

Esercizio 1

Siano $W(0;x_1) = 99.2$ euro, $W(0;x_2) = 187.8$ euro e $W(0;x_3) = 317.5$ euro i prezzi di mercato al tempo 0 di tre zero coupon bond con valori di rimborso $x_1 = 100$ euro, $x_2 = 200$ euro e $x_3 = 350$ euro, esigibili ai tempi $t_1 = 30$ giorni, $t_2 = 210$ giorni e $t_3 = 360$ giorni.

Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

K	K_{anni}	$W(0, x_k)$	x_k	$v(0, k)$	$i(0, k)$	$v(0, k-1, k)$	$i(0, k-1, k)$
0							
30	30/360	99.20	100	0.9920	$\left(\frac{1}{0.9920}\right)^{\frac{1}{30/360}} - 1$	0.9920	
210	210/360	187.80	200	0.9390			
360	360/360	317.50	350				

$$v(0, 30, 210) = \frac{v(0, 210)}{v(0, 30)}$$

$$i(0, 30, 210) = \left[\frac{1}{v(0, 30, 210)} \right]^{\frac{1}{180/360}} - 1$$

$$\frac{30}{360} = 0.0833$$

$$\frac{210}{360} = 0.5833$$

$$v(0, 30, 210) = \left[\frac{1}{v(0, 30, 210)} \right] \frac{\frac{1}{0.5833 - 0.0833}}{-1}$$

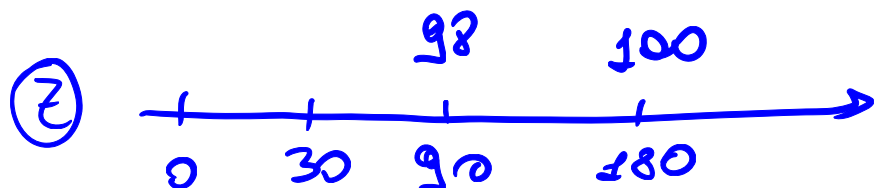
Esercizio 2

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari i quali, in riferimento ad uno scadenziario $t = \{t_1, t_2, t_3\} = \{30, 90, 180\}$ giorni, siano così composti:

- un titolo a cedola nulla x che garantisce 100 euro in t_1 al prezzo di 99.5 euro;
- un titolo a cedola nulla y che garantisce 150 euro in t_2 al prezzo di 147.5 euro;
- un contratto z che garantisce 100 euro in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_2 , di 98 euro.

(a) Si calcolino le strutture dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dai prezzi assegnati, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

(b) Considerato il portafoglio $w = x + y$, si supponga che esso sia quotato sul mercato al prezzo $P = 244.5$ euro. Dire quale strategia consente di realizzare un profitto certo al tempo t_0 , avendo chiuso in pareggio la posizione negli altri periodi; indicare inoltre l'eventuale guadagno G .



$$x \rightarrow v(0, 30) = \frac{99.5}{100} = 0.995$$

$$y \rightarrow v(0, 90) = \frac{147.5}{150.0}$$

$$z \rightarrow v(0, 90, 180) = \frac{98}{100} = 0.98$$

$$v(0, 180) ?$$

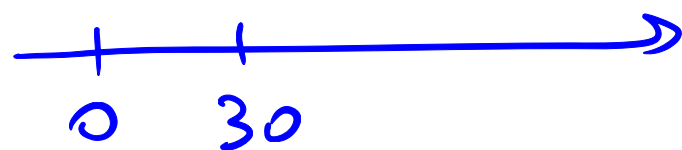
$$v(0, 0, 30) = v(0, 30)$$

$$v(0, 30, 90)$$

$$r(0, 90, 180) = \frac{r(0, 180)}{r(0, 90)} \Rightarrow r(0, 180) = r(0, 90)r(0, 90, 180)$$

$$W = X + Y$$

99.5 100



0 30 90

X 99.5 -100

Y 147.5 -150

W -244.5 100 150

0

0

$$P = 99.5 + 147.5 = 247€ > 244.5$$

Si vende il titolo X
 vende il titolo Y
 compra il W al $P_W = 244.5$

-244.5 100 150

0

30

90

$$G = 247 - 244.5 = 2.5€$$



Esercizio 3

Sia data una operazione finanziaria x_1/t con $x_1 = \{12.5, 10, 12.5, 235\}$ e $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, ove il tempo è misurato in anni. Calcolarne la duration rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0; 0.5) = 11.10\%$, $i(0; 1) = 11.30\%$, $i(0; 1.5) = 11.50\%$, $i(0; 2) = 11.70\%$.

Indicato poi con x il portafoglio costituito da una quota $\alpha_1 = 1$ del titolo x_1 e da una quota α_2 di uno z.c.b. che paga 100 euro in $t = 0.5$, determinare α_2 in modo che $D(0; x) = 1$.

