MICROECONOMIA

Corso di Laurea in Economia Aziendale
(Cognomi E-N)

APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA

Vincenzo Lombardo
Dipartimento di Studi Aziendali ed Economici

OBIETTIVO DI QUESTA LEZIONE

- Revisione di elementi di base di analisi matematica
- Alcune semplici metodologie e tecniche utili per affrontare al meglio il corso di Microeconomia
- Nota importante: queste slide ovviamente non possono in alcun modo sostituire il corso di Matematica

ARGOMENTI DELLA LEZIONE

- Relazioni funzionali
- La derivata
- Come si calcola una derivata
- Problemi di massimo e di minimo

RELAZIONI FUNZIONALI

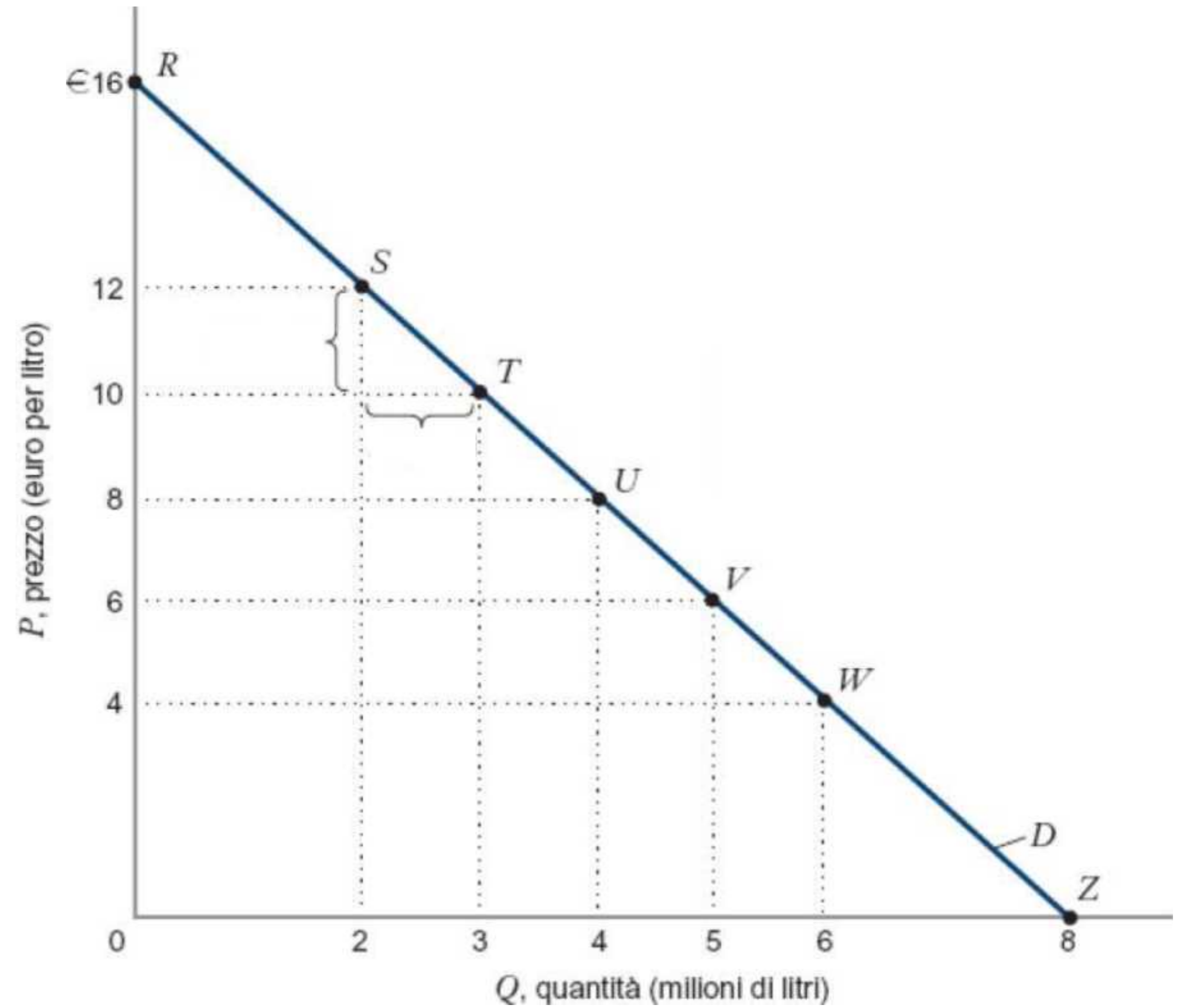
RELAZIONI TRA VARIABILI

- L'analisi economica richiede spesso di capire in che modo le variabili economiche si relazionino tra di loro.

- Tre modi per descrivere le relazioni fra variabili:
  1. attraverso dei grafici
  2. attraverso delle tabelle
  3. attraverso delle funzioni algebriche.

