Matematica Finanziaria

Lucidi del corso

Zelda Marino

a.a. 2023-2024

Table of Contents

Contatti

Dip. di Studi Aziendali e Quantitativi, DISAQ

IV piano, stanza 430
Tel. 0815474233
E-mail: zelda.marino@uniparthenope.it

Ricevimento studenti

Palazzo Pacanowsky, IV piano studio 430
martedí ore 10.30 - 11.30

Contattatemi per posta elettronica, NON sulla chat di TEAMS.

Valutazione

Esame

- prova scritta:
  - 9 domande a risposta multipla
  - 1 domanda aperta
  - 2 Esercizi
- prova orale

Prove intercorso

- 2 prove intercorso
- 10 domande a risposta multipla
- 2 Esercizi

- chi ha superato le prove intercorso $\longrightarrow$ solo prova orale
  - la prova verrá conservata fino al IV appello di febbraio.

Calendario lezioni

Settembre							
L	M	M	G	V	S	D	Tot Ore
				1	2	3	
4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	
18	19	20	21	22	23	24	
25	26	27	28	29	30		*4*

Ottobre							
L	M	M	G	V	S	D	Tot Ore
						1	
2	3	4	5	6	7	8	*10*
9	10	11	12	13	14	15	*16*
16	17	18	19	20	21	22	
23	24	25	26	27	28	29	*22*
30	31						

Novembre/Dicembre							
L	M	M	G	V	S	D	Tot Ore
		1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	12	*28*
13	14	15	16	17	18	19	*34*
20	21	22	23	24	25	26	*40*
27	28	29	30				*44*

Dicembre							
L	M	M	G	V	S	D	Tot Ore
				1	2	3	*46*
4	5	6	7	8	9	10	*48*
11	12	13	14	15	16	17	
18	19	20	21	22	23	24	
25	26	27	28	29	30	31	

#	Lezione	#	prove intercorso
#	Festa accademica	#	PI MATFIN

MERC	15.00	17.00	GIOV - VEN	8.30	10.30

Materiale didattico e Testo

https://elearning.uniparthenope.it/

Matematica Finanziaria - EA - a.a. 2023/2024

Testo consigliato

G. Castellani, F. De Felice, F. Moriconi, Manuale di Finanza, I. Tassi d'interesse, Mutui e Obbligazioni, editore Il Mulino

Table of Contents

Che cosa é la finanza?

É giusta o sbagliata?

Che cosa é la finanza?

É giusta o sbagliata?

TECNOLOGIA

La finanza é una **tecnologia** ovvero un modo di fare le cose. Cosí come altre tecnologie, si é sviluppata attraverso le innovazione che ne hanno migliorato l'efficienza. E pertanto non ha nulla di intrinsecamente giusto o sbagliato.

Capacitá di trasportare il valore economico avanti e indietro lungo la linea del tempo.

Elementi chiave

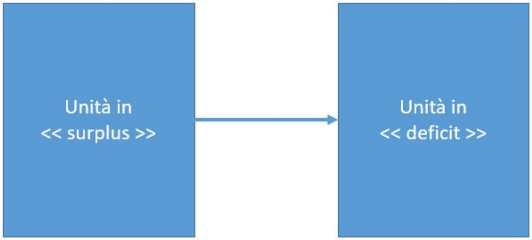
La finanza ha 4 elementi chiave:

1. ridistribuisce il valore economico nel tempo;
2. ridistribuisce il rischio;
3. ridistribuisce il capitale;
4. accresce l'accesso a tali ridistribuzioni, e la loro complessitá