V.Q. x_k al tempo t_k				
K	x_k	$i(0, k)$	$x_k (1+i(0, k))^{-k}$	$K x_k (1+i(0, k))^{-k}$
0.5	12.5	11.10%	$12.5 (1+0.111)^{-0.5}$	$0.5 \cdot [\dots]$
1	10	11.30%	$10 (1+0.113)^{-1}$	$1 \cdot [\dots]$
1.5	12.5	11.50%	$12.5 (1+0.115)^{-1.5}$	$1.5 \cdot [\dots]$
2	235	11.70%	$235 (1+0.117)^{-2}$	$2 \cdot [\dots]$
			somme den. del?	somme numer. del?

$$X_1 \quad V(0, X_1) = 219.81 \quad D(0, X_1) = 1.8540$$

$$X = X_1 + \alpha_2 X_2$$

$$V(0, X_2) = 100(1 + 0.111)^{-0.5}$$

24.87

$$X_2 \quad ZCB \quad 100 \quad T = 0.5$$

$$D(0, X_2) = 0.5$$

$$\textcircled{1} \quad D_p = \alpha_1 \frac{V(0, X_1)}{V_p} D(0, X_1) + \alpha_2 \frac{V(0, X_2)}{V_p} D(0, X_2)$$

$$V_p = \alpha_1 V(0, X_1) + \alpha_2 V(0, X_2)$$

$$D_p = 1$$

$$V_p D_p = \alpha_1 V(0, X_1) D(0, X_1) + \alpha_2 V(0, X_2) D(0, X_2)$$

$$[\alpha_1 V(0, X_1) + \alpha_2 V(0, X_2)] D_p = \alpha_1 V(0, X_1) D(0, X_1) + \alpha_2 V(0, X_2) D(0, X_2)$$

$$\alpha_1 V(0, X_1) D_p + \alpha_2 V(0, X_2) D_p = \alpha_1 V(0, X_1) D(0, X_1) + \alpha_2 V(0, X_2) D(0, X_2)$$

$$\alpha_2 V(0, x_2) D_p - \alpha_2 V(0, x_2) D(0, x_2) = \alpha_1 V(0, x_1) D(0, x_1) - \alpha_1 V(0, x_1) D_p$$

$$[V(0, x_2) D_p - V(0, x_2) D(0, x_2)] \alpha_2 = \alpha_1 V(0, x_1) [D(0, x_1) - D_p]$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 V(0, x_1) [D(0, x_1) - D_p]}{V(0, x_2) [D_p - D(0, x_2)]}$$

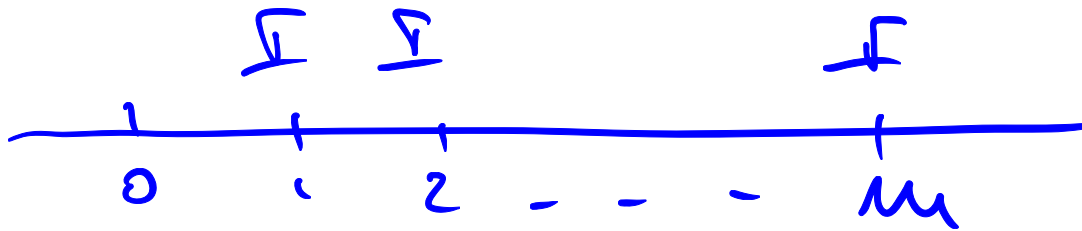
DURATION DI UN TCF

$$TCF = \frac{\text{rendite}}{\text{rate } I} + \text{ZCB valore facciale } C$$

$$D_{TCF} = \frac{V(0, I)}{V_{TCF}} D(0, I) + \frac{C \gamma(0, m)}{V_{TCF}} m$$

$$V(0, I) = I @ m \cdot i$$

$D(0, I)$ duration di uno zero coupon a rate costante pari ad I



$$D(0, I) = \frac{1 \cdot I \cdot \gamma(0, 1) + 2 \cdot I \cdot \gamma(0, 2) + \dots + m \cdot I \cdot \gamma(0, m)}{I \gamma(0, 1) + I \gamma(0, 2) + \dots + I \gamma(0, m)}$$

struttura
piatta
 $\gamma(0, k) = V^k$
 $V = 1/(1+i)$

$$i \Rightarrow v = \frac{1}{1+i} \quad v(0, k) = v^k$$

$$D(0, T) = \frac{1Iv + 2Iv^2 + \dots + mIv^m}{Iv + Iv^2 + \dots + Iv^m} = \frac{\sum_{k=1}^m kv^k}{\sum_{k=1}^m v^k} \underset{\text{Annulli}}{=} \frac{\sum_{k=1}^m kv^k}{\sum_{k=1}^m v^k}$$

$$\sum_{k=1}^m kv^k = \frac{1}{1-v} \sum_{k=1}^m (1-v)kv^k = \frac{1}{1-v} \sum_{k=1}^m [kv^k - kv^{k+1}] =$$

$$= \frac{1}{1-v} \left[\textcircled{v} + v^2 + 2v^2 - 2v^3 + 3v^3 - 3v^4 + \dots + (m-1)v^{m-1} - (m-1)v^m + \underset{\cancel{mv^{m+1}}}{\overset{\downarrow m}{mv^m}} \right]$$

$$= \frac{1}{1-v} \left[\underbrace{v + v^2 + v^3 + \dots + v^m}_{\text{Annulli}} - mv^{m+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-v} \left[\underset{\text{Annulli}}{\sum_{k=1}^m v^k} - mv^{m+1} \right] = \frac{1}{1-v} \left[v \frac{1-v^m}{1-v} - mv^{m+1} \right] \underset{\text{Annulli}}{=} \frac{1}{1-v} \left[v \frac{1-v^m}{1-v} - mv^{m+1} \right]$$

$$= \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{1-\gamma^m}{1-\gamma} - m\gamma^m \right] = d\bar{m}i \quad \text{dollar duration}$$

