Integrali

25 novembre 2014

Primitiva di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$, intervallo di $\mathcal{R}$.

Primitiva di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$, intervallo di $\mathcal{R}$.

Si chiama **primitiva** di f, ogni funzione $F(x)$ derivabile in $\mathbf{X}$, per cui si abbia:

$$\mathrm{D}[F(x)] = f(x),\ \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Esempio

Verificare se la funzione

$$F(x) = \operatorname{sen} x + 5$$

è una primitiva di

$$f(x) = \cos x.$$

Esempio

Verificare se la funzione

$$F(x) = \operatorname{sen} x + 5$$

è una primitiva di

$$f(x) = \cos x.$$

$$D[F(x)] =$$

Esempio

Verificare se la funzione

$$F(x) = \operatorname{sen} x + 5$$

è una primitiva di

$$f(x) = \cos x.$$

$$\mathrm{D}[F(x)] = \cos x = f(x), \; \forall\, x \in \mathcal{R}$$

Esempio

Verificare se la funzione

$$F(x) = \operatorname{sen} x + 5$$

è una primitiva di

$$f(x) = \cos x.$$

$$\mathrm{D}[F(x)] = \cos x = f(x),\ \forall\, x \in \mathcal{R}$$

$$\Downarrow$$

$F(x)$ è una primitiva di $f(x) = \cos x.$

Osservazione

Il problema della determinazione della primitiva consiste in:

Osservazione

Il problema della determinazione della primitiva consiste in:

1. verifica dell'esistenza di soluzioni;

Osservazione

Il problema della determinazione della primitiva consiste in:

1. verifica dell'esistenza di soluzioni;
2. verifica dell'eventuale unicità;

Osservazione

Il problema della determinazione della primitiva consiste in:

1. verifica dell'esistenza di soluzioni;
2. verifica dell'eventuale unicità;
3. calcolo delle soluzioni.

Esistenza di soluzioni

Teorema

Esistenza di soluzioni

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$.

Esistenza di soluzioni

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$. Se f è continua in $\mathbf{X}$, allora essa ammette primitive.

Caratterizzazione delle primitive

Teorema

Caratterizzazione delle primitive

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$.

Caratterizzazione delle primitive

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$. Se f è dotata di primitive, allora esse sono in numero infinito e differiscono tra loro per una costante:

Caratterizzazione delle primitive

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$. Se f è dotata di primitive, allora esse sono in numero infinito e differiscono tra loro per una costante:

1. $F(x)$ primitiva di f

Caratterizzazione delle primitive

Teorema
Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$. Se f è dotata di primitive, allora esse sono in numero infinito e differiscono tra loro per una costante:

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Caratterizzazione delle primitive

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$. Se f è dotata di primitive, allora esse sono in numero infinito e differiscono tra loro per una costante:

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;
2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di f

Caratterizzazione delle primitive

Teorema
Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{X}$. Se f è dotata di primitive, allora esse sono in numero infinito e differiscono tra loro per una costante:

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;
2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di $f \Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathcal{R}$.

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c]$$

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c] = f(x)$$

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c] = f(x)$$

2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di $f \Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathcal{R}$.

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c] = f(x)$$

2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di $f \Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathcal{R}$.

$$\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$$
$$\mathrm{D}[G(x)] = f(x)$$

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;
Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c] = f(x)$$

2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di $f \Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathcal{R}$.

$$\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$$
$$\mathrm{D}[G(x)] = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{D}[F(x)] - \mathrm{D}[G(x)] = 0$$

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;
Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c] = f(x)$$

2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di $f \Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[F(x)] &= f(x) \\ \mathrm{D}[G(x)] &= f(x) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{D}[F(x)] - \mathrm{D}[G(x)] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{D}[F(x) - G(x)] = 0$$

Dimostrazione

1. $F(x)$ primitiva di $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathcal{R}$ primitiva di f;

Per ipotesi $\mathrm{D}[F(x)] = f(x)$;

$$\mathrm{D}[G(x)] = \mathrm{D}[F(x)] + \mathrm{D}[c] = f(x)$$

2. $F(x)$ e $G(x)$ primitive di $f \Rightarrow F(x) - G(x) = c,\ c \in \mathcal{R}$.

$$\begin{gathered}\mathrm{D}[F(x)] = f(x)\\ \mathrm{D}[G(x)] = f(x)\end{gathered}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{D}[F(x)] - \mathrm{D}[G(x)] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{D}[F(x) - G(x)] = 0 \Leftrightarrow F(x) - G(x) = c$$

Integrale indefinito

Sia $f(x)$ una funzione dotata di primitive.

Integrale indefinito

Sia $f(x)$ una funzione dotata di primitive.
L'insieme di tali primitive si chiama **integrale indefinito** di f:

$$\int f(x)dx$$

Integrale indefinito

Sia $f(x)$ una funzione dotata di primitive.
L'insieme di tali primitive si chiama **integrale indefinito** di f:

$$\int f(x)dx$$

Si usa scrivere:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \;\; c \in \mathcal{R}\,,$$

dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di f.

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.
Si dice che la primitiva $F(x)$ è ottenuta integrando $f(x)$.

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.
Si dice che la primitiva $F(x)$ è ottenuta integrando $f(x)$.
Esempio:
Calcoliamo l'integrale indefinito di $f(x) = 2x$.

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.
Si dice che la primitiva $F(x)$ è ottenuta integrando $f(x)$.
Esempio:
Calcoliamo l'integrale indefinito di $f(x) = 2x$.
$F(x) = x^2$,

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.
Si dice che la primitiva $F(x)$ è ottenuta integrando $f(x)$.
Esempio:
Calcoliamo l'integrale indefinito di $f(x) = 2x$.
$F(x) = x^2$, $\mathrm{D}[F(x) = f(x)]$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.
Si dice che la primitiva $F(x)$ è ottenuta integrando $f(x)$.
Esempio:
Calcoliamo l'integrale indefinito di $f(x) = 2x$.
$F(x) = x^2$, $\mathrm{D}[F(x) = f(x)] \Rightarrow F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è determinato quando si è ottenuta una sua primitiva $F(x)$.
Si dice che la primitiva $F(x)$ è ottenuta integrando $f(x)$.
Esempio:
Calcoliamo l'integrale indefinito di $f(x) = 2x$.
$F(x) = x^2$, $\mathrm{D}[F(x) = f(x)] \Rightarrow F(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Quindi:

$$\int 2x dx = x^2 + c.$$

Integrale indefinito

Alcuni metodi di risoluzione:

Integrale indefinito

Alcuni metodi di risoluzione:

- decomposizione in somma:

$$\int af(x) + bg(x)\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx$$

Integrale indefinito

Alcuni metodi di risoluzione:

- decomposizione in somma:

$$\int af(x) + bg(x)\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx$$

- integrazione per parti;

Integrale indefinito

Alcuni metodi di risoluzione:

- decomposizione in somma:

$$\int af(x) + bg(x)\ dx = a\int f(x)\ dx + b\int g(x)\ dx$$

- integrazione per parti;
- integrazione per sostituzione;

Integrale indefinito

Alcuni metodi di risoluzione:

- decomposizione in somma:

$$\int af(x) + bg(x)\; dx = a\int f(x)\; dx + b\int g(x)\; dx$$

- integrazione per parti;
- integrazione per sostituzione;
- integrazione delle funzioni razionali.

Integrali immediati

$$\int 1 \, dx = x + c \qquad \Bigg| \qquad \int f'(x) \, dx = f(x) + c$$

Integrali immediati

$$\int 1 \, dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} \, dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$\alpha \neq -1$

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + c$$

$$\int f(x)^{\alpha} \, f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

Integrali immediati

$$\int 1 \, dx = x + c$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$$\alpha \neq -1$$

$$\int x^{-1} \, dx = \log |x| + c$$

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + c$$

$$\int f(x)^\alpha \; f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$$\int f(x)^{-1} \; f'(x) \, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx =$$

$$= \log |f(x)| + c$$

Integrali immediati

$$\int 1\, dx = x + c \qquad \int f'(x)\, dx = f(x) + c$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c, \qquad \int f(x)^\alpha\, f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$$\alpha \neq -1$$

$$\int x^{-1}\, dx = \log|x| + c \qquad \int f(x)^{-1}\, f'(x)\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx =$$

$$= \log|f(x)| + c$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \qquad \int \sqrt{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{f(x)^3} + c$$

Integrali immediati

$$\int 1\, dx = x + c \qquad \int f'(x)\, dx = f(x) + c$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c, \qquad \int f(x)^\alpha\, f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$\alpha \neq -1$

$$\int x^{-1}\, dx = \log|x| + c \qquad \int f(x)^{-1}\, f'(x)\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx =$$

$$= \log|f(x)| + c$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \qquad \int \sqrt{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{f(x)^3} + c$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + c \qquad \int a^{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$$

Integrali immediati

$$\int 1\,dx = x + c$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$\alpha \neq -1$

$$\int f(x)^\alpha\,f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c,$$

$$\int x^{-1}\,dx = \log|x| + c$$

$$\int f(x)^{-1}\,f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx =$$

$$= \log|f(x)| + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \sqrt{f(x)}\,f'(x)\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{f(x)^3} + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int a^{f(x)}\,f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)}\,f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int \operatorname{sen}\left(f(x)\right) \; f'(x) \, dx =$ $= -\cos\left(f(x)\right) + c$

$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) \; f'(x) \, dx =$ $= -\cos(f(x)) + c$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \cos(f(x)) \; f'(x) \, dx =$ $= \operatorname{sen}(f(x)) + c$

$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) \; f'(x) \, dx =$
	$= -\cos(f(x)) + c$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \cos(f(x)) \; f'(x) \, dx =$
	$= \operatorname{sen}(f(x)) + c$
$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \, dx =$	$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2(f(x))\right) f'(x) \, dx =$

$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) \; f'(x) \, dx =$ $= -\cos(f(x)) + c$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \cos(f(x)) \; f'(x) \, dx =$ $= \operatorname{sen}(f(x)) + c$
$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \, dx =$ $= \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx =$ $= \operatorname{tg} x + c$	$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2(f(x))\right) f'(x) \, dx =$ $= \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \, dx =$ $= \operatorname{tg}(f(x)) + c$

$$\int \left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)\ dx = \int \left(1+\operatorname{cotg}^2 (f(x))\right) f'(x)\ dx =$$

$\int \left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)\, dx =$	$\int \left(1+\operatorname{cotg}^2 (f(x))\right) f'(x)\, dx =$
$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx =$	$= \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\, dx =$
$= -\operatorname{cotg} x + c$	$= -\operatorname{cotg}(f(x)) + c$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arccotg} x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(f(x)\right) + c \\ -\operatorname{arccotg}\left(f(x)\right) + c \end{cases}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}}$$

$$|x| < 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(f(x)) + c \\ -\arccos(f(x)) + c \end{cases}$$

$$|f(x)| < 1$$

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.
Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$.