ESEMPIO: DOMANDA DI VERNICI

PUNTI DEL GRAFICO	PREZZO DELLA VERNICE (€ per litro)	MILIONI DI LITRI VENDUTI PER ANNO
S	12	2
T	10	3
U	8	4
V	6	5
W	4	6

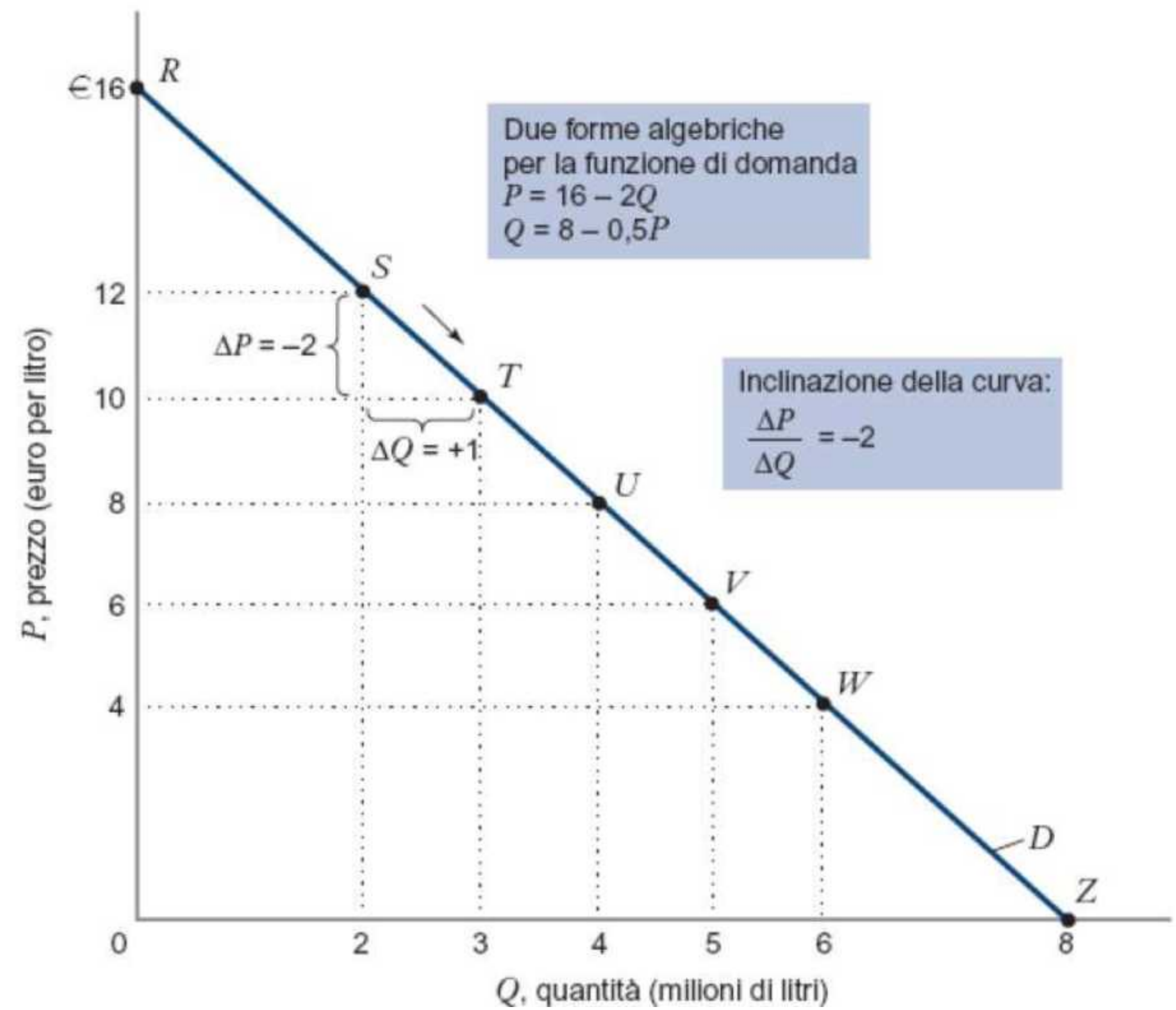


EQUAZIONE DI DOMANDA E EQUAZIONE DI DOMANDA INVERSA

- Equazione di domanda: $Q = f(P)$
  - Nel nostro caso: $Q = 8 - 0.5 \times P$
  - Esempio: se $P = 8$,
    $Q = 8 - 0.5 \times 8 = 4$

- Domanda inversa: $P = f(Q)$
  - Nel nostro caso: $P = 16 - 2 \times Q$
  - Esempio: se $Q = 4$,
    $P = 16 - 2 \times 4 = 8$

- Equazione e grafico della retta



EQUAZIONE e GRAFICO DELLA RETTA

L'equazione di una retta è data da

$$y = m * x + b$$

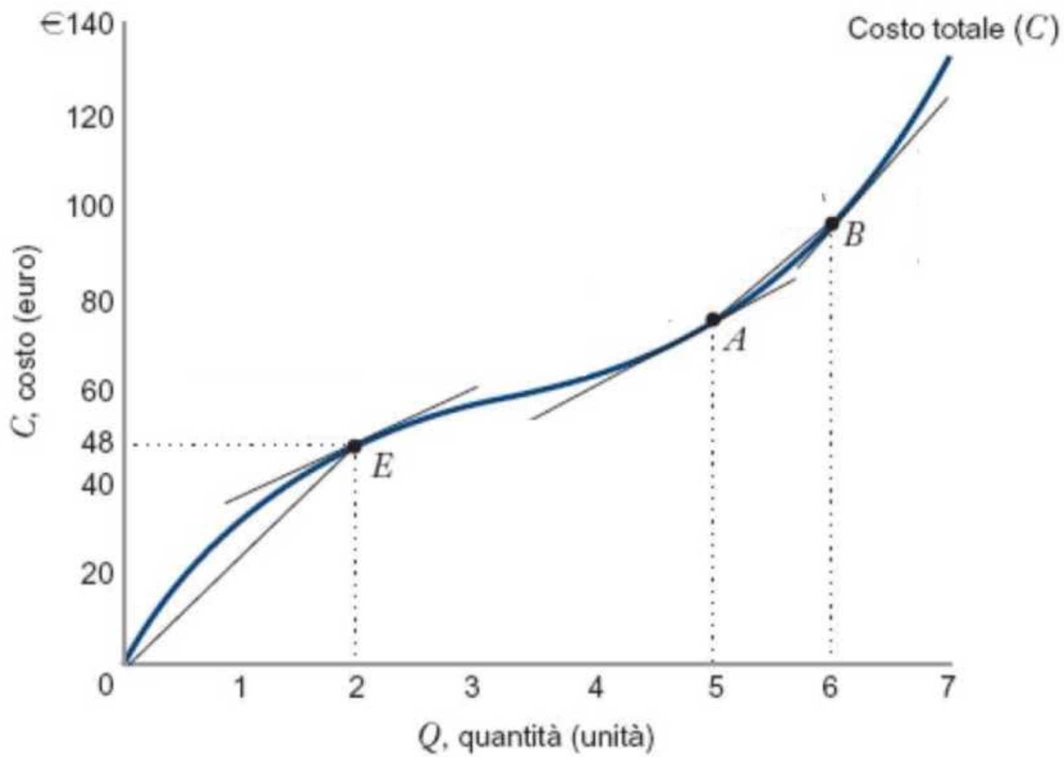
dove

- i valori di y sono riportati sull'asse verticale
- i valori di x sono riportati sull'asse orizzontale
- m è l'inclinazione della retta
- b è l'intercetta verticale

Nel nostro caso: $y \rightarrow P$; $x \rightarrow Q$; $m = -2$; $b = 16$.

ALTRE FUNZIONI
FUNZIONE DEL COSTO TOTALE

$$C(Q) = Q^3 - 10\,Q^2 + 40Q$$



(1) Quantity Produced (units) Q	(2) Total Cost ($) C
0	0
1	31
2	48
3	57
4	64
5	75
6	96
7	133

