

ESERCIZI SUI LIMITI (1 parte): limiti determinati, continuità, asintoti

ESERCIZIO 1. Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

ESERCIZIO 2. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $x = 0$. In caso negativo, classificare il tipo di discontinuità.

$$\begin{array}{ll} 2.a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases}, & 2.b) \quad f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \\ 2.c) \quad |x|, & 2.d) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ x - x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

ESERCIZIO 3. Stabilire quali delle seguenti funzione sono infiniti e quali infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$ (è possibile che non siano né l'uno né l'altro)

$$\begin{array}{ccccc} 3^x, & 3^{\frac{1}{x}}, & \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \log(x^2 - 1), & \log\left(\frac{1}{3+x}\right), \\ \frac{1-x}{x^2+3x}, & \frac{x^3-x^5}{2-x^4}, & \sin\left(\frac{2}{3+x}\right), & \exp_3\left(\frac{x}{1+x}\right) = 3^{\frac{x}{1+x}}, & \exp_3\left(\frac{x}{1-x^2}\right). \end{array}$$

ESERCIZIO 4. Stabilire quali delle seguenti funzione sono infiniti e quali infinitesimi per $x \rightarrow 0$ (è possibile che non siano né l'uno né l'altro)

$$\begin{array}{ccccc} \cos x, & 3^{\frac{1}{x}}, & \sin(2x), & \log(1+x^2), & \log(x^2), \\ \log(\cos x), & \exp\left(\frac{1-x^5}{x^2}\right), & e^x - 1, & \frac{1+3x}{x}, & 1 - \exp_{10}\left(\frac{x}{1+x^2}\right). \end{array}$$

ESERCIZIO 5. Individuare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1-x}{4-x^2}, & \frac{1-x^3}{2+x}, & \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, & 2x + \sin x, & \frac{2x + \sin x}{1+x}, \\ \arctan \frac{x^2}{x-1}, & \log \frac{x}{x+1}, & \exp \frac{x}{x+1}, & \log \frac{x^2}{x+1}, & \exp(x^2 - 1). \end{array}$$

ESERCIZIO 6. Utilizzando l'algebra dei limiti (e le sue estensioni), i teoremi di confronto e il cambiamento di variabile nei limiti, calcolare:

- | | | | | | |
|------|---|--|------|---|-------------|
| 6.a) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$ | $[+\infty]$ | 6.b) | $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$ | $[0]$ |
| 6.c) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan x$ | $[+\infty]$ | 6.d) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$ | $[0]$ |
| 6.e) | $\lim_{x \rightarrow 1} \log\left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1}\right)$ | $[+\infty]$ | 6.f) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$ | $[0]$ |
| 6.g) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{3+x}{1+x^3}\right)$ | $[0]$ | 6.h) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)$ | $[e^3]$ |
| 6.i) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \cos \frac{1+x}{x}$ | $[+\infty]$ | 6.j) | $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x}$ | $[0]$ |
| 6.k) | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2}$ | $[\lim_{x \rightarrow 2^\pm} = \mp\infty]$ | 6.l) | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{(x+2)^2}$ | $[+\infty]$ |
| 6.m) | $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(e^x - \log x)$ | $[0]$ | 6.n) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ | $[0]$ |
| 6.o) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x}$ | $[-\infty]$ | 6.p) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 7}}{x^2 + 1}$ | $[0]$ |