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.
Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$.
Risulta:

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.
Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$.
Risulta:

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) =$$

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.
Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$.
Risulta:

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.
Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$.
Risulta:

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

la differenza non dipende dalla primitiva scelta

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e sia $F(x)$ una sua primitiva.
Presi $a, b \in \mathbf{X}$, consideriamo la differenza $F(b) - F(a)$.
Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$.
Risulta:

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

la differenza non dipende dalla primitiva scelta ma solo da f, a e b.

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e siano a e $b \in \mathbf{X}$,

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e siano a e $b \in \mathbf{X}$, si chiama **integrale definito di $f(x)$ in $[a, b]$**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Integrale definito

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $\mathbf{X}$ e siano a e $b \in \mathbf{X}$, si chiama **integrale definito di $f(x)$ in $[a, b]$**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.

Integrale definito

Esempio:

Integrale definito

Esempio:
Valutare

$$\int_0^2 2x\ dx$$

Integrale definito

Esempio:
Valutare

$$\int_0^2 2x \, dx$$

Ricordando che x^2 è una primitiva di $2x$, si ha:

Integrale definito

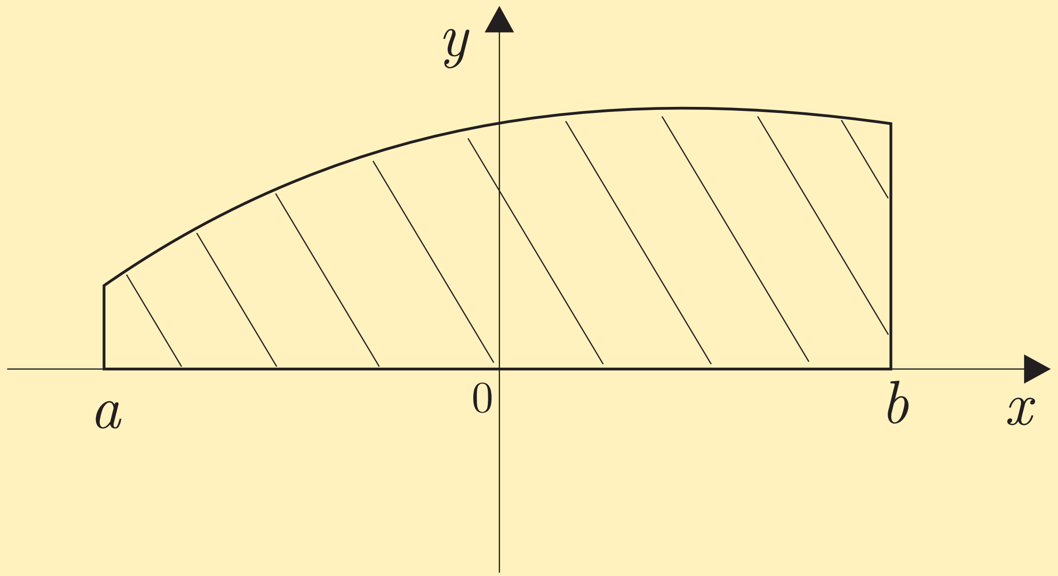
Esempio:
Valutare

$$\int_0^2 2x \; dx$$

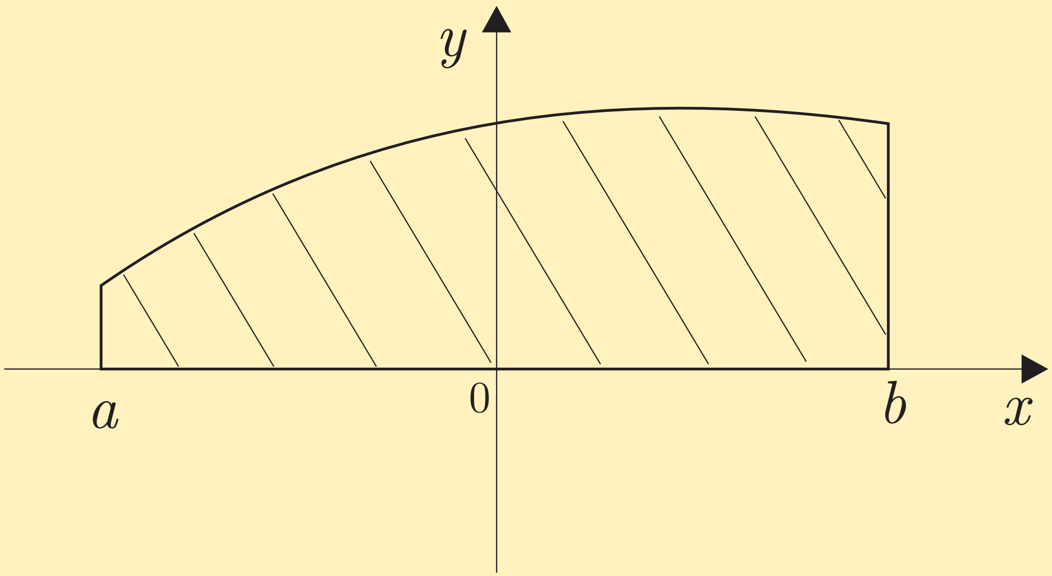
Ricordando che x^2 è una primitiva di $2x$, si ha:

$$\int_0^2 2x \; dx = \left[x^2\right]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4$$

Rettangoloide

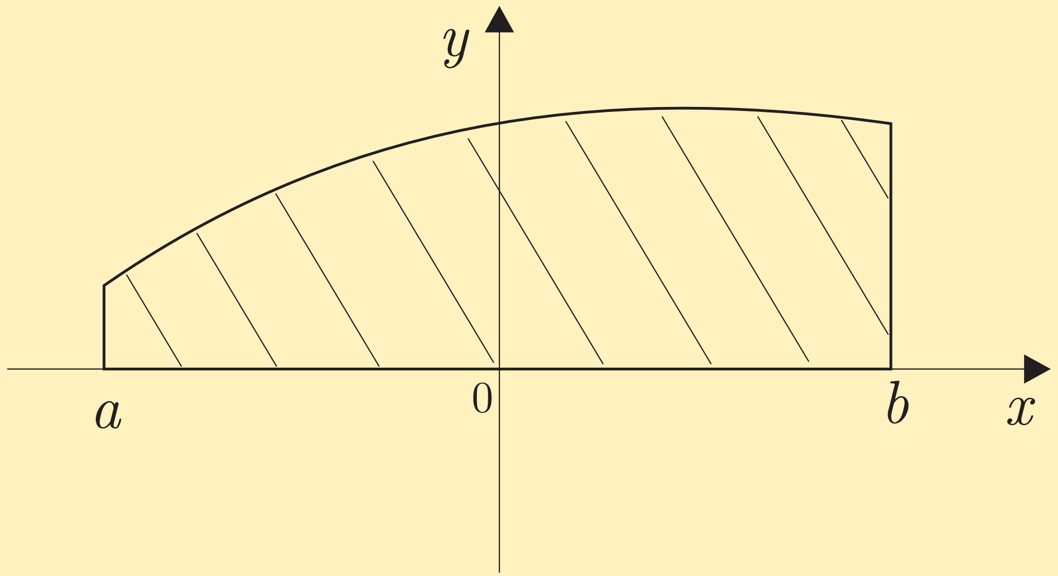


Rettangoloide



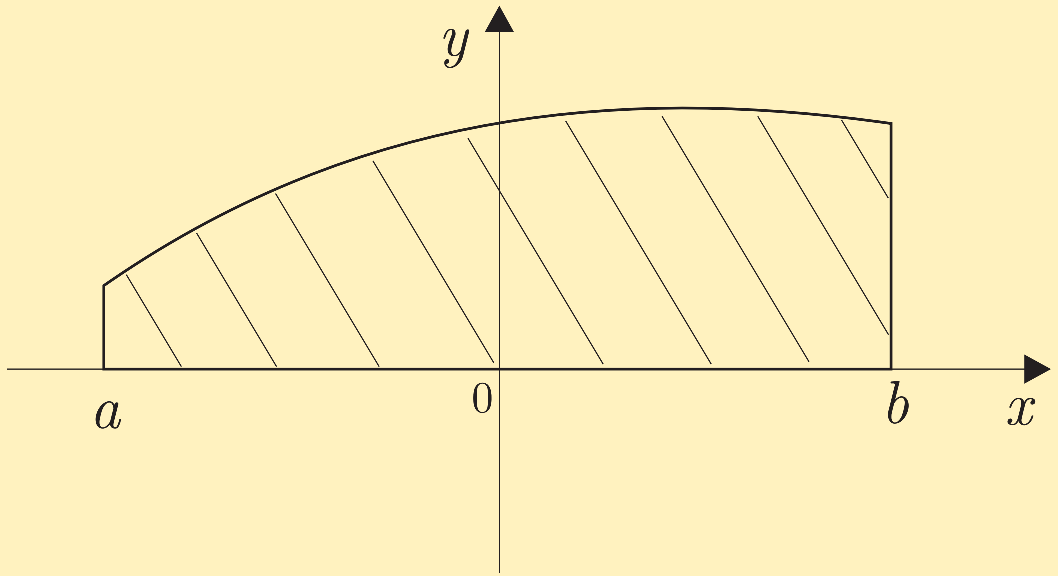
Sia f continua e $f > 0$ in $[a, b]$.

Rettangoloide



Sia f continua e $f > 0$ in $[a, b]$. Si chiama rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$

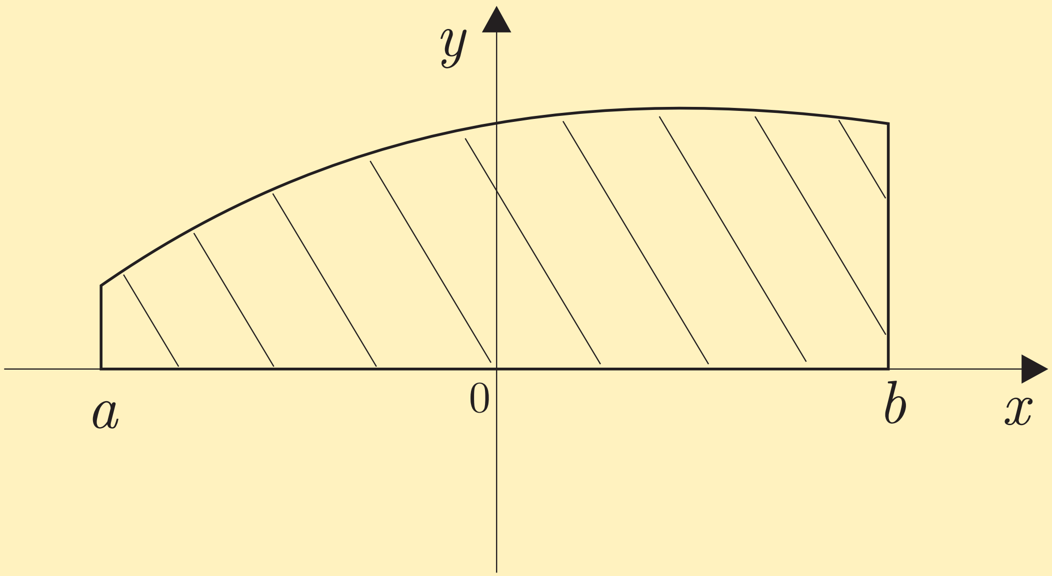
Rettangoloide



Sia f continua e $f > 0$ in $[a, b]$. Si chiama rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$ la regione costituita dai punti le cui coordinate soddisfano:

$$a \leq x \leq b,$$

Rettangoloide

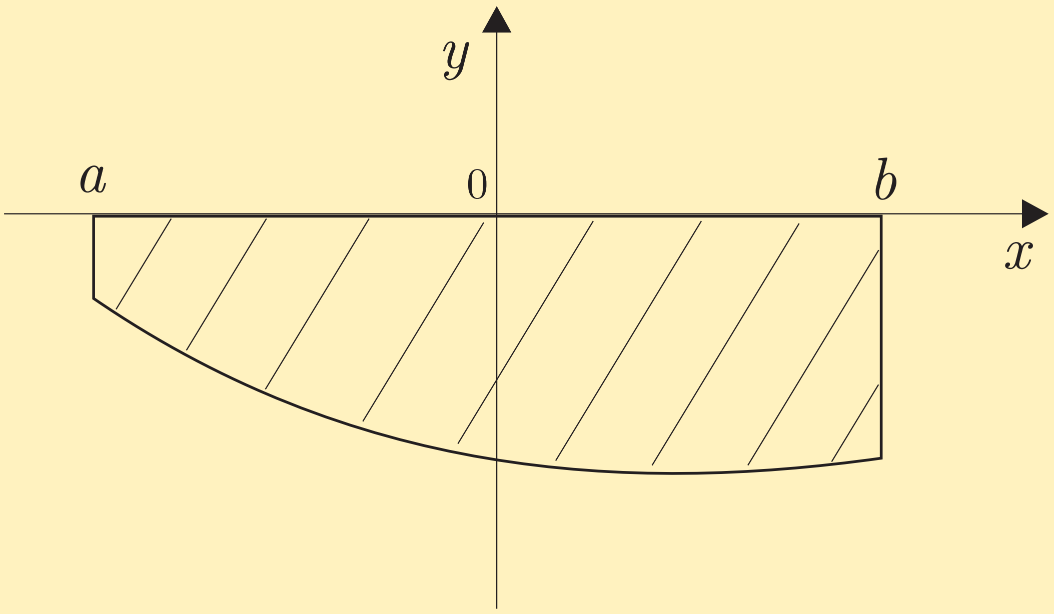


Sia f continua e $f > 0$ in $[a, b]$. Si chiama rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$ la regione costituita dai punti le cui coordinate soddisfano:

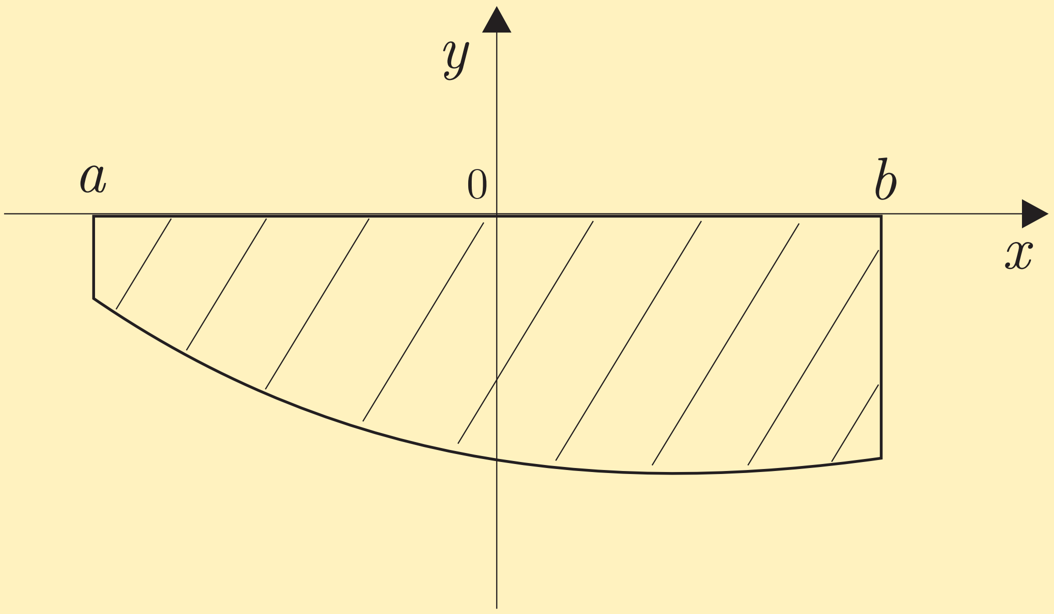
$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

Si dimostra che $\int_a^b f(x)\, dx$ misura l'area del rettangoloide di base $[a, b]$.

Interpretazione geometrica



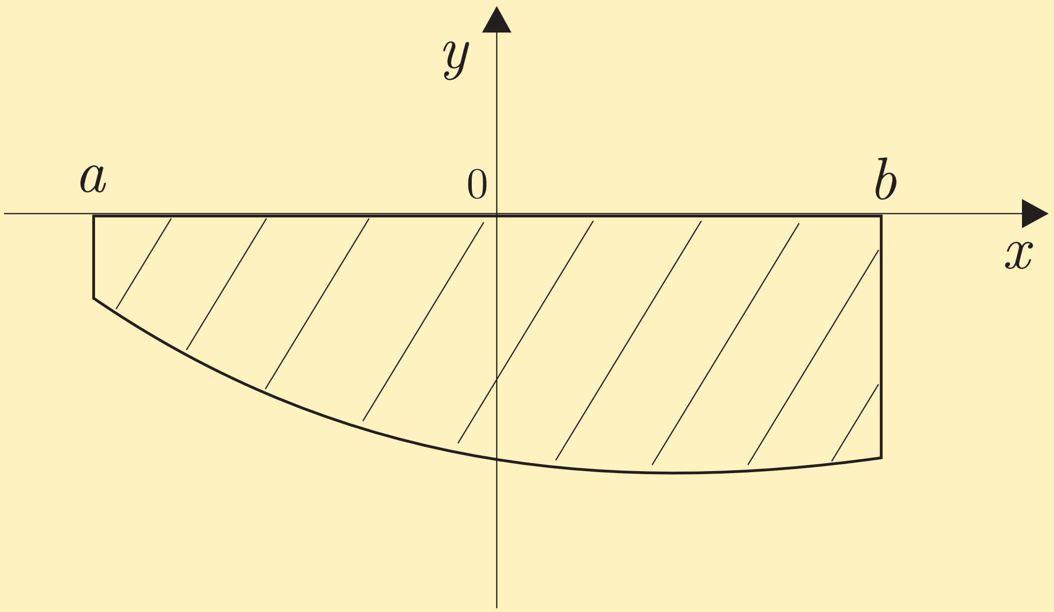
Interpretazione geometrica



Si ha un'interpretazione analoga nel caso in cui f sia continua ma $f < 0$ in $[a, b]$:

$$a \leq x \leq b,$$

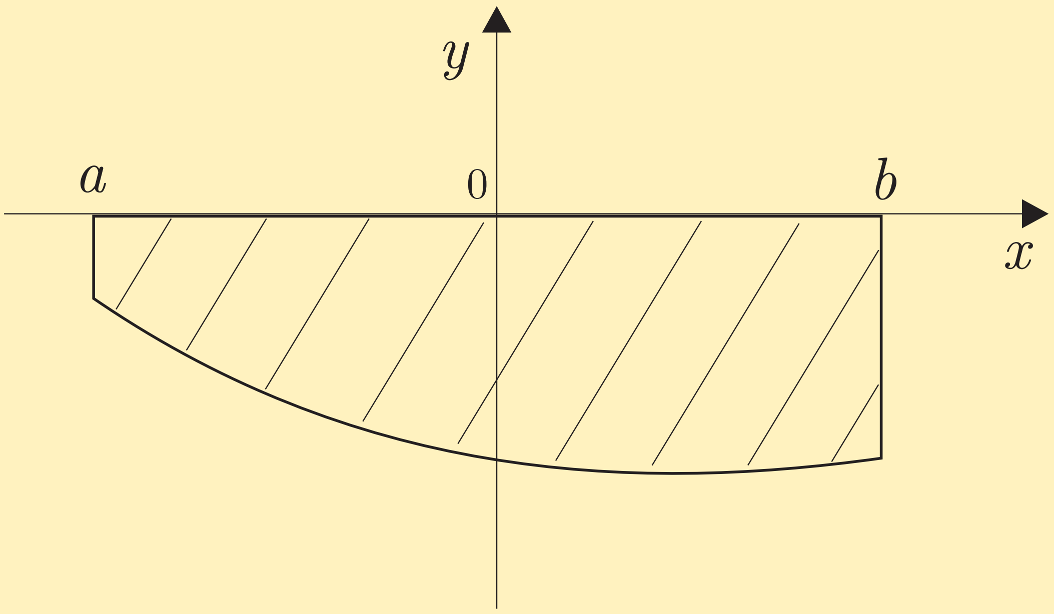
Interpretazione geometrica



Si ha un'interpretazione analoga nel caso in cui f sia continua ma $f < 0$ in $[a, b]$:

$$a \leq x \leq b, \;\; f(x) \leq y \leq 0$$

Interpretazione geometrica



Si ha un'interpretazione analoga nel caso in cui f sia continua ma $f < 0$ in $[a, b]$:

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq 0$$

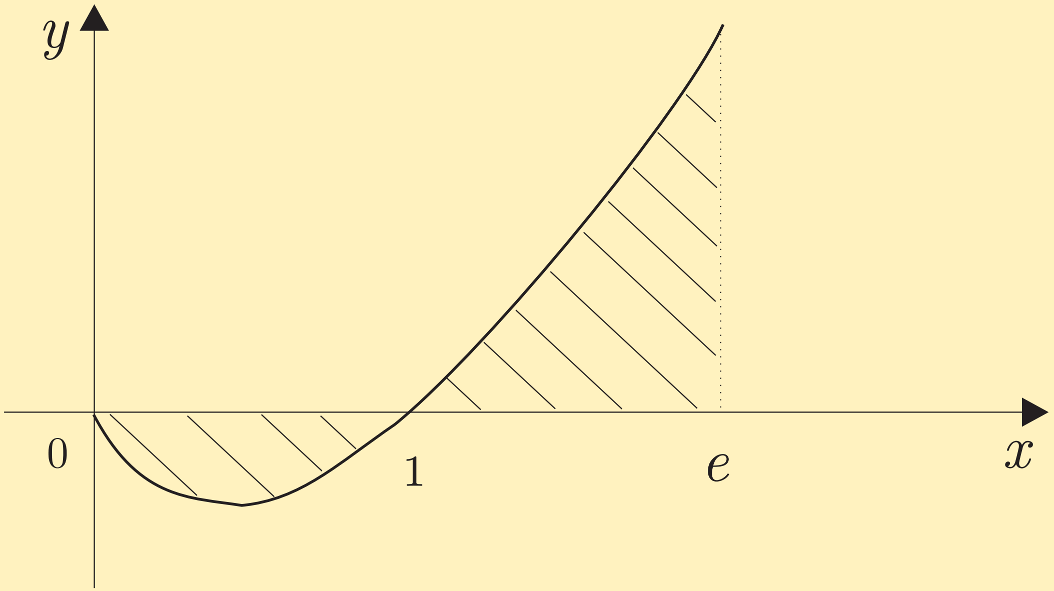
Si dimostra che $\int_a^b f(x)\, dx$ è l'opposto dell'area del rettangoloide di base $[a, b]$.