COSTO MARGINALE

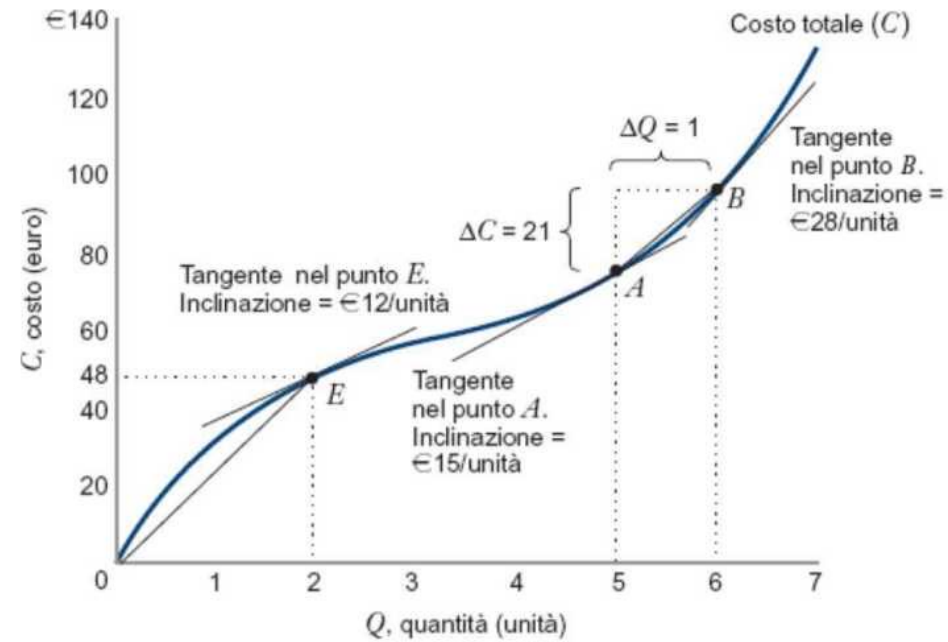
- Il costo marginale misura la variazione nella variabile dipendente a fonte di una variazione unitaria nel valore della variabile indipendente.

- Il costo marginale, per esempio, rappresenta la variazione del costo totale dovuta ad un incremento unitario della produzione ed è quindi dato da $\Delta C / \Delta Q$.

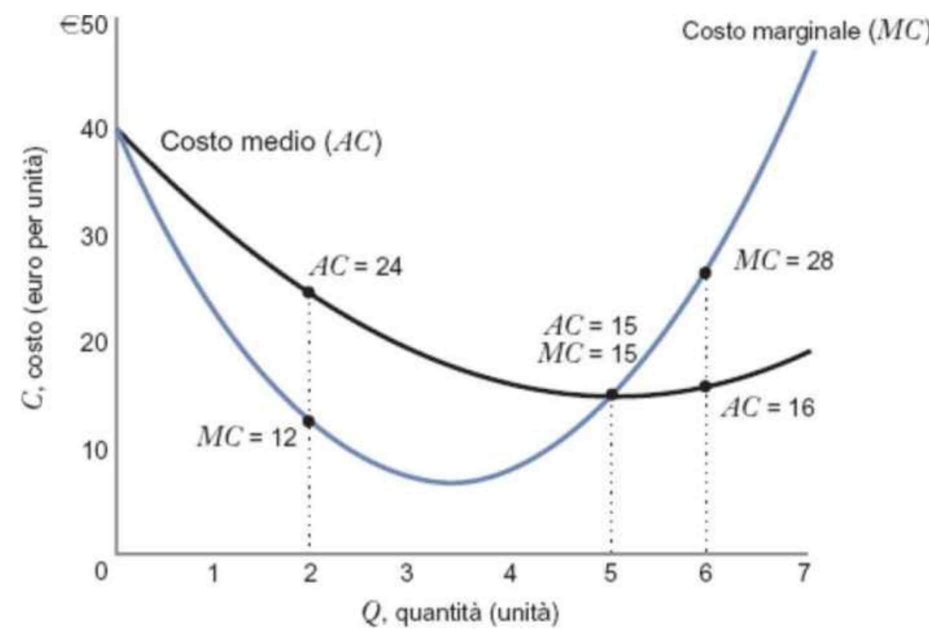
(1) Quantity Produced (units) Q	(2) Total Cost (\$) C	(3) "Arc" Marginal Cost (\$/unit) $C(Q) \cdot C(Q \cdot 1)$
0	0	
		$C(1) \cdot C(0) = 31$
1	31	
		$C(2) \cdot C(1) = 17$
2	48	
		$C(3) \cdot C(2) = 9$
3	57	
		$C(4) \cdot C(3) = 7$
4	64	
		$C(5) \cdot C(4) = 11$
5	75	
		$C(6) \cdot C(5) = 21$
6	96	
		$C(7) \cdot C(6) = 37$
7	133	

COSTO TOTALE, COSTO MARGINALE E COSTO MEDIO

(1) Quantity Produced (units) Q	(2) Total Cost (\$) C	(3) "Arc" Marginal Cost (\$/unit) $C(Q) \cdot C(Q \cdot 1)$	(4) "Point" Marginal Cost (\$/unit) dC/dQ	(5) Average Cost (\$/unit) C/Q
0	0		40	
		$C(1) \cdot C(0) = 31$		
1	31		23	31
		$C(2) \cdot C(1) = 17$		
2	48		12	24
		$C(3) \cdot C(2) = 9$		
3	57		7	19
		$C(4) \cdot C(3) = 7$		
4	64		8	16
		$C(5) \cdot C(4) = 11$		
5	75		15	15
		$C(6) \cdot C(5) = 21$		
6	96		28	16
		$C(7) \cdot C(6) = 37$		
7	133		47	19



(a)



(b)

VALORE MEDIO E VALORE MARGINALE

Dato che il valore marginale esprime il saggio al quale varia il valore totale, è possibile verificare che:

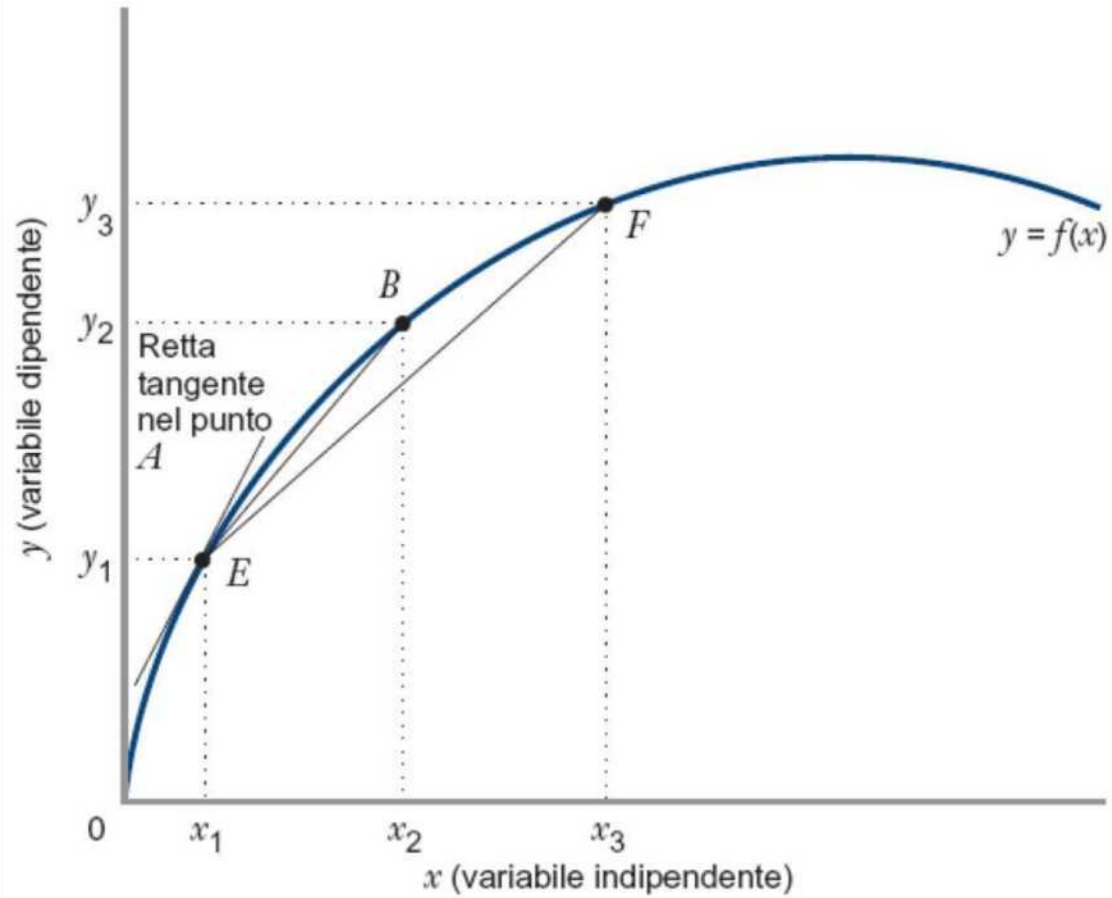
1. Il valore medio deve necessariamente *aumentare* se il valore marginale è *maggiore* di quello medio.