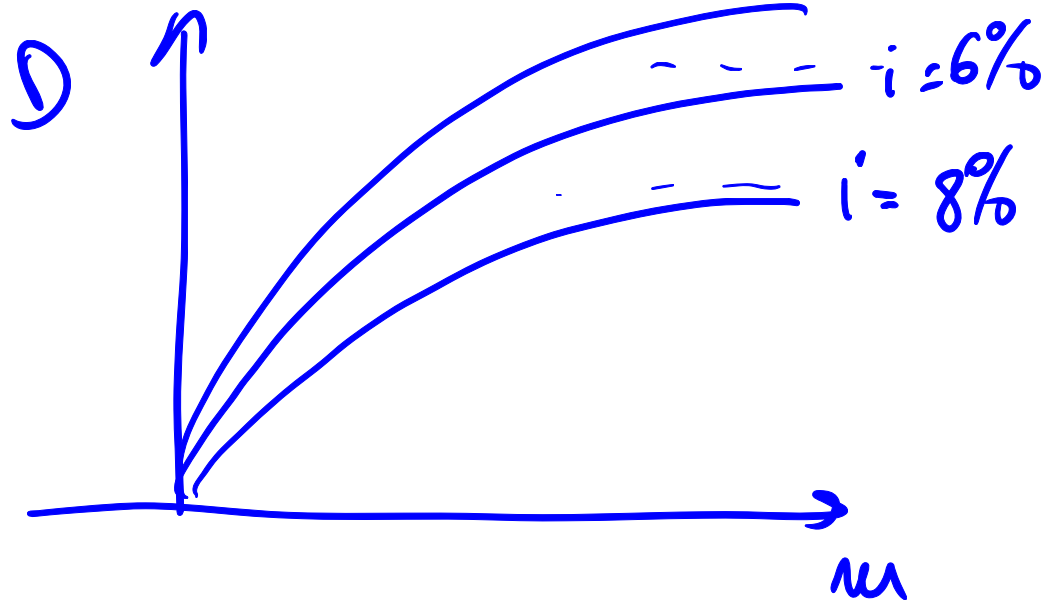
$$D(0, T) = \frac{d\bar{m}i}{d\bar{m}i} = \frac{\cancel{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \left[\frac{1-\gamma^m}{1-\gamma} - m\gamma^m \right]}{\cancel{\frac{1-\gamma^m}{1-\gamma}}} =$$

$$\frac{\cancel{\frac{1-\gamma^m}{1-\gamma}} - m\gamma^m}{1-\gamma^m} = \frac{1}{1-\gamma} - \frac{m\gamma^m}{1-\gamma^m}$$

$$\gamma = (1+i)^{-1} \quad = \quad \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1}$$

Rendite decrescente nel tasso di interesse
 crescente nelle durate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(0, T) = \frac{1+i}{i} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1+i}{i}$$



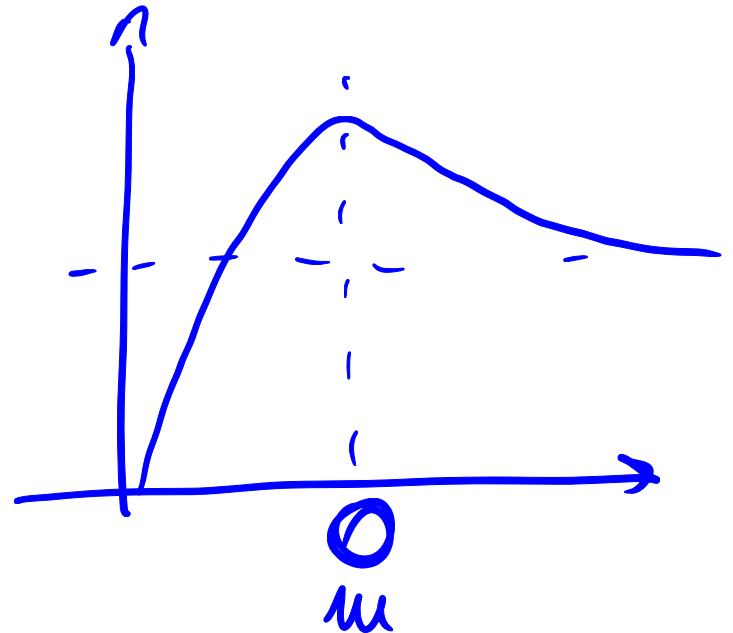
$$D_{TCF} = \frac{V(0, \Sigma)}{V_{TCF}} D(0, \Sigma) + \frac{C_V(0, m)}{V_{TCF}} m$$