Interpretazione geometrica

Considerata una f una funzione di segno arbitrario nell'intervallo $[a, b]$.

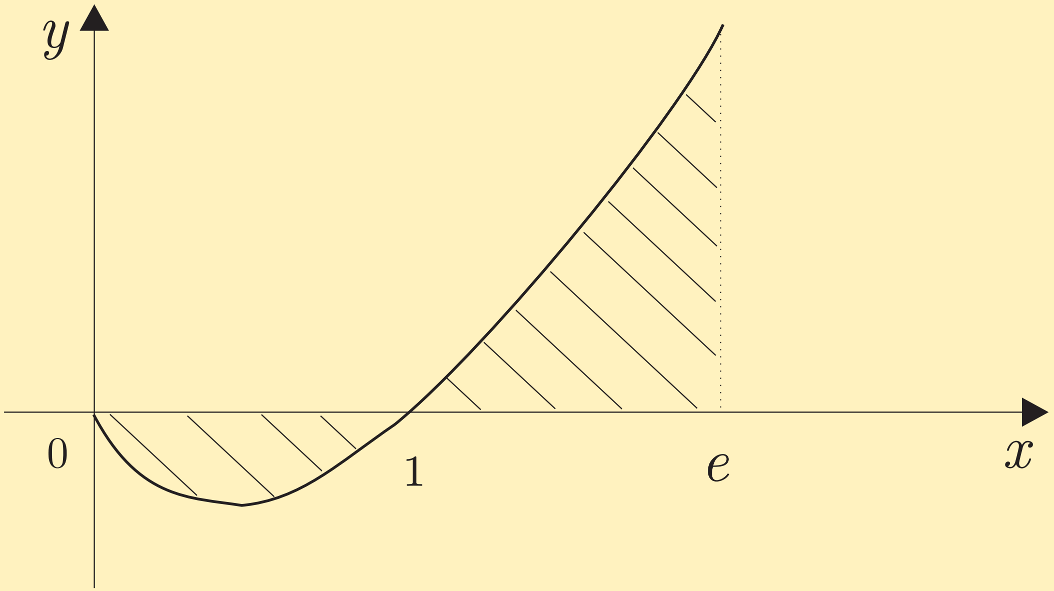
Interpretazione geometrica

Considerata una f una funzione di segno arbitrario nell'intervallo $[a, b]$.



Interpretazione geometrica

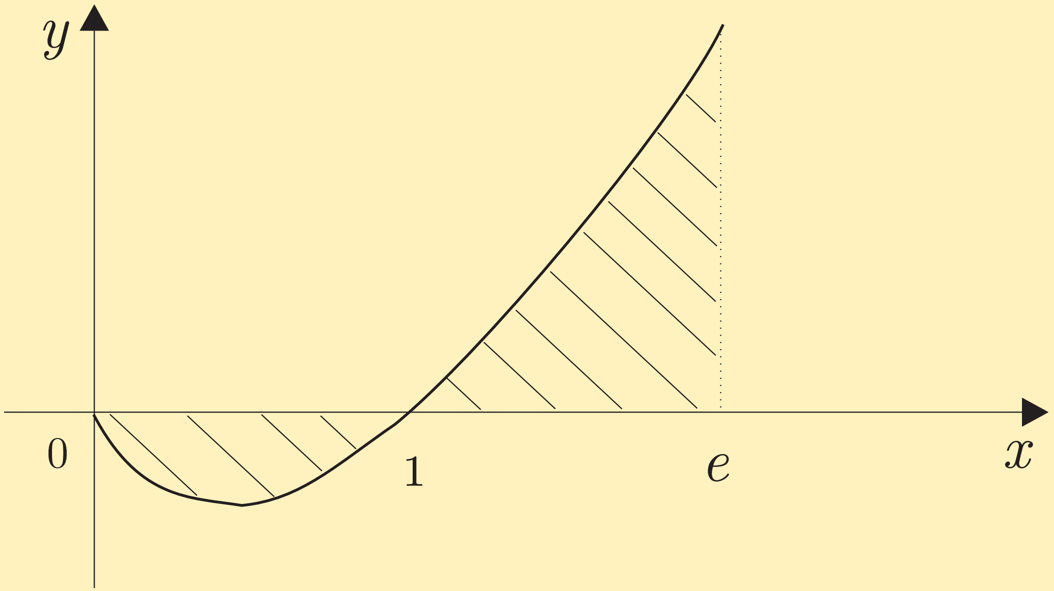
Considerata una f una funzione di segno arbitrario nell'intervallo $[a, b]$.



L'area del rettangoloide di base $[a, b]$ misura:

Interpretazione geometrica

Considerata una f una funzione di segno arbitrario nell'intervallo $[a, b]$.



L'area del rettangoloide di base $[a, b]$ misura:

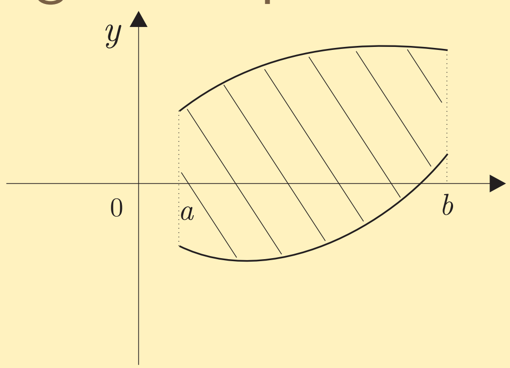
$$\int_a^b |f(x)| \ dx$$

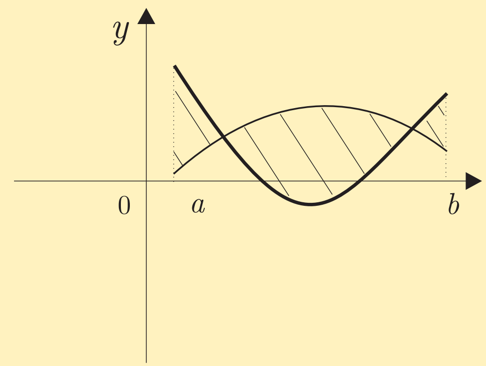
Interpretazione geometrica

Assegnate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a, b]$ i loro grafici delimitano una regione di piano.

Interpretazione geometrica

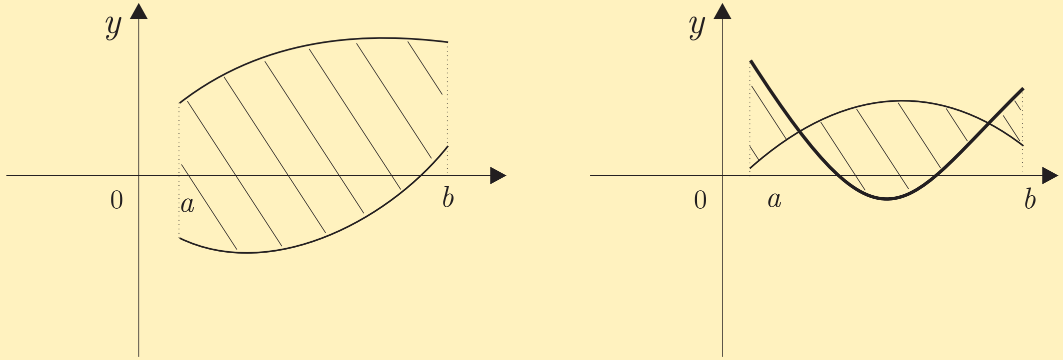
Assegnate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a,b]$ i loro grafici delimitano una regione di piano.





Interpretazione geometrica

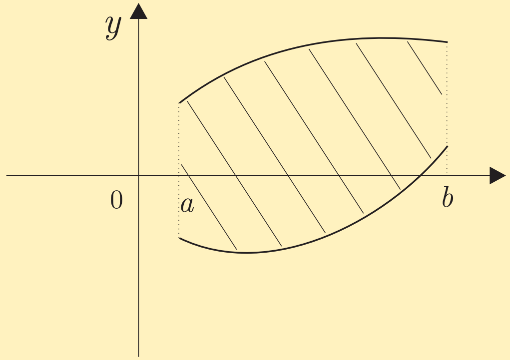
Assegnate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a, b]$ i loro grafici delimitano una regione di piano.

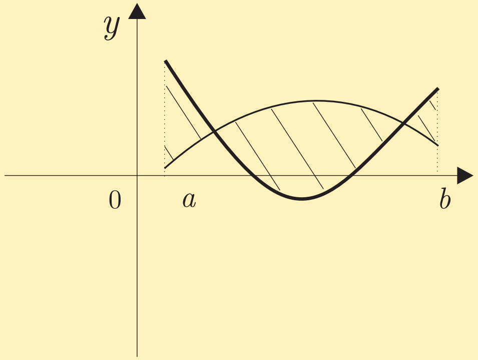


L'area di tale porzione di piano è data da:

Interpretazione geometrica

Assegnate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a,b]$ i loro grafici delimitano una regione di piano.