Alfabetizzazione finanziaria

http://www.quellocheconta.gov.it/it/abc-quello-che-conta/quiz/

Il sistema finanziario

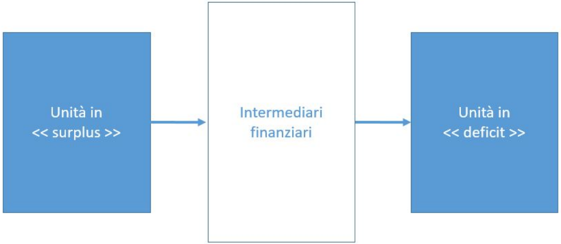


Il sistema finanziario

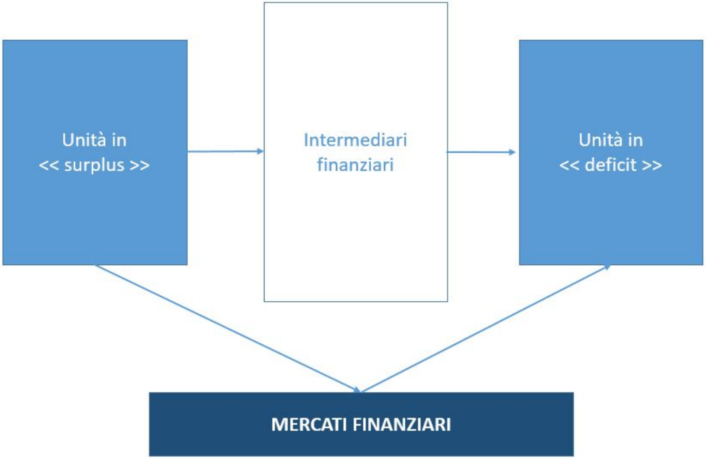
É l'insieme delle istituzioni, dei luoghi e dei mezzi che consente e tutela lo scambio.

Il sistema finanziario svolge una funzione di allocazione di risorse ed una funzione monetaria.

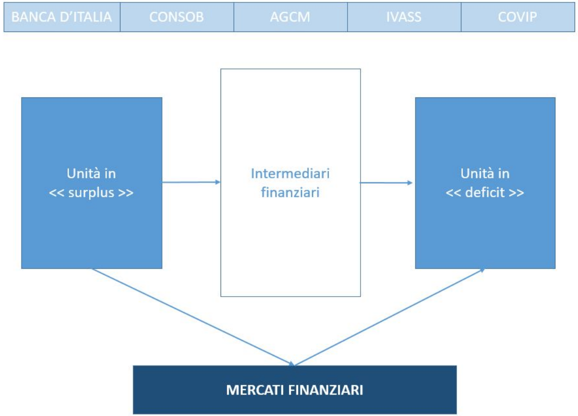
Il sistema finanziario



Il sistema finanziario



Il sistema finanziario



Antitrust o AGCM - Autoritá Garante della Concorrenza e del Mercato
ISVAP ora IVASS
COVIP - Commissione Vigilanza fondi Pensione

Le attivitá finanziarie

- Le famiglie hanno depositi verso banche ed altri intermediari, possiedono titoli azionari ed obbligazionari, quote di fondi comuni $\Longleftrightarrow$ trasferiscono risorse che possono essere utilizzate per il finanziamento dell'attivitá produttiva e degli investimenti;
- le imprese ed il settore pubblico ricevono finanziamenti attraverso gli intermediari (prestiti) ed il mercato (azioni ed obbligazioni);
- gli strumenti per il trasferimento di fondi sono definiti **attivitá finanziarie**.

Le attivitá finanziarie

Le attivitá finanziarie rappresentano un rapporto di debito/credito o di partecipazione (azioni) tra le parti in causa.

Dal punto di vista economico si definisce attivitá finanziaria un rapporto contrattuale nel quale entrambe le prestazioni delle parti in causa sono denominate in moneta e scadono in tempi diversi.

Le attivitá finanziarie

Elementi fondalmentali:

- natura del contratto sottostante (credito, partecipazione, assicurazione, gestione del rischio);
- tempo $=$ distanza temporale che separa le prestazioni delle parti;
- rischio (rispetto a cosa??);
- interesse $=$ remunerazione per chi cede potere d'acquisto;
- informazione. Le decisioni degli operatori si basano su informazioni $\Longleftrightarrow$ informazione come input; gran parte delle attivitá finanziarie sono quotate su mercati aventi lo scopo di definire un prezzo $\Longleftrightarrow$ informazione come output;
- natura monetaria.