$$= \frac{\frac{\Sigma}{2\pi m} i}{\cancel{V_{TCF}}} \left(\frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1} \right) + \frac{C_V(0, m)}{V_{TCF}} m$$

$$i \leq \frac{\Sigma}{C}$$

$$i > \frac{\Sigma}{C}$$

και $\bar{e}$ μονοτονία



Esercizio 5

Sia dato un bullet bond x di valore facciale 120 euro, maturity 10 anni, cedola annuale di 12.5 euro e quotato alla pari. Calcolarne il T.I.R. e la duration relativamente ad una struttura dei tassi di interesse piatta al livello del T.I.R. .

$$C = 120\text{€} \quad m = 10 \quad I = 12.5\text{€} \quad P = 120\text{€}$$

TIR quote alla pari $\Rightarrow$ TIR = tasso cedolare
 tasso cedolare = $\frac{12.5}{120} = 10.4167\%$

K	X_K	$X_K v^K$	$K X_K v^K$
1	12.5	$12.5 \cdot (1,104167)^{-1}$	$1 \cdot 12.5 \cdot 1,104167^{-1}$
2	12.5	'	'
3	12.5	'	'
⋮	⋮	⋮	⋮
10	132.5	120	799.7839

$$D = \frac{799.7839}{120} = 6,6647$$

$$TCF = \text{rendita } I + \text{BOT } C$$

$$D_{TCF} = \frac{V(I)}{V_p} D_I + \frac{C_{r(0,m)}}{V_p} m$$

$$V(I) = 12.5 \cdot \frac{10}{0.104167} = 12.5 \cdot \frac{1 - 1.104167^{-10}}{0.104167} = 75.4513$$

$$D_I = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1} = \frac{1.104167}{0.104167} - \frac{10}{1.104167^{10} - 1} = 4.6957$$

$$V_p = 120$$

$$D_{TCF} = \frac{75.4513}{120} \cdot 4.6957 + \frac{120 (1.104167)^{-10}}{120} \cdot 10 = 6.6649$$

Esercizio 6

Sia dato un mercato in cui siano presenti al tempo $t = 0$ quattro titoli obbligazionari w , x , y e z . Il titolo z è uno zcb a un anno di valore attuale $V(0; z) = 100$ euro; per quanto riguarda gli altri titoli si ha:

$$V(0; w) = 50 \text{ euro}$$

$$V(0; x) = 200 \text{ euro}$$

$$V(0; y) = 50 \text{ euro}$$

$$D(0; w) = 1 \text{ anno}$$

$$D(0; x) = 2 \text{ anni}$$

$$D(0; y) = 18 \text{ mesi}$$

Determinare il valore attuale V e la duration D del portafoglio v composto da una quota del titolo w e da una quota del titolo x .

Calcolare inoltre quante quote α_y del titolo y e quante quote α_z del titolo z bisogna aggiungere a v per ottenere un portafoglio con valore attuale di 500 euro e duration di 18 mesi.

	w	x	y	z
$V(0)$	50	200	50	100
$D(0)$	1	2	18/12	1
	1	1		

$$V = w + x$$

$$V_v = 50 + 200 = 250$$

$$D_v = \frac{50}{250} 1 + \frac{200}{250} 2 =$$

	v	y	z
V	250	50	100
D	1.8	$\frac{18}{12}$	1
		α_y	α_z

$$p = v + \alpha_y y + \alpha_z z$$

$$V_p = 500 \quad D_p = \frac{18}{12}$$

$$500 = 250 + \alpha_y 50 + \alpha_z 100$$

$$\frac{500}{12} = \frac{250}{500} 1.8 + \frac{\alpha_y 50}{500} \frac{18}{12} + \frac{\alpha_z 100}{500} 1$$

$$250 = 50\alpha_y + 100\alpha_z$$

$$5 = \alpha_y + 2\alpha_z$$

$$\frac{180}{12} = 5 \cdot 1.8 + \frac{18}{12} \alpha_y + 2\alpha_z$$

Esercizio 7

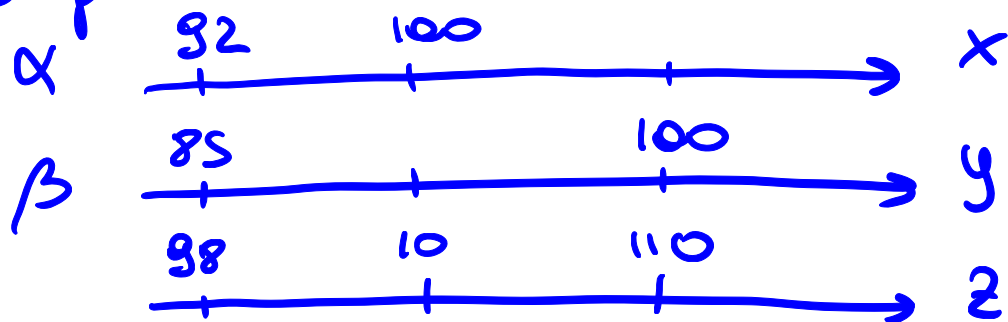
Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$ ed in riferimento allo scadenziario $t = \{1, 2\}$ anni, siano trattati i titoli: $x = \{100, 0\}$ euro al prezzo a pronti di 92 euro, $y = \{0, 100\}$ euro al prezzo a pronti di 85 euro, $z = \{10, 110\}$ euro al prezzo a pronti di 98 euro. Determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti determinata dai prezzi dei soli titoli x e y .