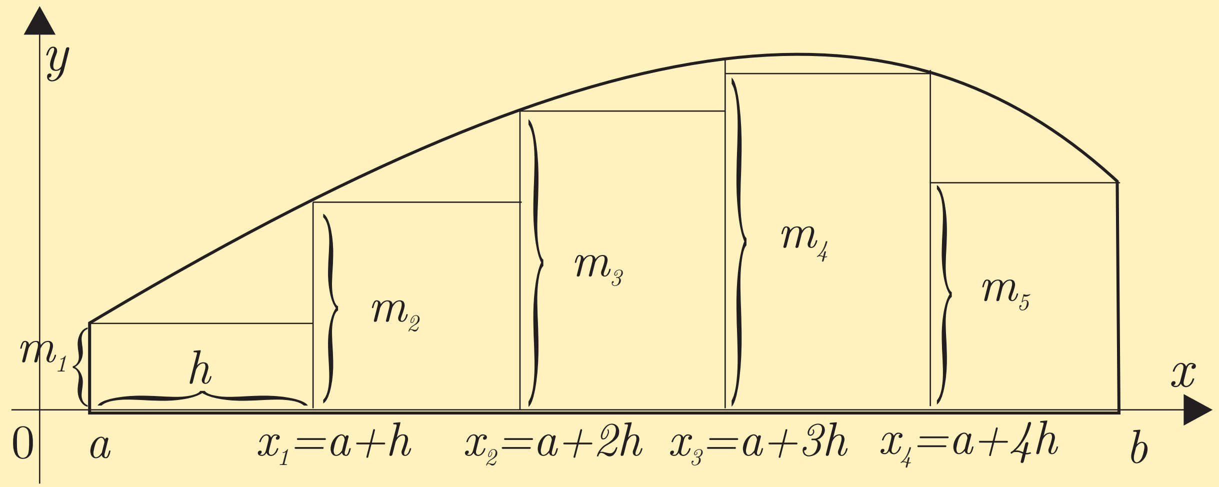




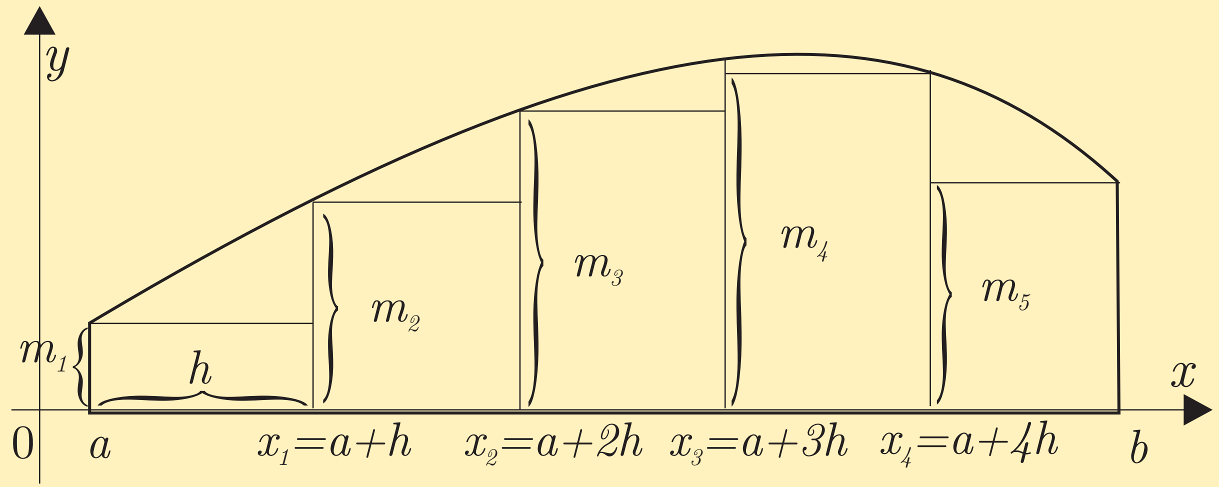
L'area di tale porzione di piano è data da:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Area di un rettangoloide

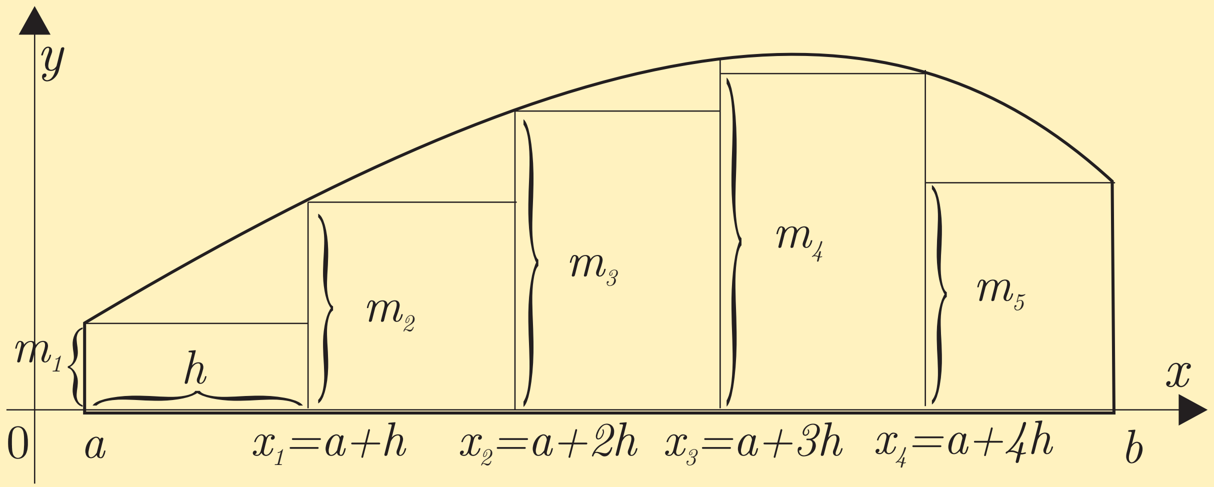


Area di un rettangoloide



Dividiamo $[a, b]$ in n sottointervalli $\mathbf{I}_i, i = 1, 2, .., n$ di ampiezza $h = (b - a)/n$.

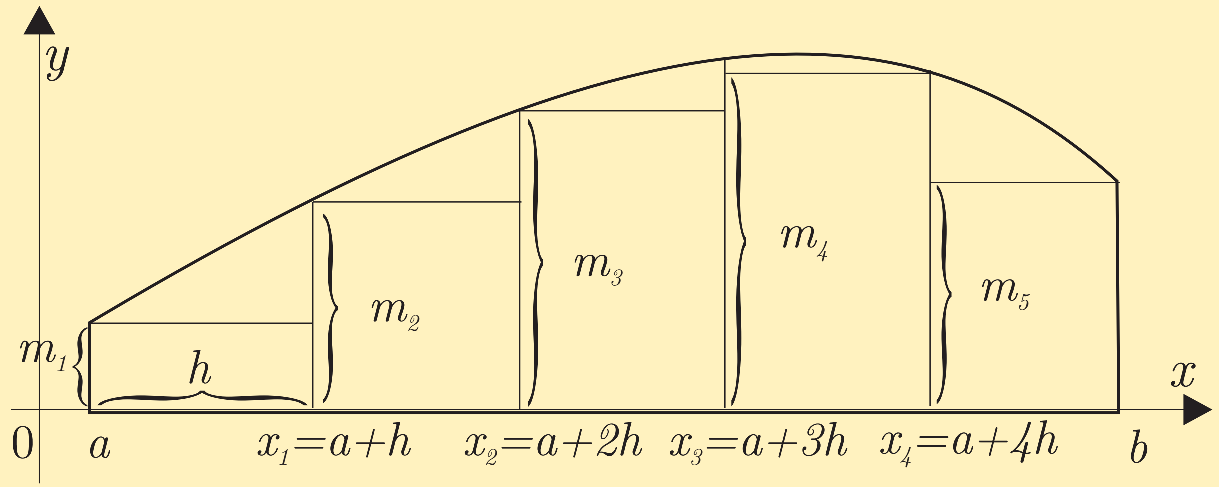
Area di un rettangoloide



Dividiamo $[a, b]$ in n sottointervalli $\mathbf{I}_i, i = 1, 2, .., n$ di ampiezza $h = (b-a)/n$.

Sia $m_i = \min f(x), \;\; x \in \mathbf{I}_i$.

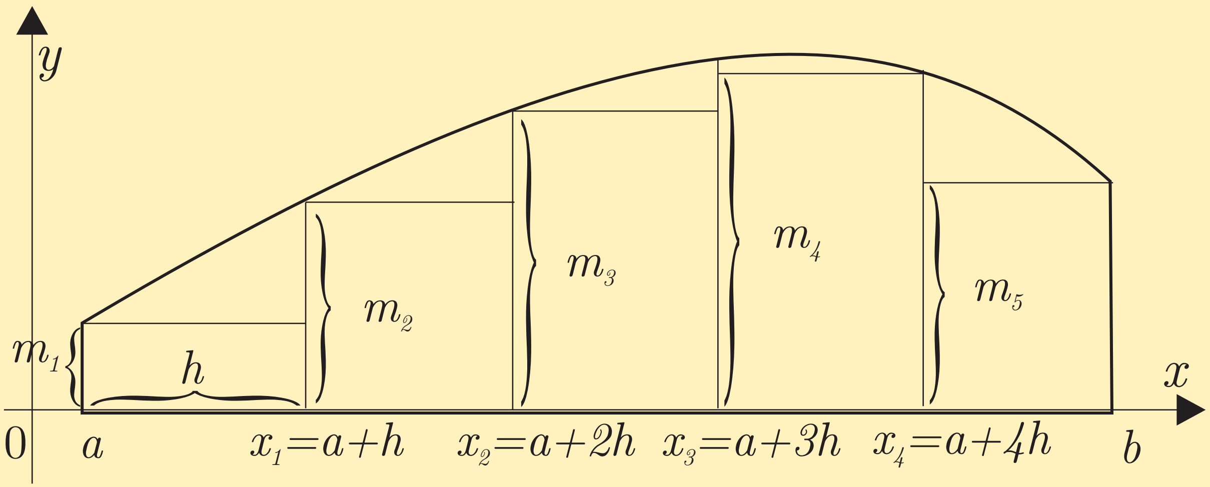
Area di un rettangoloide



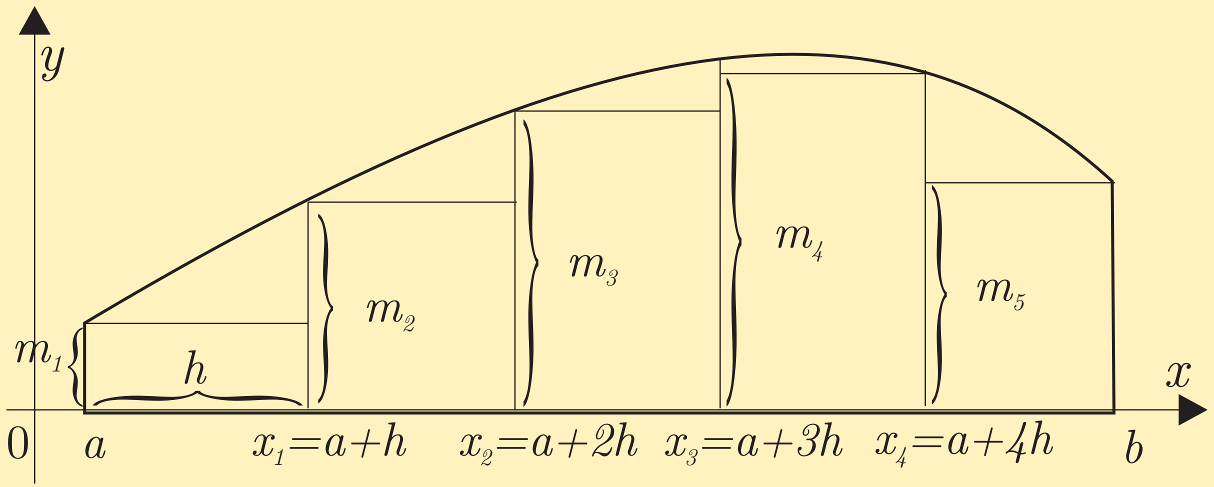
Dividiamo $[a, b]$ in n sottointervalli $\mathbf{I}_i, i = 1, 2, .., n$ di ampiezza $h = (b - a)/n$.

Sia $m_i = \min f(x), \;\; x \in \mathbf{I}_i$.

