è il periodo di tempo compreso tra le epoche $h-1$ e h

calcolo dei premi assicurativi che l'assicurato deve versare

→ Tasso annuo di interesse

→ distribuzione di probabilità della durata residua di vita

→ BASE TECNICA

La base tecnica è fissata unilateralmente dalla compagnia di assicurazione

FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA

è la funzione che fornisce le probabilità, per un individuo di età $x=0$, ovvero alla nascita, di essere in vita tra un anno, due anni, ... fino all'età ω, età massima raggiungibile per la collettività o ETÀ ESTREMA

Si definiscono le seguenti probabilità:

$_np_x$ la probabilità che un individuo, o una testa di età x, sia ancora in vita all'età $x+n$

$_nq_x = 1 - {_np_x}$ la probabilità che un individuo, o una testa, di età x muoia entro l'età $x+n$.

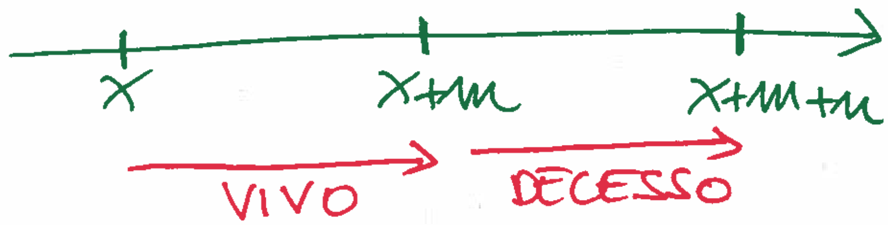
Se $n=1$ tali probabilità si chiamano, rispettivamente, TASSO ANNUO DI SOPRAVVIVENZA e TASSO ANNUO DI MORTALITÀ e si indicano con i simboli p_x e q_x.

Fissata l'età x, i valori di $_np_x$ risultano decrescenti in n mentre quelli di $_nq_x$ sono crescenti.
Inoltre

$$_{\omega-x}p_x = 0 \qquad e \qquad {}_{\omega-x}q_x = 1 \qquad \forall x$$

La probabilità che un individuo di età x sopravviva fino all'età $x+m$ per morire, poi, tra le età $x+m$ e $x+m+n$ (cioè entro n anni) è

$$_{m/n}q_x = {}_mp_x \cdot {}_nq_{x+m}$$



Due eventi si dicono compatibili se la realizzazione dell'uno non esclude il realizzarsi dell'altro. In particolare, l'essere in vita all'età $x+n-1$ è compatibile con l'essere in vita all'età $x+n$.

La sequenza di eventi l'individuo di età x permane in vita all'età $x+h$ con $h=1,2,\dots,n$ è un insieme di EVENTI COMPATIBILI. La relativa probabilità di sopravvivenza, applicando il PRINCIPIO DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE, è data da:

$$ {}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot p_{x+3} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} $$

La morte di un individuo, entro una data epoca, si verifica una sola volta in uno specifico momento; la relativa probabilità può essere calcolata applicando il PRINCIPIO DELLE PROBABILITÀ TOTALI

$$ {}_{/n}q_x = q_x + p_x \cdot q_{x+1} + {}_2p_x \, q_{x+2} + \ldots + {}_{n-1}p_x \, q_{x+n-1} $$

La durata aleatoria di vita di un neonato (soggetto di età 0) è una variabile casuale continua

$$T_0 = x \qquad x \in]0, \omega]$$

L'intervallo di definizione è aperto a sinistra perchè si considera un neonato partorito vivo.

Alla variabile T_0 si associa la funzione di ripartizione

$$F_0(x) = P(T_0 \leq x)$$

La variabile T_0 assume un valore minore o uguale a x se il neonato muore entro l'età x. Indicato con ${}_xq_0$ la probabilità di tale evento è

$$F_0(x) = {}_xq_0$$

$$\lim_{x \to 0^+} F_0(x) = 0 \qquad F_0(\omega) = 1$$

Si indichi con l_x con $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$ il numero di sopravviventi della collettività all'età intera x. Per un individuo di età $x=0$ (alla nascita), sia T_0 la durata della sua vita in anni. Si definisce con

$$ {}_x p_0 = P(T_0 > x) = S(x) = \frac{l_x}{l_0} $$

la probabilità che la durata di vita di un individuo alla nascita sia maggiore di x. Poiché la collettività è chiusa, la funzione $S(x)$ decresce dal valore massimo $S(0) = 1$ al valore minimo $S(\omega) = l_\omega = 0$

$S(x)$ è detta FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA.