Costruire quindi un arbitraggio non rischioso che garantisca un profitto certo di 10 euro al tempo $t = 2$ anni, avendo chiuso in pareggio le posizioni agli altri istanti.

K	x	y	z	$r(0, K)$	$i(0, K)$
0	92	85	98		
1	100		10	0.92	$(1/0.92) - 1$
2		100	110	0.85	$(1/0.85)^{\frac{1}{2}} - 1$

$$\bar{P}_2 = 10 * 0.92 + 110 * 0.85 = 102.7 \neq 98$$

è possibile realizzare un arbitraggio



$$\alpha 92 + \beta 85 = 98$$

$$\alpha 100 = 10 \quad \alpha = 0.1$$

$$\beta = \frac{98 - 9.2}{85} = 1.0447$$

	0	1	2
venda α f: foli x	$0,1 * 92$ 9,2	-10	
venda β f: foli y	$1,0447 * 85$ 88,8		-104,47
compro ω f: foli z	-98	10	110
	0	0	5,53

$$y * 5,53 = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{5,53} = 1,8085$$

vender 0,1 * 1,8085 f: foli x
 vender 1,0447 * 1,8085 f: foli y
 comprar 1,8085 f: foli z

$$\begin{cases} -92x - 85y - 98z = 0 \\ 100x + 10z = 0 \\ 100y + 110z = 10 \end{cases}$$

$$x = 0,2236$$

$$y = 2,3368$$

$$z = 2,2368$$

Esercizio 8

Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i tassi swap:

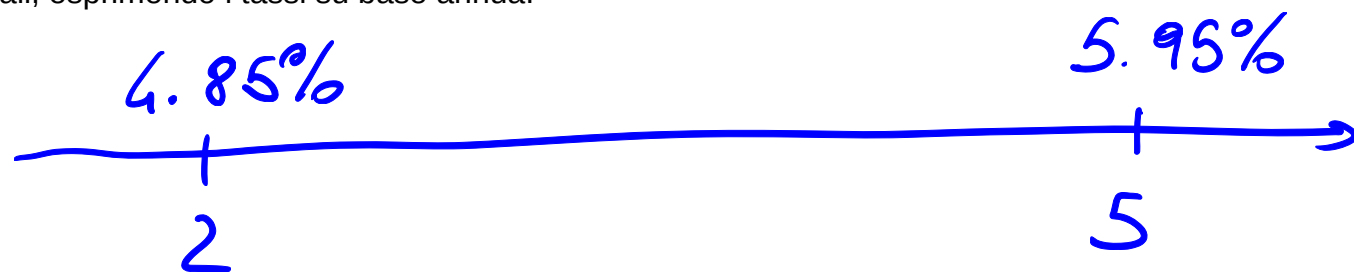
$z1 = 4.53\%$

$z2 = 4.85\%$

$z5 = 5.95\%$

avendo indicato con z_m il tasso swap, quotato in t , per la generica scadenza m (anni).

In riferimento allo scadenziario $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uni-periodali, esprimendo i tassi su base annua.



eq. della retta passante per i due punti di coordinate $(2, 4.85\%)$ $(5, 5.95\%)$

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-0.0485}{0.0595-0.0485} \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x-2)(0.0595-0.0485) + 0.0485$$

pongo $x=3$ e calcolo $y = z_3$

pongo $x=4$ e calcolo $y = z_4$

Esercizio 9

Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i seguenti tassi swap:

$$z_1 = 3.72\%$$

$$z_3 = 4.01\%$$

$$z_4 = 4.12\%$$

avendo indicato con z_m il tasso swap relativo alla scadenza di m anni. In riferimento allo scadenziario $\{1, 2, 3, 4\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti, esprimendo i tassi su base annua.

K	z_K	$v(0, K)$	$\sum_{j=1}^{K-1} v(0, j)$
0			
1	3.72%	$1 / 1.0372 = 0.9641$	
2	3.865%	$\frac{1 - 0.03865 \times 0.9641}{1.03865} = 0.9269$	0.9641
3	4.01%	$\frac{1 - 0.0401 \times 1.891}{1.0401} = 0.8885$	$0.9641 + 0.9269 = 1.891$
4	4.12%	$\frac{1 - 0.0412 \times 2.7796}{1.0412}$	$1.891 + 0.8885 = 2.7796$

$$z_2 = \frac{0.0372 + 0.0401}{2}$$

$$v(0, K) = \frac{1 - p_K \sum_{j=1}^{K-1} v(0, j)}{1 + p_K z_K}$$

Esercizio 10

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$ ed in riferimento allo scadenziario $t = \{0.5, 1\}$ anni, siano trattati i titoli: $x = \{300, 0\}$ euro al prezzo in $t = 0$ di 287 euro, $y = \{0, 50\}$ euro al prezzo in $t = 0$ di 46 euro, $z = \{0, 100\}$ euro.

Determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti determinata dai prezzi dei soli titoli x e y .

Si ipotizzi quindi che il mercato si evolva in condizioni di certezza e si supponga di sapere in $t = 0$ che il prezzo che il titolo z avrà in $t = 0.5$ sarà 97 euro. Si costruisca in $t = 0$ un arbitraggio non rischioso che garantisca un pro fitto certo immediato, avendo chiuso in pareggio le posizioni nei successivi istanti.

K	x	y	z	$v(0, K)$	$i(0, K)$
0	287	46			
0.5	300		97	$287/300 = 0.9567$	$\left(\frac{1}{0.9567}\right)^{0.5} - 1$
1		50	100	$46/50 = 0.92$	$\left(\frac{1}{0.92}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$

Γ prezzi impliciti:
 su z

$$\bar{v}(0, 0.5, 1) = \frac{0.92}{0.9567} = 0.9617$$

$$v(0, 0.5, 1) = \frac{97}{100} = 0.97$$

non sono uguali
 $\hookrightarrow$ non è coerente con il mercato

$$v(0, 0.5, 1) = \frac{v(0, 1)}{v(0, 0.5)} \Rightarrow v(0, 0.5) v(0, 0.5, 1) = v(0, 1)$$

$$v(0, 0.5) v(0, 0.5, 1) = 0.9567 * 0.97 = 0.9280$$

$$0.9280 > 0.92 = v(0, 1)$$

vendere lo ZCB
 con scadenza 0.5 in
 quantità pari a $v(0, 0.5, 1)$

comprare

	0	0.5	1	
A	-0.92		+1	compro ZCB scad. 1
B	$0.9567 * 0.97$	-0.97		vendo lo ZCB scad. 0.5 in quantità pari al p. term.
C		+0.97	-1	vendo il titolo e termino
	$0.9280 - 0.92$ = 0.0080	0	0	

	0	0.5	1
Vendo 2 allo scopeo		97	-100
Vendo 97/300 x	97. $\frac{287}{300}$	-97	
acquisto 2 fideli y	-2.46		100

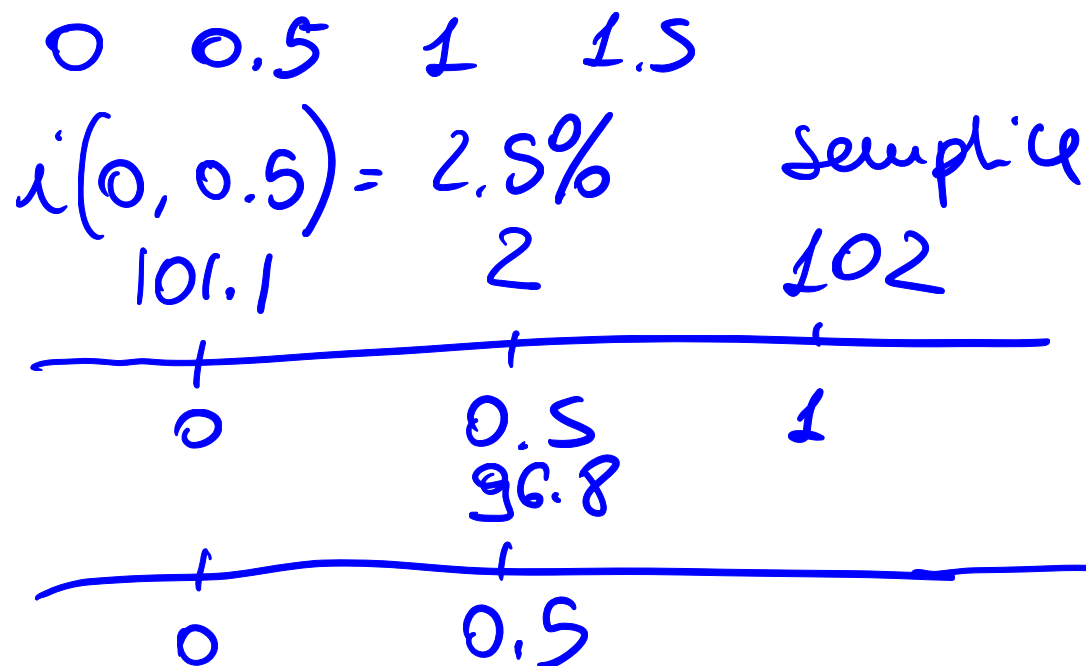
Esercizio 11

Sul mercato TXRATES, ad un certo istante, sono presenti le seguenti quotazioni:

- tasso annuo semplice a sei mesi del 2.5%;
- titolo a cedola fissa semestrale del 4% nominale annuo, con nominale 100 euro, scadenza un anno e prezzo 101.1 euro;
- contratto a termine, che paga 100 a un anno e mezzo, con prezzo pagabile fra sei mesi di 96.8 euro.