2. Il valore medio deve necessariamente *ridursi* se il valore marginale è *minore* di quello medio.

3. Il valore medio è *costante* quando il valore marginale *uguaglia* quello medio.

LA DERIVATA

IL SIGNIFICATO DI DERIVATA DI UNA FUNZIONE



- La derivata di y rispetto ad x – dy/dx, o derivata prima di una funzione in un punto, è il limite del rapporto incrementale della funzione nel punto al tendere dell'incremento Δx a zero. In termini formali:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- $\Delta y/\Delta x$ rappresenta il rapporto increamentale. Indica di quanto varia y, Δy, al variare di x, Δx.

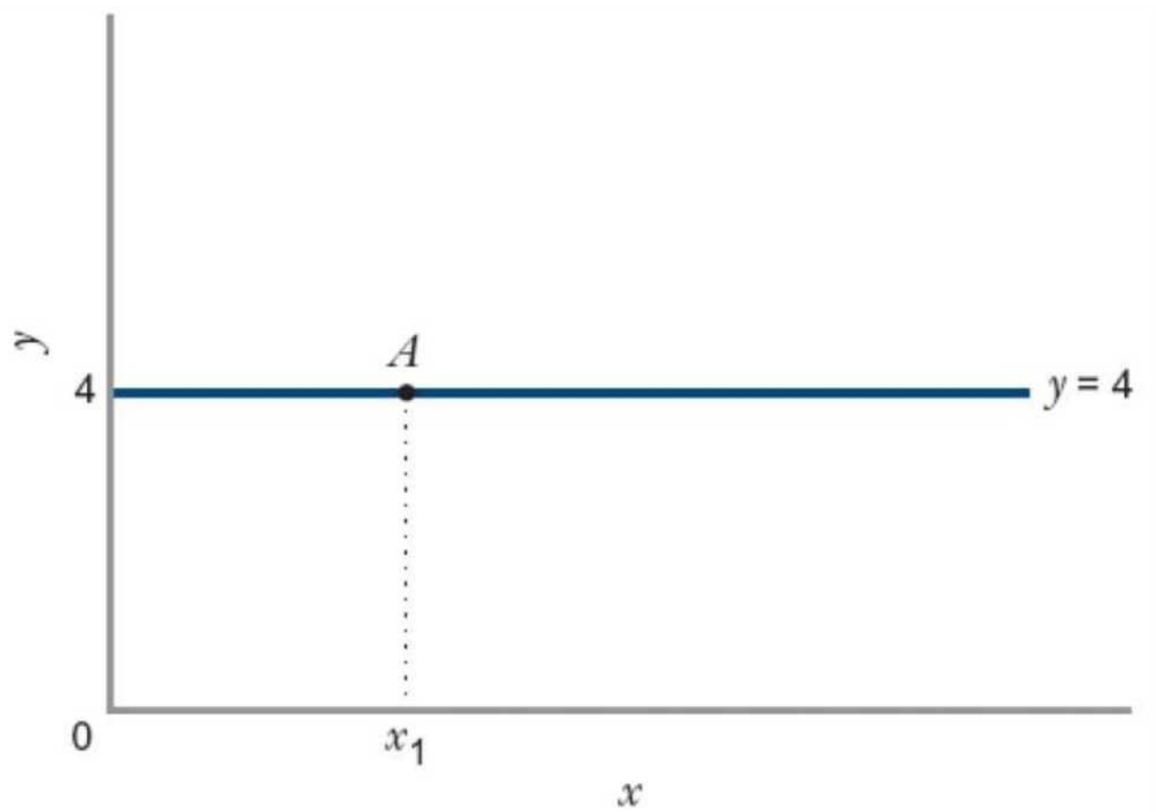
- L'espressione ''$\lim \Delta x \to 0$'' indica che stiamo valutando il rapporto $\Delta y/\Delta x$ ''al limite'', per variazioni molto piccole di x, Δx tende a zero.

- Il valore della derivata della funzione (dy/dx) in ogni punto misura la pendenza della retta tangente alla funzione in quel punto e quindi indica la pendenza del grafico in quel preciso punto.

COME CALCOLARE UNA DERIVATA

DERIVATA DI UNA COSTANTE

- Se la variabile dipendente y è una costante, la sua derivata rispetto alla variabile x è, banalmente, zero.
  - Esempio: $y = k$, dove k è una costante. Quindi, $dy/dx = 0$.
    - Logica: la derivata misura ''*quanto varia y al variare di x*'', per variazioni piccole di x. Se la funzione y non dipende da x, ma solo da una costante, la derivata è quindi nulla



DERIVATA DI UNA POTENZA

- Consideriamo una funzione della seguente forma:

$$y = ax^b$$

dove a e b rappresentano due costanti.