I circuiti di intermediazione

Il processo di intermediazione si articola su:

- un circuito indiretto che passa attraverso gli intermediari;
- un circuito diretto che passa attraverso i mercati:
  - investimenti diretti (azioni, obbligazioni,...);
  - investimenti che passano attraverso investitori istituzionali; si differenzia dal circuito diretto poiché le decisioni di investimento sono assunte da operatori specializzati all'interno di un mandato di gestione.

Il mercato finanziario

Il mercato dei capitali é un insieme di mezzi e di regole per l'esecuzione efficiente degli scambi.

Le sue caratteristiche funzionali rispetto al sistema economico si cominciano a definire nei primi del novecento; cambiamenti strutturali dovuti al progresso tecnologico e istituzionali sono degli ultimi dieci anni.

I luoghi del mercato finanziario sono istituzioni moderne, mercati perfezionati specializzati per tipi di contratto e di operatore.

La struttura del mercato

I mercati dei capitali possono essere regolamentati o ”ufficiosi”, (”over-the-counter” = ”sopra il bancone”).
Il mercato organizzato deve garantire:

- listing = criteri di ammissione alla quotazione e quotazione dei titoli;
- raccolta degli ordini di acquisto e di vendita;
- price discovery = formazione del prezzo sulla base degli ordini;
- informazioni sugli ordini durante e dopo la conclusione degli scambi;
- esecuzione degli ordini:
  - clearing (compensazione) = raccolta delle posizioni di domanda-offerta di tutti i partecipanti;
  - settlement (liquidazione) = identificazione delle quotazioni;
- market surveillance = realizzazione efficiente dei processi e delle procedure.

La struttura del mercato

La capacitá di esprimere il prezzo in forma continuativa e pubblica definisce il ruolo fondamentale del mercato nel sistema economico: essere assoggettato a una quotazione rende il titolo **liquido**, ossia immediatamente convertibile in danaro.

Il grado di liquiditá dei titoli dipende dalla liquiditá del mercato. Un mercato é **liquido** se ha:

- ampiezza (breadth) del volume degli ordini trattati;
- spessore (depth) = esistenza di ordini nell'intorno del prezzo corrente;
- elasticitá (resiliency) = affluenza rapida di nuovi ordini in risposta a variazioni di prezzo dovute a temporanei squilibri tra domanda e offerta.

La struttura del mercato

Il mercato **primario** é il ”luogo” ove vengono collocati i titoli di nuova emissione; vi operano gli emittenti che raccolgono fondi e si indebitano e gli investitori che acquistano titoli.
Sul mercato primario viene fissato il prezzo di emissione.

Il mercato **secondario** é il ”luogo” ove vengono scambiati i titoli già emessi.
Sul mercato secondario viene fissato il prezzo di scambio. Il mercato secondario é quello che rende liquido l’investimento in titoli.

Contratti finanziari

Lo scambio tra i vari blocchi avviene mediante *contratti finanziari*, che vanno tradotti in formule.

Problemi da affrontare:

- formalizzare i contratti;
- valutare i contratti: calcolare *valori* e *rischiositá* (rispetto a cosa?).

É necessario saper leggere i dati del mercato e disporre di *modelli matematici* descrittivi *adeguati* da utilizzare correttamente.

Scambio di importi

Ciascun importo è caratterizzato dalla:

- valuta di denominazione;
- data di esigibilità.

ESEMPIO

- "100 euro esigibili il 7 marzo 2024";
- "50 euro esigibili tra 30 giorni";
- "l'importo in euro esigibile tra 360 giorni verrà calcolato moltiplicando 100 per il tasso di interesse (semestrale) del Bot semestrale che verrà emesso tra 180 giorni".

Tempo, prezzo, prezzo del tempo

In un contratto le parti scambiano tra loro somme di danaro in risposta a esigenze di consumo: investono (*creditore*) o si indebitano (*debitore*), al fine di differire o anticipare il consumo.