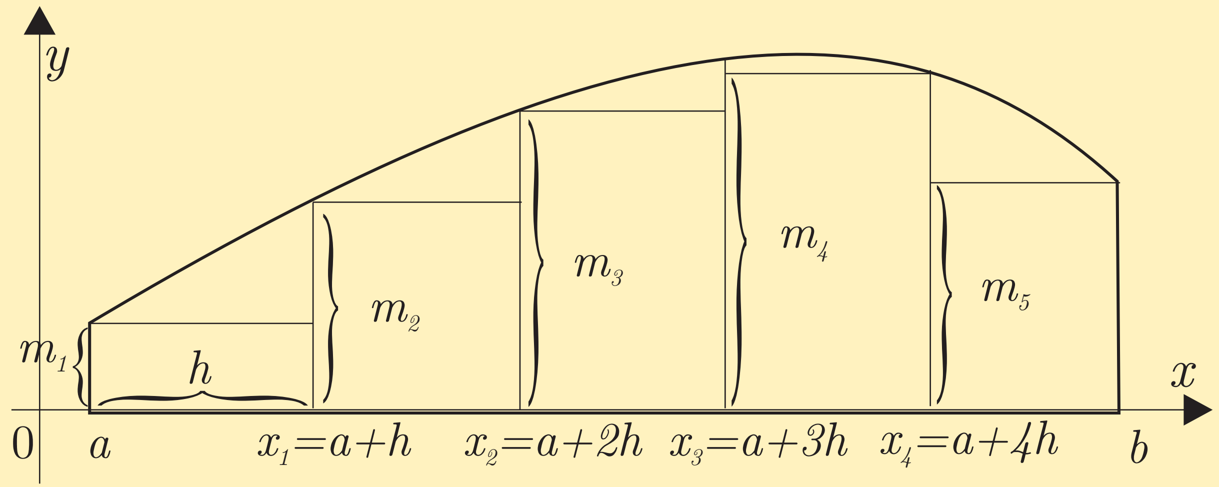
Per ogni $i = 1, ..., n$, costruiamo il rettangolo di base h e altezza m_i.



y
x
0
a
b
h
m_1
m_2
m_3
m_4
m_5
$x_1=a+h$
$x_2=a+2h$
$x_3=a+3h$
$x_4=a+4h$

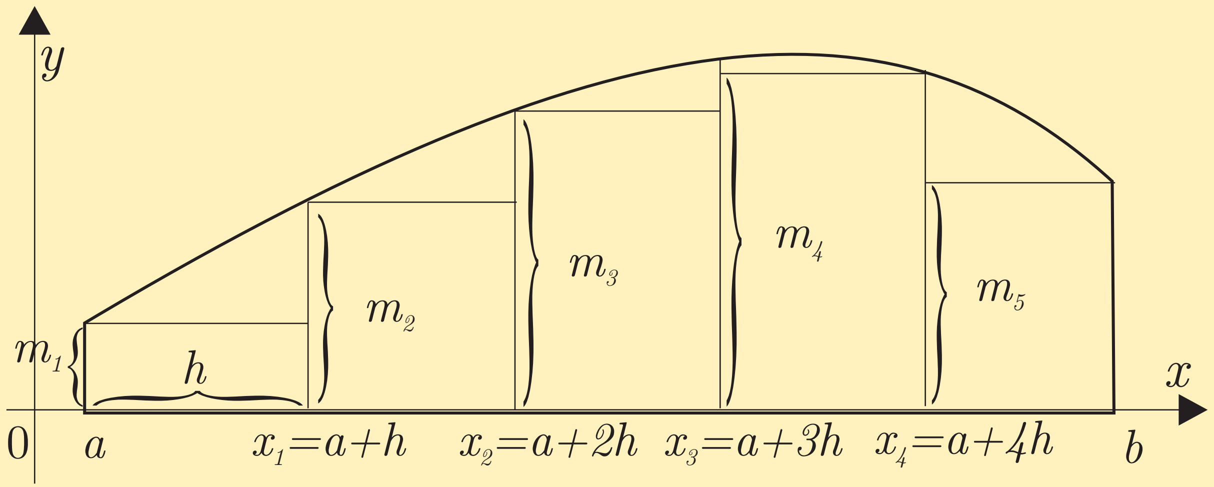


$$
\begin{aligned}
s_n &= h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + \cdots + h \cdot m_n = \\
&= h \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = h \sum_{i=1}^{n} m_i
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned} s_n &= h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + \cdots + h \cdot m_n = \\ &= h \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = h \sum_{i=1}^{n} m_i \end{aligned}$$

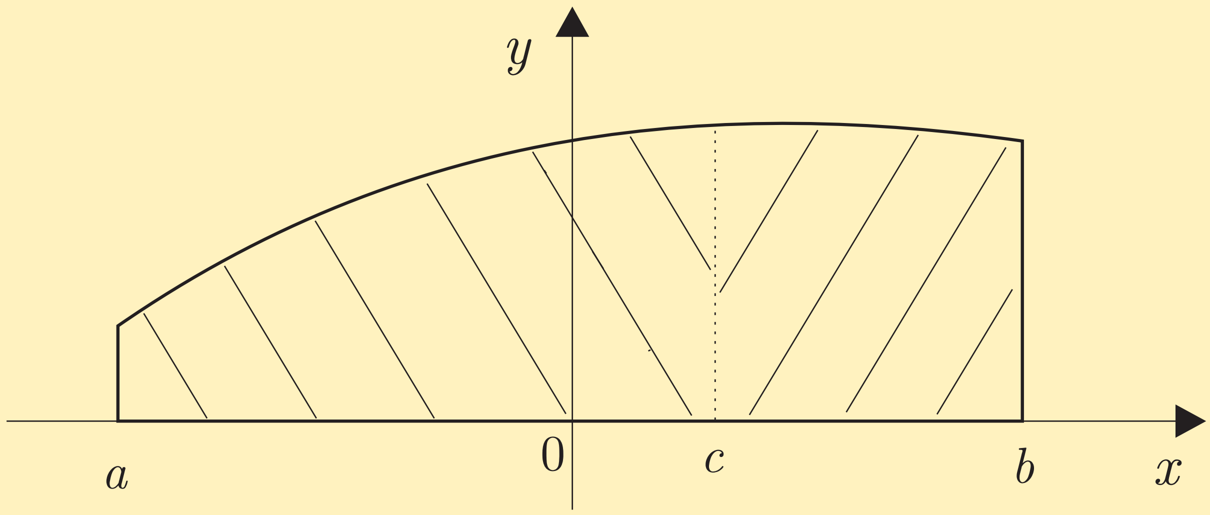
Se $f(x)$ è continua, esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$.



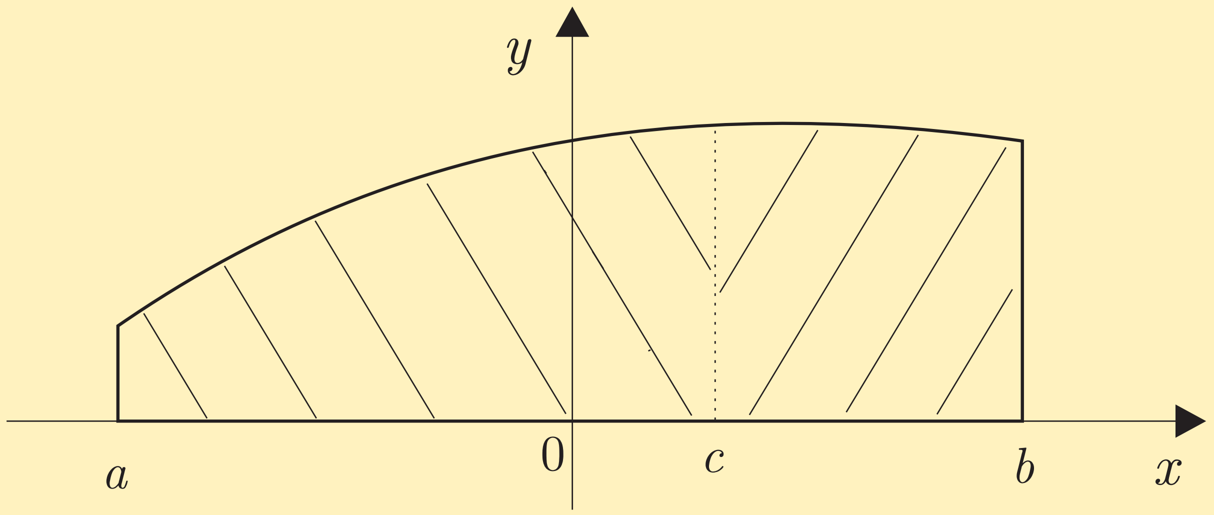
$$\begin{aligned} s_n &= h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + \cdots + h \cdot m_n = \\ &= h \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = h \sum_{i=1}^{n} m_i \end{aligned}$$

Se $f(x)$ è continua, esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$. Tale limite è l'area del rettangoloide.

Teorema di Additività

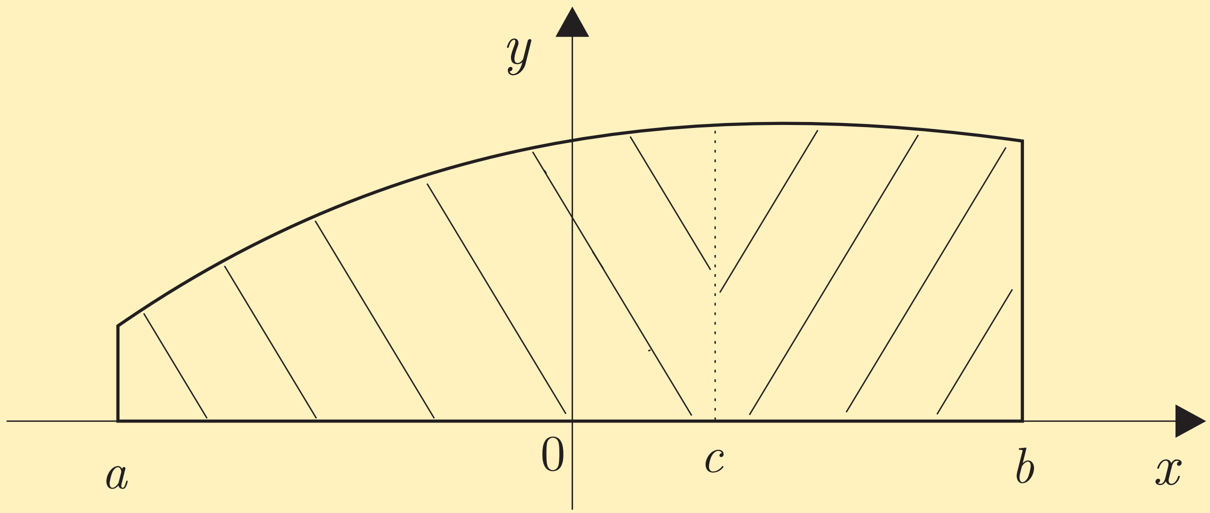


Teorema di Additività



Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$.