- La derivata di una funzione di questo tipo è:

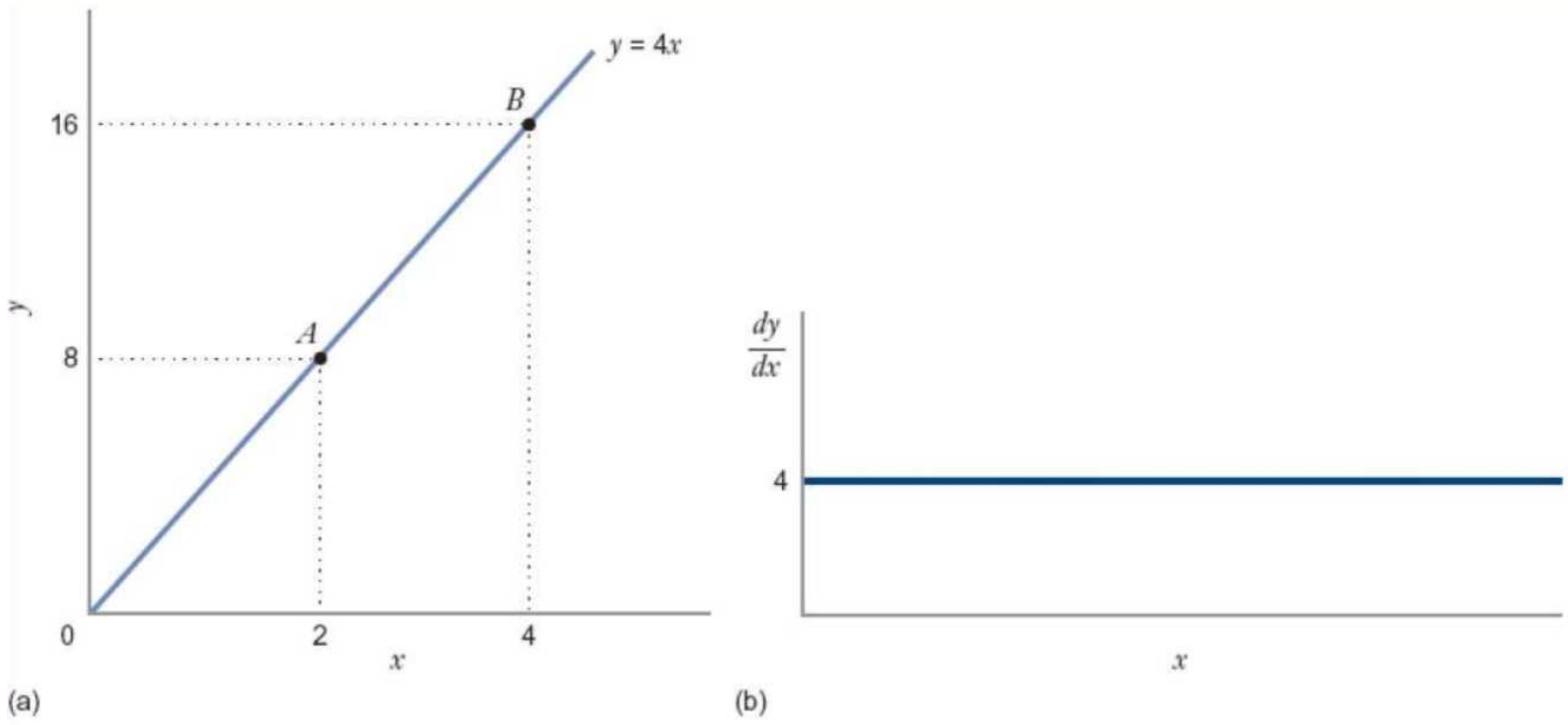
$$\frac{dy}{dx} = bax^{b-1}$$

ESEMPIO: RETTA E DERIVATA

Equazione: $y = 4x$

Applicando la formula della derivata alla funzione $y = ax^b, con\ a = 4\ e\ b = 1$

$$\frac{dy}{dx} = bax^{b-1} = 4(1)x^{1-1} = 4x^0 = 4$$

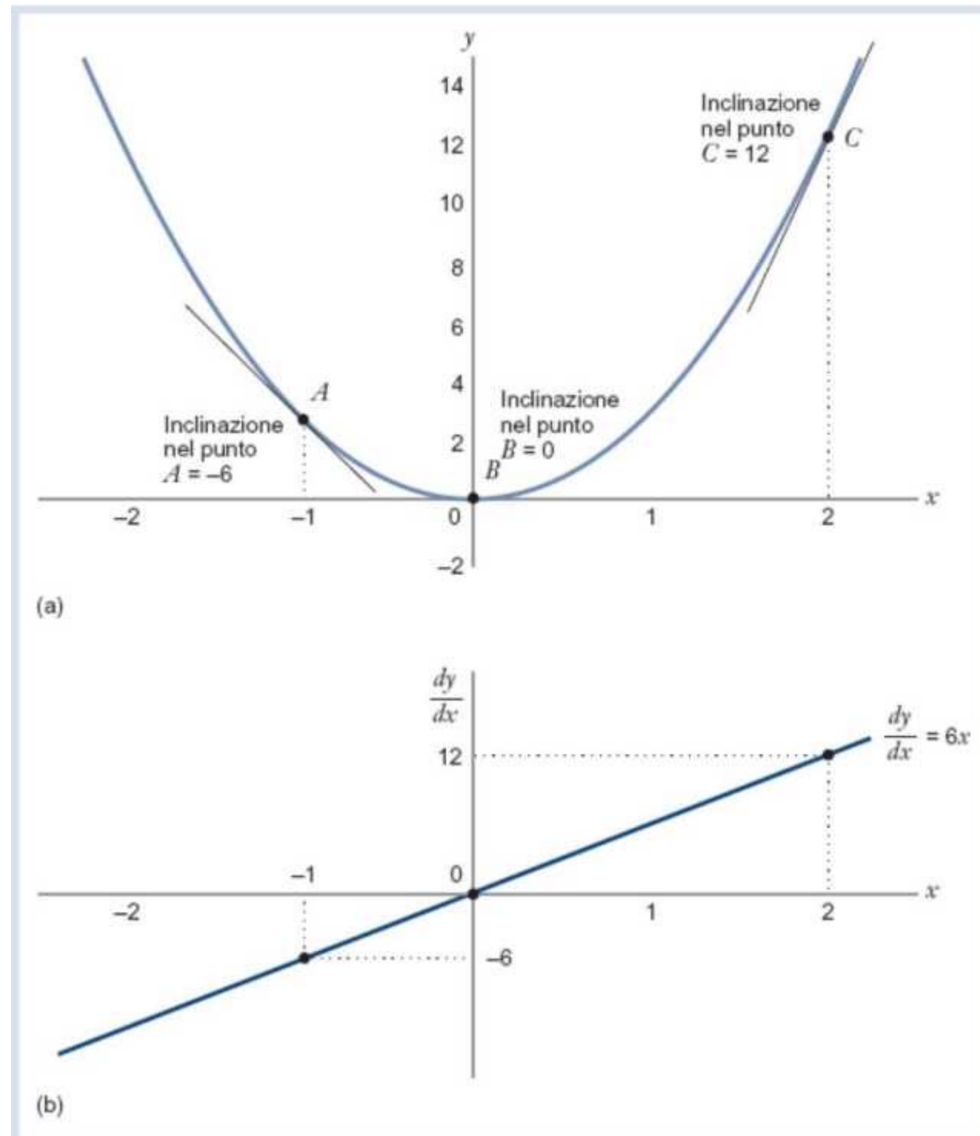


DERIVATA DI UNA FUNZIONE QUADRATICA

Equazione: $y = 3x^2$

Applicando la formula della derivata alla funzione $y = ax^b, con\ a = 3\ e\ b = 2$

$$\frac{dy}{dx} = bax^{b-1} = 2(3)x^{2-1} = 6x^1 = 6x$$



DERIVATE

- Derivata di una frazione: $y = \frac{1}{x^b} = x^{-b}$

$$\frac{dy}{dx} = -bx^{-b-1}$$

  - Esempio: $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

- La derivata di una somma/differenza di funzioni è la somma/differenza delle derivate delle singole funzioni