Si calcoli la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine in vigore su questo mercato (tempo in anni, tassi in % e composti in base annua).

In tale mercato, si voglia proporre un contratto a termine, con rimborso di 100 000 euro fra un anno e pagamento del prezzo P fra sei mesi. Che prezzo si deve fissare per evitare arbitraggi non rischiosi?



Calculation of the 6-month forward rate:

$$1 = \frac{1}{1 + 0.025 \times 0.5} = 1.0125$$

$$1.0125 = (1 + i^*)^{0.5}$$

$$i^* = (1.0125)^{\frac{1}{0.5}} - 1$$

$$i^* = 2.516\%$$

Calculation of the 6-month discount factor:

$$\gamma(0, 0.5) = (1 + 0.02516)^{-0.5}$$

Calculation of the 1.5-year discount factor:

$$101.1 = 2 \gamma(0, 0.5) + 102 \gamma(0, 1)$$

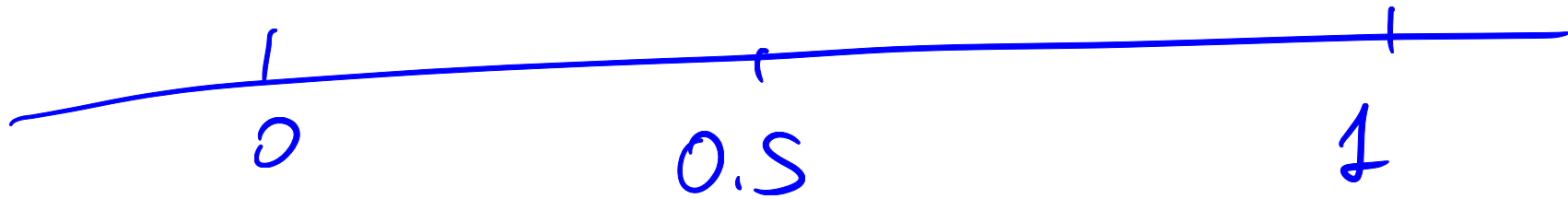
$$\gamma(0, 1) = \frac{101.1 - 2 \gamma(0, 0.5)}{102}$$

$$\nu(0, 0.5, 1.5) = 0.268$$

$$\nu(0, 1.5) = \nu(0, 0.5) \nu(0, 0.5, 1.5)$$

p

100 000



$$p = 100000 \nu(0, 0.5, 1)$$

Esercizio 12

Si consideri un mercato in cui, al tempo $t = 0$, sono quotati i seguenti tre titoli (tutti riferiti a un facciale $C = 100$):

- un TCN a pronti, con scadenza $t_3 = 3$ anni, e prezzo $P = 90$;
- un TCN a termine, con scadenza $t_3 = 3$ anni con prezzo, da pagare in $t_2 = 2$ anni di $P = 94$;
- un TCF a pronti, con scadenza $t_3 = 3$ anni, cedola annuale, tasso cedolare annuo del 3.5% e quotato alla pari.

Si determini anzitutto la struttura per scadenza dei tassi di interessi a pronti, esprimendola in forma percentuale e su base annua.

Si calcoli in questo mercato il prezzo P di una rendita posticipata di durata $m = 3$ rate annuali, tutte pari a $R = 600$.

K	TCN1	TCN2	TCF	$v(0, K)$	$v(0, K-1, K)$
0	90		100		
1			3.5	0.9999	
2		94	3.5	0.9574	
3	100	100	103.5	0.90	0.94

$$v(0, 2, 3) = \frac{v(0, 3)}{v(0, 2)} \Rightarrow v(0, 2) = \frac{v(0, 3)}{v(0, 2, 3)} = \frac{0.90}{0.94}$$

$$100 = 3.5 v(0, 1) + 3.5 v(0, 2) + 103.5 v(0, 3)$$

$$v(0,1) = \frac{100 - 3.5 v(0,2) - 103.5 v(0,3)}{3.5}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= 600 v(0,1) + 600 v(0,2) + 600 v(0,3) = \\ &= 600 * 0.9999 + 600 * 0.9574 + 600 * 0.90 = 1714.29 \end{aligned}$$

Esercizio 13

Un portafoglio obbligazionario è formato da:

- a) BTP con valore di mercato 10 milioni di euro e duration 8 anni e mezzo;
- b) rendite perpetue con rata annuale per un valore attuale di 6 milioni di euro;
- c) BOT a 3 mesi per un valore di rimborso di 5 mln di euro.

Assumendo che la struttura per scadenza dei tassi sia piatta al tasso annuo $i = 4\%$, si calcoli il valore V e la duration D del portafoglio.