Le espressioni analitiche delle funzioni di sopravvivenza generalmente utilizzate nelle tecniche attuariali sono:

- forza di mortalità costante
- legge di De Moivre
- legge di Gompertz
- legge di Makeham
- legge di Perks

Le probabilità di sopravvivenza e di morte sono strettamente collegate, poichè all'età x un neonato o è vivo o morto; quindi per il teorema della probabilità totale è

$$ {}_xp_0 + {}_{/x}q_0 = 1 $$

cioè

$$ S(x) + F_0(x) = 1 $$

Le probabilità di morte non sono necessariamente relative ad intervalli di tempo che iniziano nel momento della nascita. Si possono calcolare anche probabilità di morte differite.
La probabilità di morte tra le età x e $x+T$ è

$$ {}_{x|T}q_0 = P(x < T_0 \leq x+T) = F_0(x+T) - F_0(x) = s(x) - s(x+T) $$

Il discorso può essere generalizzato per un soggetto di età $x>0$.
La durata di vita residua di un soggetto di età x è una variabile casuale continua

$$ T_x = \tau \quad , \quad \tau \in]0, \omega - x] $$

$$ F_x(\tau) = P(T_x \leq \tau) $$

La variabile T_x assume un valore minore o uguale a τ se il soggetto di età x muore entro l'età $x+\tau$. Indicata con ${}_{\tau}q_x$ la probabilità di tale evento, è

$$ F_x(\tau) = {}_{\tau}q_x $$

un soggetto di età x muore entro l'età $x+\tau$ $\cong$ un neonato muore entro l'età $x+\tau$ subordinatamente al fatto di essere vivo all'età x

$$ {}_{\tau}q_x = P(T_x \le \tau) = P(T_0 \le x+\tau \mid T_0 > x) = \frac{P(x < T_0 \le x+\tau)}{P(T_0 > x)} = $$

$$ = \frac{F_0(x+\tau) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = \frac{1 - s(x+\tau) - [1 - s(x)]}{1 - [1 - s(x)]} = \frac{s(x) - s(x+\tau)}{s(x)} = $$

$$ = 1 - \frac{s(x+\tau)}{s(x)} $$

Il soggetto di età x o è vivo all'età $x+T$ o muore entro il tempo T

$$ {}_Tp_x + {}_Tq_x = 1 $$

da cui si ricava la probabilità che il soggetto di età x sia vivo all'età $x+T$

$$ {}_Tp_x = 1 - {}_Tq_x = 1 - \left[1 - \frac{s(x+T)}{s(x)}\right] = \frac{s(x+T)}{s(x)} $$

La probabilità di morte differita

$$ {}_{T/z}q_x = P(T < T_x \le T+z) = F_x(T+z) - F_x(T) $$

può essere calcolata in tre modi

$$ {}_{T+z}q_x - {}_Tq_x = {}_Tp_x - {}_{T+z}p_x = {}_Tp_x \cdot {}_zq_{x+T} = \frac{s(x+T) - s(x+T+z)}{s(x)} $$

La probabilità per l'individuo di morire entro x anni dalla nascita è

$$_{x}q_0 = 1 - {}_{x}p_0 = P(T_0 \leq x) = \frac{l_0 - l_x}{l_0} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, \omega$$

Indicando con $_{x}d_0 = l_0 - l_x$ il numero di persone decedute tra le età 0 e x si ha

$$_{x}q_0 = \frac{_{x}d_0}{l_0}$$

Se la testa ha età x, la probabilità di sopravvivenza all'età x+n diventa

$$_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

e analogamente la probabilità di morte entro n anni è

$$_{n}q_x = \frac{_{n}d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Tutti questi valori si trovano tabulati nelle Tavole ISTAT

TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA

Sia

T_0 v.a. durata aleatoria di vita alla nascita

Si definisce

Funzione di sopravvivenza $\quad S(T) = P(T_0 > T) \quad T \geq 0$

Def. $\quad l_x = l_0 \, S(x) \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \omega$

dove l_0 è detto radice della tavola ed è fissato opportunamente per esempio $l_0 = 100\,000$.

$\boxed{l_x}$ esprime il numero atteso di individui in vita all'età x, a partire da una collettività di l_0 neonati, nell'ipotesi che la sopravvivenza sia descritta dalla funzione di sopravvivenza $S(x)$

Def. $d_x = l_x - l_{x+1} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \omega - 1$

d_x esprime il numero atteso di decessi nell'intervallo di età $]x, x+1]$

Si definiscono

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

probabilità che un individuo in vita all'età x, deceda entro l'età $x+1$

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

probabilità che un individuo in vita all'età x, sia in vita all'età $x+1$

Inoltre

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

probabilità che un individuo in vita all'età x, sia in vita all'età $x+n$

$$_n q_x = 1 - {_n p_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

probabilità che un individuo in vita all'età x, deceda entro l'età $x+n$