  - Esempio: $y = 3x + 2x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 2 * 4 * x^3 = 3 + 8x^3$$

DERIVATE: ALTRE FUNZIONI

- Derivata della funzione logaritmica: $y = \ln(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

- Derivata della funzione esponenziale: $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

- Data la funzione $y = F(x) = f\big(g(x)\big)$ composta delle funzioni differenziabili $f(.)$ e $g(.)$
  - La derivata della funzione composta $F(x) = f\big(g(x)\big)$ è la derivata della funzione più esterna $f'(g(x))$ moltiplicata per la derivata della funzione più interna, $g'(x)$.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$$

- Esempio: consideriamo la funzione $y = (5x^2 + 2x)^4$
  - La funzione y è composta della funzione più esterna $(.)^4$ e la funzione più interna $5x^2 + 2x$. Quindi

$$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big) * g'(x) = \underbrace{[4(5x^2 + 2x)^3]}_{f'(g(x))} * \underbrace{[5 * 2x + 2]}_{g'(x)} = 4(5x^2 + 2x)^3(10x + 2)$$

DERIVATE: ALTRI ESEMPI

- $y = 5x^4 + 6\log(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 5(4)x^3 + \frac{6}{x} = 20x^3 + \frac{6}{x}$$

- $y = 4\sqrt[2]{x} - e^{3x} = 4x^{\frac{1}{2}} - e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - 3e^{3x} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - 3e^{3x} = \frac{2}{\sqrt[2]{x}} - 3e^{3x}$$

UTILIZZO DELLE DERIVATE

Le derivate sono utili per aiutarci a comprendere e a quantificare molti dei concetti economici riferiti al termine "marginale" (utilità marginale, costo marginale, ricavo marginale).

- **Utilità marginale**
  - Supponiamo che la funzione che misura il livello complessivo di utilità di un individuo sia $U(Q)$. Il valore della derivata di tale funzione dU/dQ calcolato per un particolare livello di Q misura l'inclinazione della curva dell'utilità e fornisce una misura dell'utilità marginale in corrispondenza di quella data quantità.
- **Costo marginale**
  - Supponiamo che la funzione del costo totale di produzione sia $C(Q)$. Il valore della derivata dC/dQ in riferimento ad un particolare livello di Q misura l'inclinazione della curva del costo totale nel punto considerato e fornisce una misura del costo marginale di produzione per quella quantità prodotta.
- **Ricavo marginale**
  - Supponiamo che la funzione del ricavo totale sia $R(Q)$. Il valore della derivata dR/dQ in corrispondenza di un dato livello di Q rappresenta l'inclinazione della curva del ricavo totale e costituisce una misura del ricavo marginale per la quantità considerata.

ESEMPIO: UTILITÀ E UTILITÀ MARGINALE

- L'utilità marginale si può misurare con la derivata della funzione di utilità, $U(y)$, rispetto al bene y:

$$MU(y) = \frac{dU(y)}{dy}$$

- L'utilità marginale $MU(y)$ indica l'inclinazione della funzione di utilità [Applicazione cap. 3-4: Scelta dei consumatori]

- Esempio: se la funzione di utilità è $U(y) = \sqrt{y} = y^{1/2}$

  - L'utilità marginale è data da

$$MU(y) = \frac{dU(y)}{dy} = \frac{1}{2}(1)y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

PROBLEMI DI

MASSIMIZZAZIONE E MINIMIZZAZIONE

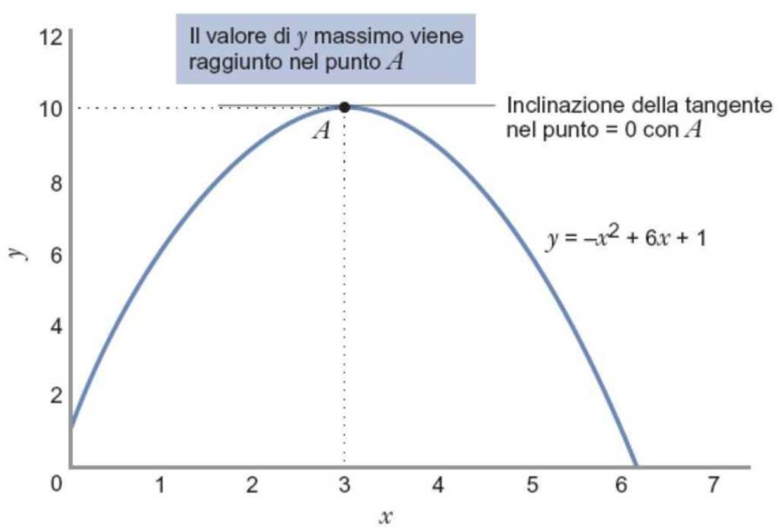
PROBLEMI DI MASSIMIZZAZIONE E MINIMIZZAZIONE

In diverse applicazioni dovremo trovare il valore massimo o minimo di alcune funzioni

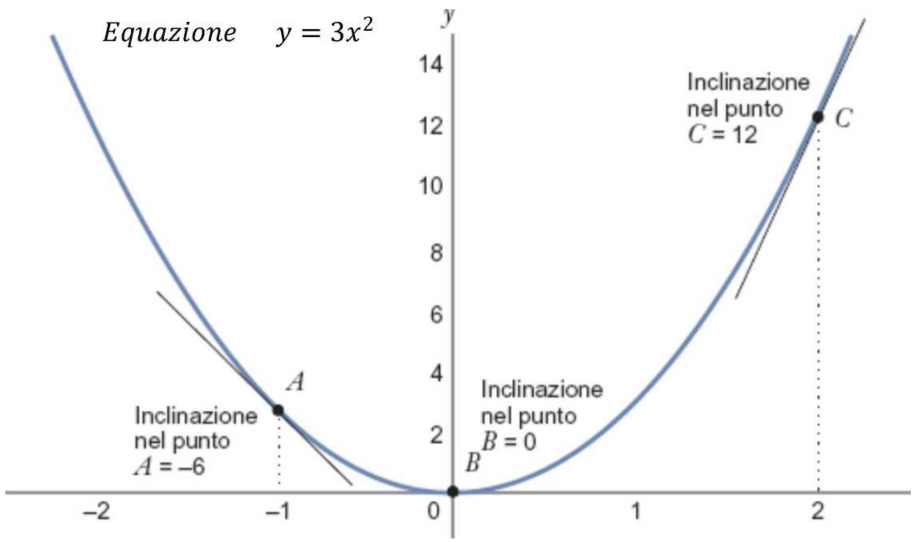
- Massimo della funzione di utilità dei consumatori
- Massimo dei ricavi dell'impresa
- Minimo della funzione di costo dell'impresa