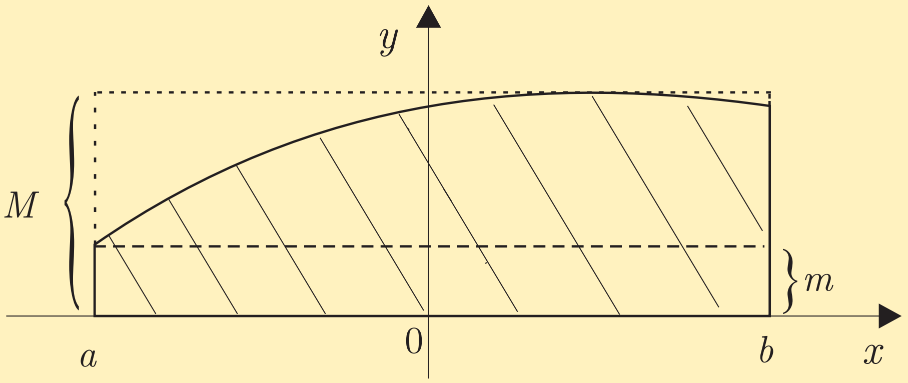
Teorema di Additività

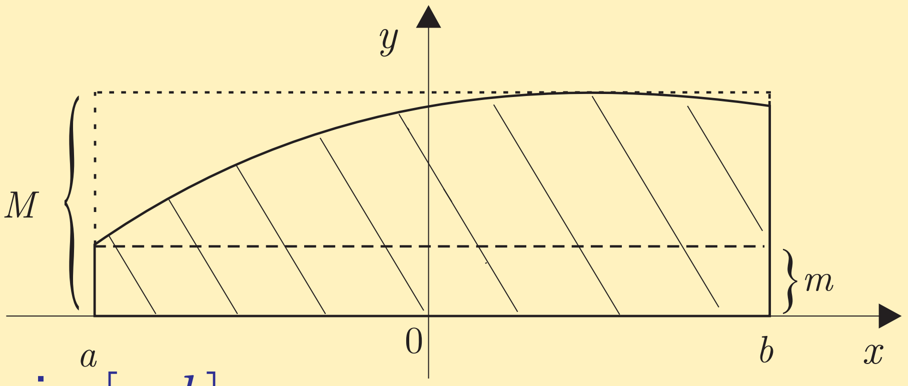


Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$. Se $c \in\,]a, b[$, sussiste:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

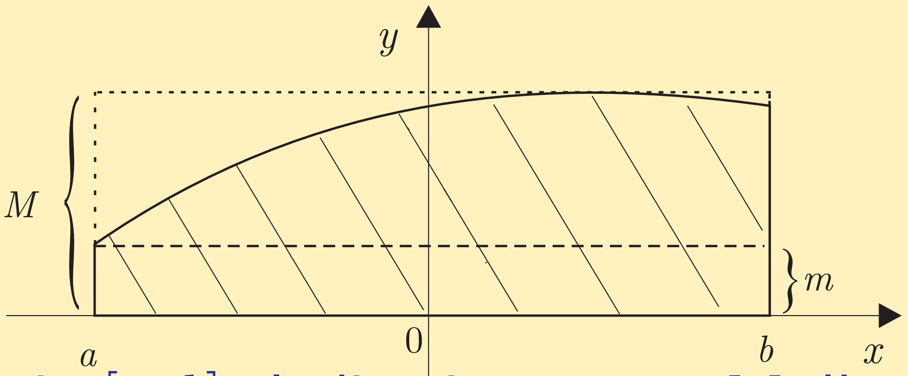
Teorema della media





Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$.

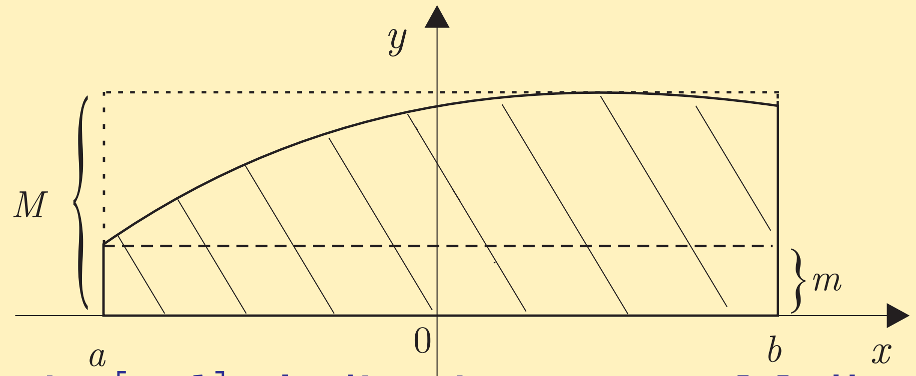
Teorema della media



Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$. Indicati con m e M, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a, b]$, sussiste:

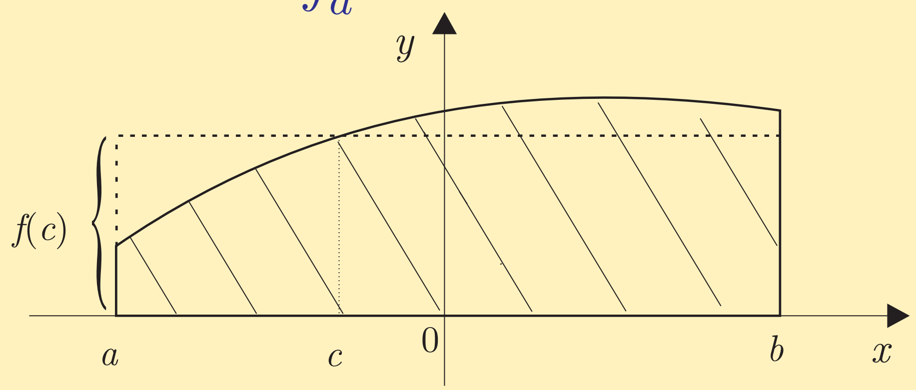
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

Teorema della media

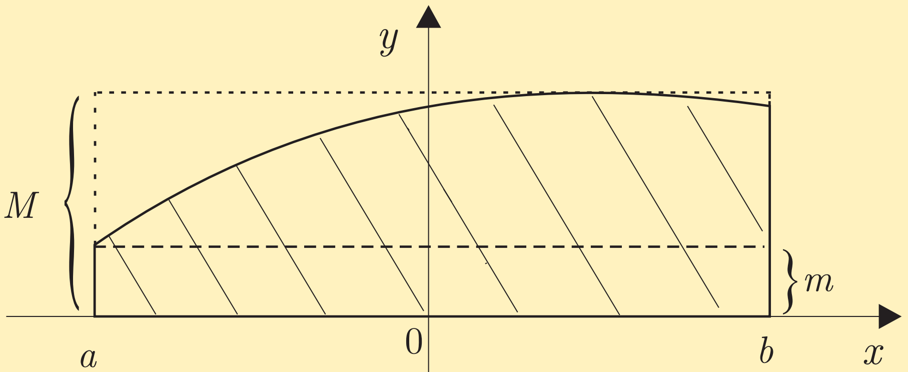


Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$. Indicati con m e M, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a, b]$, sussiste:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

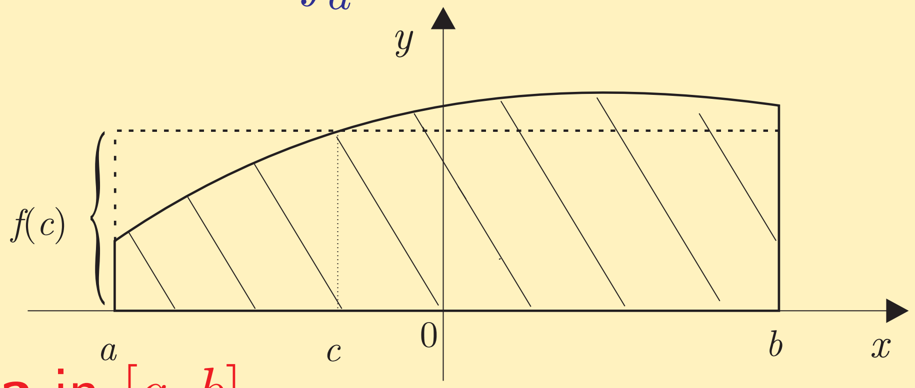


Teorema della media



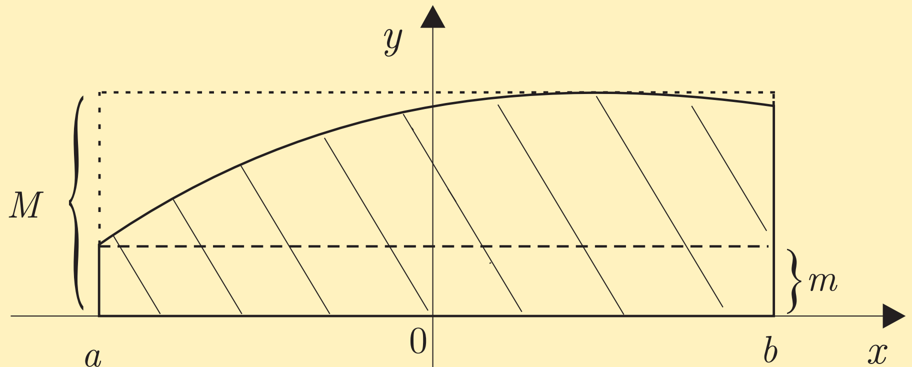
Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$. Indicati con m e M, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a, b]$, sussiste:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$



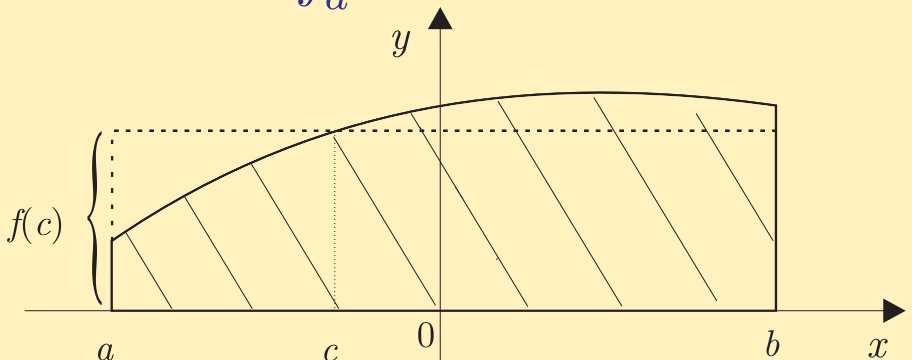
Se $f(x)$ è **continua** in $[a, b]$,

Teorema della media



Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$. Indicati con m e M, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a,b]$, sussiste:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$



Se $f(x)$ è **continua** in $[a,b]$, esiste $c \in [a,b]$, per cui:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[t, b], \ \forall\, t \in \ (-\infty, b[$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[t, b]$, $\forall\, t \in (-\infty, b[$, quindi:

$$\int_t^b f(x)\, dx = F(b) - F(t).$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[t, b]$, $\forall\, t \in (-\infty, b[$, quindi:

$$\int_t^b f(x)\, dx = F(b) - F(t).$$

Si pone:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx :=$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[t, b]$, $\forall\, t \in (-\infty, b[$, quindi:

$$\int_t^b f(x)\, dx = F(b) - F(t).$$

Si pone:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[t, b]$, $\forall\, t \in (-\infty, b[$, quindi:

$$\int_t^b f(x)\, dx = F(b) - F(t).$$

Si pone:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx = F(b) - \lim_{t \to -\infty} F(t)$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $(-\infty, b]$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[t, b]$, $\forall\, t \in (-\infty, b[$, quindi:

$$\int_t^b f(x)\, dx = F(b) - F(t).$$

Si pone:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx := \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx = F(b) - \lim_{t \to -\infty} F(t)$$

Se tale limite esiste finito $f(x)$ è integrabile in $(-\infty, b]$.