Il portafoglio viene poi ribilanciato nel seguente modo: tutti i titoli di Stato Italiani vengono venduti e al loro posto viene acquistato un valore pari a V_0 (incognito) titoli di Stato a cedola nulla Tedeschi a 2 anni, in modo tale che la duration complessiva del nuovo portafoglio sia di 10 anni. Si calcoli il valore V_0 necessario a tale scopo.

	V_0	V_f	D
BTP	10'000'000		8.5
rendita perpetua	6'000'000		$\frac{1.04}{0.04} = 26$
BOT	5'000'000 $\times 1.04^{-0.25}$	5'000'000	$\frac{3}{12} = 0.25$
	4'951'213.68		

$$i = 4\%$$

$$D_{rendita} = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1+i}{i}$$

$$V_f = 10'000'000 + 6'000'000 + 4'951'213.68 = 20'951'213.68$$

$$D_p = \frac{10\,000\,000}{20\,951\,213.68} \cdot 8.5 + \frac{6\,000\,000}{20\,951\,213.68} \cdot 26 + \frac{4\,951\,213.68}{20\,951\,213.68} \cdot 0.25$$

$$D_p^N = 10 \quad D_{\text{Bund}} = 2$$

$$V_p^N = 6\,000\,000 + V_0$$

$$D_p^N = \frac{6\,000\,000}{V_p^N} \cdot 26 + \frac{V_0}{V_p^N} \cdot 2$$

$$10 V_p^N = 6\,000\,000 \cdot 26 + 2 V_0$$

$$10 (6\,000\,000 + V_0) = 6\,000\,000 \cdot 26 + 2 V_0$$

$$V_0 (10 - 2) = 6\,000\,000 (26 - 10) \quad V_0 = \frac{16^2 + 6\,000\,000}{8} =$$

$$= 12\,000\,000$$

Esercizio 14

Un investitore acquista un portafoglio del valore attuale di 240 000 euro, composto per il 10% del valore da TCN a un anno, e per il valore restante da TCN a 10 anni. Assumendo una struttura per scadenza piatta al tasso $i = 4.65\%$, si calcoli la duration del portafoglio esprimendola in anni.

Ritenendo tale duration troppo rischiosa, l'investitore decide di liberarsi dei TCN a 10 anni e investire una frazione α dei proventi in altri TCN a 1 anno, e la restante frazione $(1 - \alpha)$ in rendite perpetue mensili, con rata $R = 800$ euro.

Si calcoli la frazione α necessaria a rendere la duration complessiva pari a 3 anni.

Esercizio 15

Si consideri un portafoglio obbligazionario del valore complessivo di 500 mln di euro, investito per il 30% del valore in BOT a un anno, e per il resto in BTP con duration di 9 anni. La struttura dei tassi di interesse è piatta al tasso annuo $i = 4.25\%$. Si calcoli la duration D del portafoglio.

Si decide di ribilanciare il portafoglio per aumentarne la duration di 8 mesi, vendendo un certo ammontare V di BOT e acquistando rendite immediate, posticipate a rata annuale costante con durata $m = 20$ anni per un valore identico. Si calcoli il valore V da disinvestire (e reinvestire) a tale scopo.

P 500 000 000

BOT	30%	$DBOT = 1$
BTP	70%	$DBTP = 9$

$$i = 4.25\%$$

$$D_p = 0.30 * 1 + 0.70 * 9 = 6.6$$

$$D_{new} = 6.6 + \frac{8}{12} = 7.2667$$

$$D_{rendita} = \frac{1.0425}{0.0425} - \frac{20}{1.0425^{20} - 1} = 9.1318$$

$$\text{Portafoglio} = 30\% \text{ BOT} + 70\% \text{ BTP}$$

30% $\begin{cases} \text{BOT} \\ \text{zendite} \end{cases}$

α BOT $1-\alpha$ zendite

α 30% BOT $(1-\alpha)$ 30% zendite 70% BTP

$$7,2667 = \alpha \cdot 0,30 \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0,30 \cdot 9,1318 + 0,70 \cdot 9$$

$$7,2667 = \alpha (0,3 - 0,3 \cdot 9,1318) + 0,7 \cdot 9$$

$$\alpha = \frac{7,2667 - 0,7 \cdot 9}{0,3 - 0,3 \cdot 9,1318} = 0,726726 = 72,6726\%$$

$$1-\alpha = 0,273274 = 27,3274\%$$

$$\begin{aligned} 72,67\% \cdot 30\% &= 21,80\% \text{ BOT} & 70\% \text{ BTP} \\ 27,33\% \cdot 30\% &= 8,2\% \text{ zendite} \end{aligned}$$

Esercizio 16

In un mercato in cui la struttura per scadenza è piatta al tasso annuo $i = 4,36\%$, un investitore detiene un portafoglio del valore complessivo di 38 mln di euro, formato per il 60% del valore da rendite perpetue a rata annuale costante e per il resto da BOT a 6 mesi. Si calcoli la duration del portafoglio.

L'investitore decide poi di acquistare titoli a cedola nulla con maturità T da decidere, per un valore complessivo di 200 mln di euro. Si calcoli la maturità che deve essere fissata affinché il portafoglio complessivo dell'investitore abbia una duration di 4 anni.