- Punti di massimo e minimo
  - I punti di massimo e minimo sono quei valori della **variabile indipendente** $\boldsymbol{x}$ per i quali una funzione $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ assume il valore massimo o minimo
  - Un punto di massimo (minimo) è un punto prima e dopo del quale la funzione assume valori più piccoli nel caso di un punto di massimo, o più grandi nel caso di un punto di minimo

Punto di massimo



Punto di minimo



PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

Come trovare i punti di massimo e minimo

- Bisogna trovare quel valore di x per il quale la funzione $y = f(x)$ è massima o minima.
  - Trovare quel valore di x nel quale la funzione ha pendenza pari a zero:
    - **Derivata prima uguale a zero**
  - Tale che prima e dopo di x, la funzione cambia inclinazione:
    - **Segno della derivata seconda**

- La derivata prima misura l'inclinazione di una funzione
  - Se la derivata prima è positiva la funzione è crescente: al crescere di x, cresce anche $f(x)$
  - Se la derivata prima è negativa la funzione è decrescente: al crescere di x, decresce $f(x)$
  - Quando la derivata prima è uguale a zero, la funzione ha inclinazione nulla.
    - Il punto nel quale la derivata prima si annulla è un punto di ''flesso'', nel quale ci possono essere un minimo o un massimo.

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO - DERIVATA SECONDA

Per sapere se un punto è un punto di minimo o di massimo bisogna calcolare la derivata seconda

- La derivata seconda è la derivata della derivata prima:

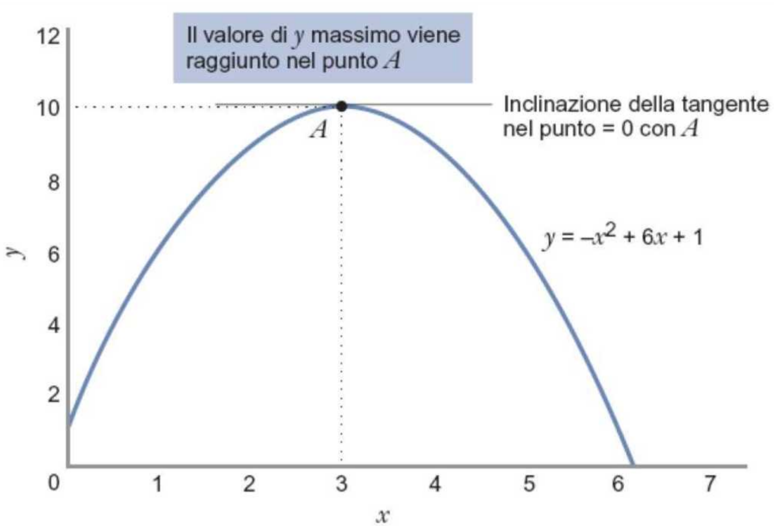
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

- La derivata seconda misura come varia l'inclinazione della funzione

Funzione concava - Punto di massimo

Derivata seconda negativa: la funzione è concava

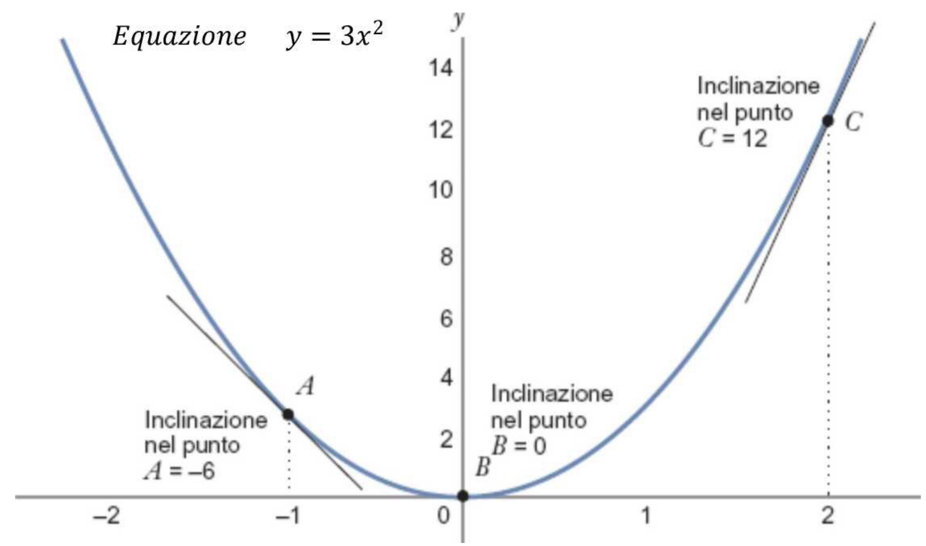
L'inclinazione della curva decresce, diventa meno positiva (o più negativa), al crescere di x



Funzione convessa - Punto di minimo

Derivata seconda positiva: la funzione è convessa

L'inclinazione della curva cresce, diventa più positiva (o meno negativa), al crescere di x



PROBLEMI DI MASSIMIZZAZIONE E MINIMIZZAZIONE RIASSUMENDO

- Punto di massimo
  - Derivata prima nulla: $\frac{dy}{dx} = 0$
  - Derivata seconda negativa: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

- Punto di minimo
  - Derivata prima nulla: $\frac{dy}{dx} = 0$
  - Derivata seconda positiva: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

PUNTO DI MASSIMO

Funzione: $y = -x^2 + 6x + 1$

- **Derivata prima**

$$\frac{dy}{dx} = -2x + 6 \begin{cases} > 0 & x < 3 \\ = 0 & x = 3 \\ < 0 & x > 3 \end{cases}$$