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

$$\int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - e^t.$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

$$\int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - e^t.$$

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - \lim_{t \to -\infty} e^t$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

$$\int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - e^t.$$

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - \lim_{t \to -\infty} e^t = 1.$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

$$\int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - e^t.$$

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} e^x \, dx = e^0 - \lim_{t \to -\infty} e^t = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = 1.$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, +\infty)$.

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, +\infty)$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[a, t], \ \forall\, t \in [a, +\infty)$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, +\infty)$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[a, t], \ \forall\, t \in [a, +\infty)$, quindi:

$$\int_a^t f(x)\, dx = F(t) - F(a).$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, +\infty)$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[a, t]$, $\forall\, t \in [a, +\infty)$, quindi:

$$\int_a^t f(x)\, dx = F(t) - F(a).$$

Si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx :=$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, +\infty)$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[a, t], \ \forall\, t \in [a, +\infty)$, quindi:

$$\int_a^t f(x)\, dx = F(t) - F(a).$$

Si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, +\infty)$.
$f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo $[a, t]$, $\forall\, t \in [a, +\infty)$, quindi:

$$\int_a^t f(x)\, dx = F(t) - F(a).$$

Si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} F(t) - F(a).$$

Se tale limite esiste finito $f(x)$ è integrabile in $[a, +\infty)$.

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

$$\int_1^{t} \frac{1}{x^2}\, dx =$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right)$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

$$\int_1^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1.$$

Esercizio

Calcolare, se esiste:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

$$\int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

$f(x)$ definita e continua in $]-\infty, +\infty[$.

$f(x)$ definita e continua in $]-\infty, +\infty[$.
Si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$f(x)$ definita e continua in $]-\infty, +\infty[$.
Si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx, \quad c \in \mathcal{R}$$

$f(x)$ definita e continua in $]-\infty, +\infty[$.
Si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx, \quad c \in \mathcal{R}$$

Si dimostra che l'integrale non dipende dalla scelta di c.

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t \to -\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Esercizio

Calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Scegliamo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{t \to -\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Una applicazione

Una compagnia di assicurazione vende polizze assicurative contro i danni.

Una applicazione

Una compagnia di assicurazione vende polizze assicurative contro i danni. Il totale dei risarcimenti che la compagnia dovrà pagare non è prevedibile con certezza.
Un valore è assunto con probabilità approssimata dalla funzione di Gauss:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

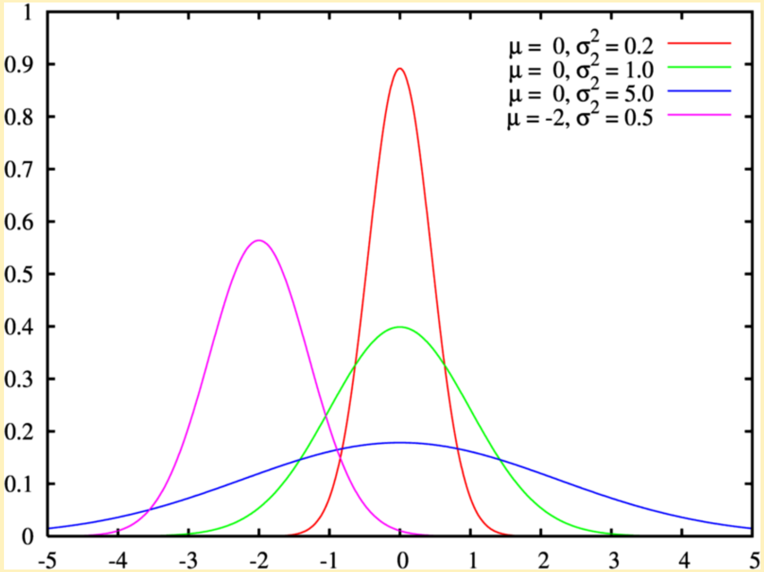
Una applicazione

Una compagnia di assicurazione vende polizze assicurative contro i danni. Il totale dei risarcimenti che la compagnia dovrà pagare non è prevedibile con certezza.
Un valore è assunto con probabilità approssimata dalla funzione di Gauss:

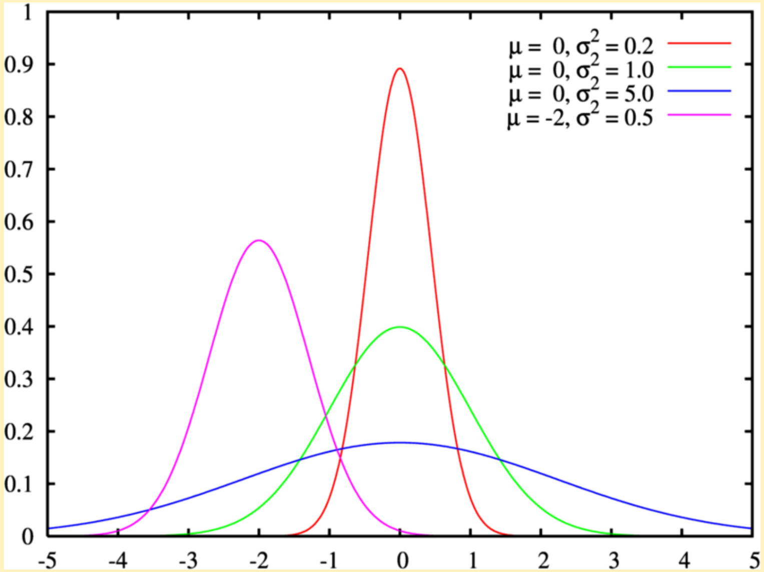
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

in cui i parametri m, σ vengono opportunamente stimati.

Una applicazione

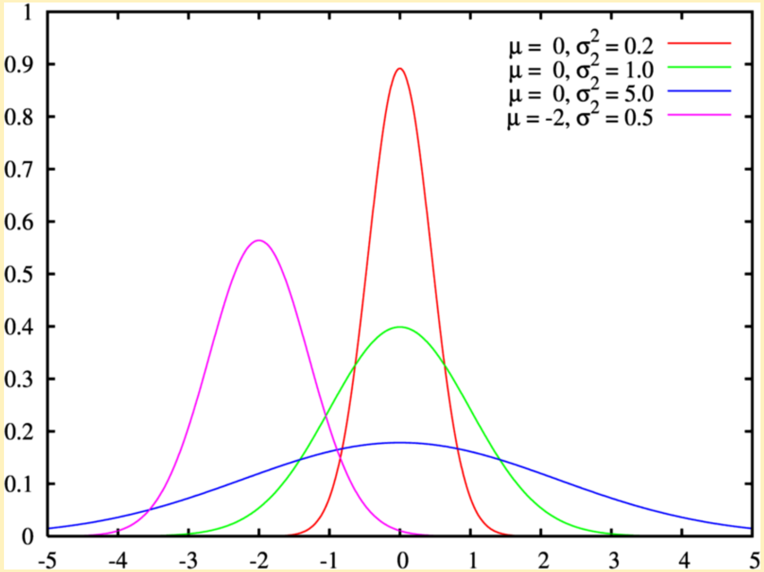


Una applicazione



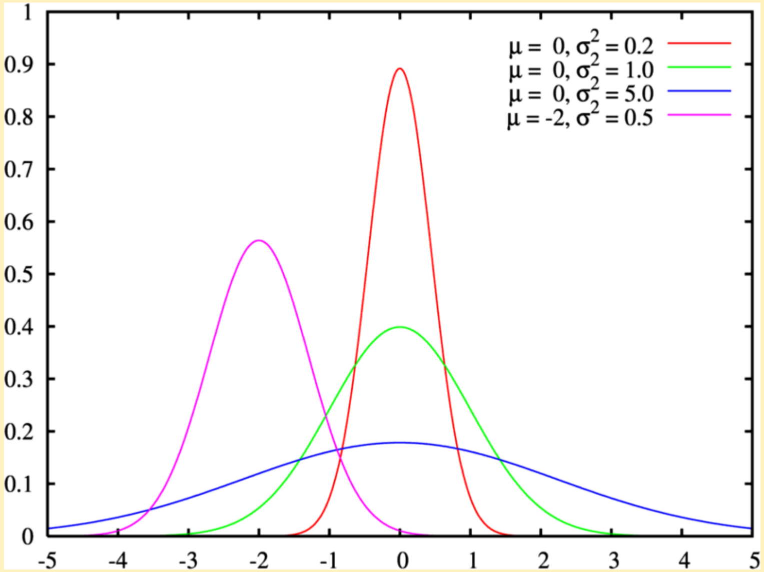
Sia **a** l'ammontare del fondo per coprire i risarcimenti.

Una applicazione



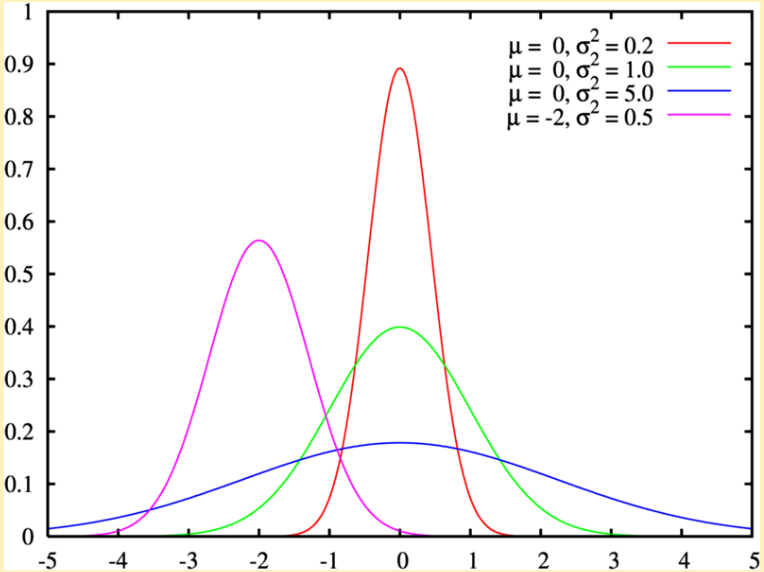
Sia **a** l'ammontare del fondo per coprire i risarcimenti. Se il totale risarcimenti è $>$ **a**

Una applicazione



Sia **a** l'ammontare del fondo per coprire i risarcimenti. Se il totale risarcimenti è $>$ **a** $\Rightarrow$ la compagnia è non solvibile.

Una applicazione



Sia **a** l'ammontare del fondo per coprire i risarcimenti. Se il totale risarcimenti è $>$ **a** $\Rightarrow$ la compagnia è non solvibile.
La probabilità di insufficienza del fondo è:

$$\int_a^{+\infty} \phi(x)\, dx$$