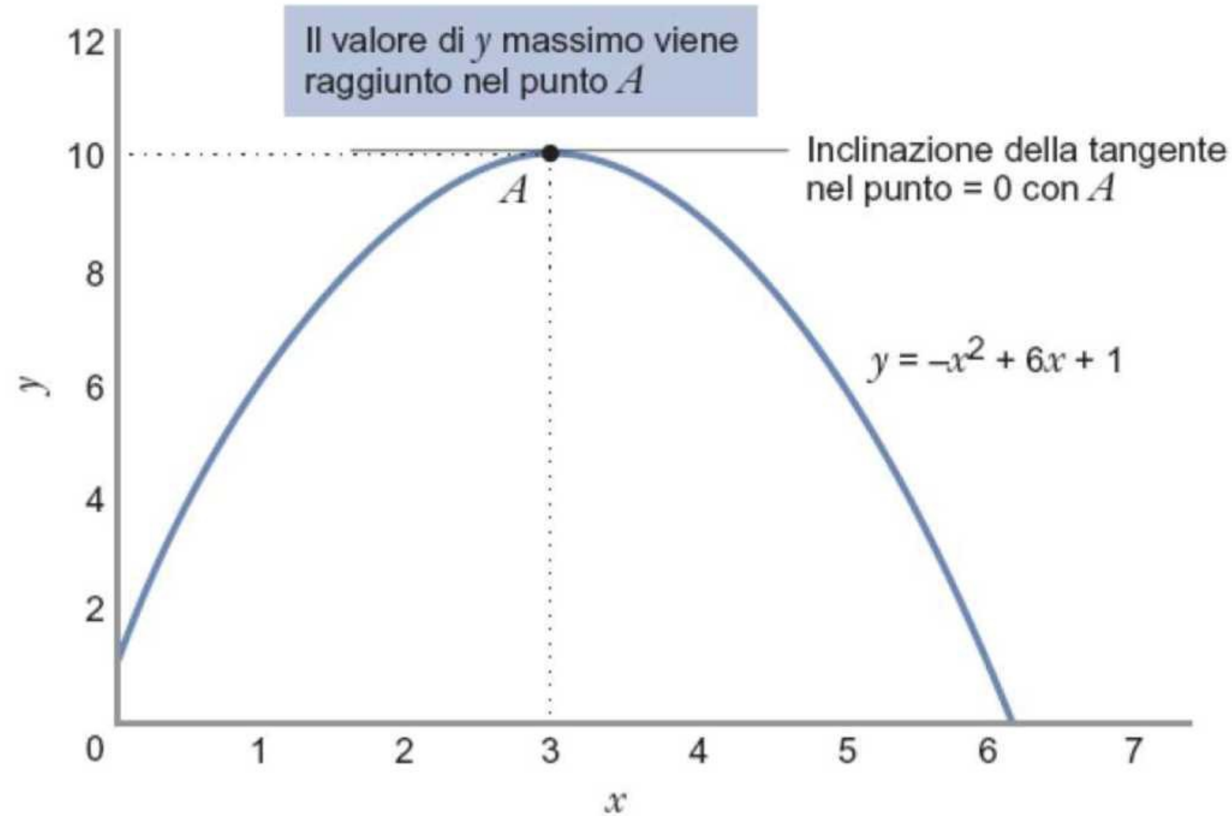
La derivata prima si annulla quando $x = 3$. Quindi, il valore minimo o massimo deve essere in quel punto.

- **Derivata seconda**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0 \; sempre$$

La derivata seconda è sempre negativa. La funzione è concava, quindi è un punto di massimo.

Nota: l'inclinazione della curva decresce al crescere di x; diventa meno positiva quando x approccia il valore $x = 3$ e diventa più negativa quando x si allontana da tale punto.



La funzione nel valore $x = 3$ è pari a 10

$$y(x = 3) = -(3^2) + 6 * 3 + 1 = 10$$

PUNTO DI MINIMO

Funzione: $y = 3x^2$

► **Derivata prima**

$$\frac{dy}{dx} = 6x \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ = 0 & x = 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases}$$

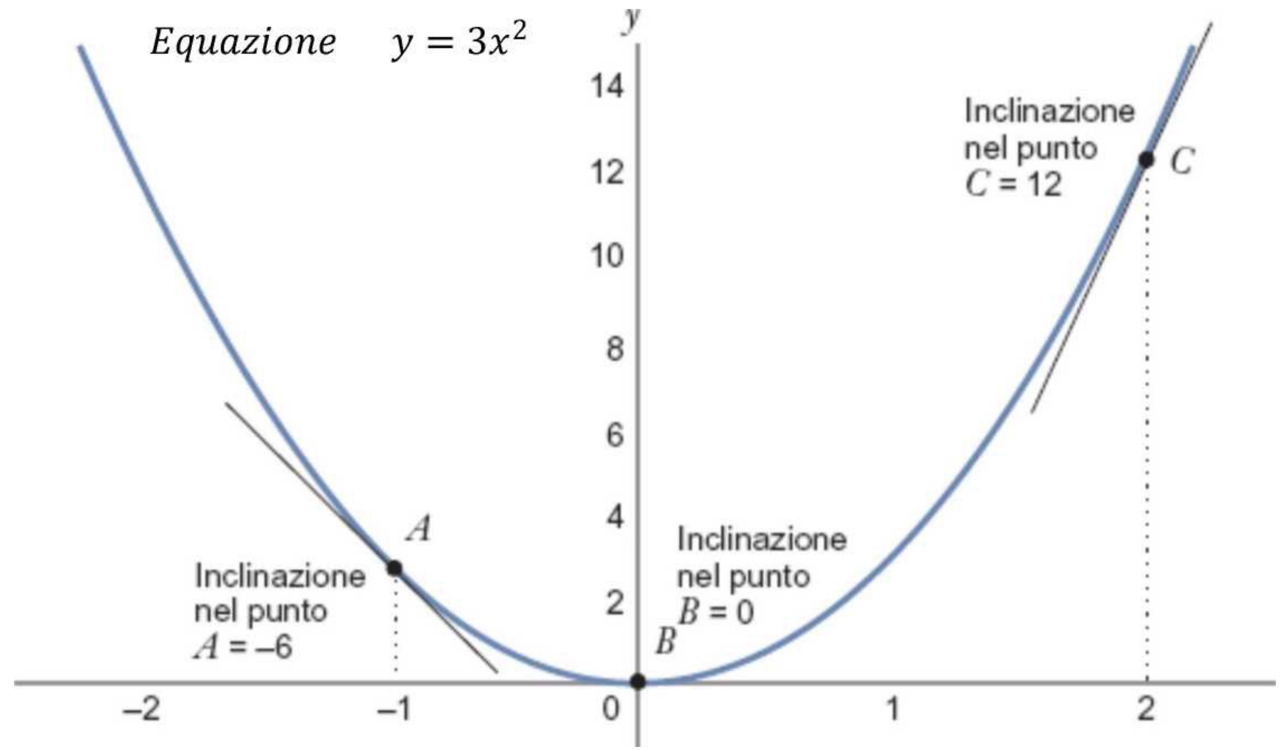
La derivata prima si annulla quando $x = 0$. Quindi, il valore minimo o massimo deve essere in quel punto.

► **Derivata seconda**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = 6 > 0 \; sempre$$

La derivata seconda è sempre positiva. La funzione è convessa, quindi è un punto di minimo.

Nota: l'inclinazione della curva cresce al crescere di x; diventa meno negativa quando x approccia zero e diventa più positiva quando x si allontana da tale punto



La funzione nel valore $x = 0$ è pari a 0

$$y(x = 0) = 0$$