Le *obbligazioni* e i *mutui* sono forme contrattuali diffusamente utilizzate per l'operazione di investimento/indebitamento.

Lo spostamento nel tempo degli importi è un'operazione che avrà un *prezzo*. Il prezzo assume la forma di un *interesse* e il significato basilare di "prezzo del tempo" ("price of time").

Convenzioni per misurare il tempo

L'ampiezza degli intervalli temporali può essere misurata:

- in giorni effettivi di calendario ("effective", eff o "actual", act);
- considerando l'anno composto sempre da 365 giorni, senza effetto bisestile (convenzione: 365);
- con l'anno composto da 360 giorni, e i mesi tutti composti da 30 giorni (convenzione commerciale 360).

Le convenzioni contrattuali in uso sono rappresentate in forma di "frazione".

ESEMPIO:

$$\frac{360}{360} \quad \frac{EFF}{360} \quad \frac{EFF}{EFF}$$

dove il "numeratore" fornisce la convenzione di calcolo dei giorni tra scadenze, e il "denominatore" è il numero di giorni dell'intervallo unitario.

Table of Contents

Operazioni con scadenzario fissato

Contratto finanziario: prestito di una somma monetaria S al tempo $t = 0$, da restituirsi integralmente dopo un anno insieme con una somma di importo I prefissato.

Dal punto di vista della parte che riceve la somma S si tratta di un'*operazione di indebitamento*:

$$\{S, -(S+I)\}/\{0, 1\}.$$

Dal punto di vista della controparte si effettua una *operazione di investimento*:

$$\{-S, S+I\}/\{0, 1\}.$$

Il contratto, piú in generale, descrive una operazione di scambio.
L'operazione è con decorrenza immediata, rispetto alla stipula, e perciò si dice **a pronti** (o **spot**).

Le due parti convengono su una legge di equivalenza intertemporale per la quale

S euro in $t = 0$ **equivalgono** a $S + I$ euro in $t = 1$.

- $S + I$ é il valore in $t = 1$, $W(1)$, di S euro disponibili in $t = 0$
- S è il valore in $t = 0$, $W(0)$, di $S + I$ euro disponibili in $t = 1$.

- S rappresenta il *capitale*;
- I è l'*interesse*;
- $i = I/S$ è il *tasso di interesse* dell'operazione.

Interesse (o tasso di interesse) $=$ compenso (remunerazione, "premio") concesso alla parte creditrice per il differimento della restituzione del debito S ("prezzo del tempo" o "price of deferred consumption"o "return on investment").

Si possono individuare quattro caratteristiche essenziali di questa semplice operazione finanziaria:

1. viene effettuato uno scambio tra due date diverse;
2. viene fissata una unità di misura del valore e tutte le quantità scambiate sono espresse secondo questa unità;
3. dato che l'unità prescelta è monetaria, si tratta di uno scambio tra quantità nominali;
4. tutte le date e gli importi sono noti in $t = 0$ (cioè alla data di stipula).

Postulato del rendimento del danaro

I tassi di interesse caratteristici di operazioni finanziarie ove gli importi sono espressi in moneta sono detti tassi di interesse *nominali*. È naturale richiedere che i tassi nominali siano positivi.

La positività dei tassi nominali si può far discendere dalla qualità "naturale" degli agenti economici di essere *massimizzatori di profitto*.

Nell'impostazione assiomatica la positività dei tassi di interesse è garantita dal

Postulato del rendimento del danaro

"il costo dell'operazione consistente nel differire la scadenza di un debito è positivo" (formulazione originaria proposta da Bruno de Finetti).

Esempio dal mercato

Le emissioni di BOT del 15/172004 sono rappresentate da (importi in euro, tempi in giorni):

$$\{-99.51, 100\}/\{0, 91\}, \; per\ il\ BOT\ a\ 3\ mesi$$

$$\{-97.95, 100\}/\{0, 365\}, \; per\ il\ BOT\ a\ 1\ anno$$

Per il BOT a 6 mesi emesso il $30/1/2004$ si ha:

$$\{-99.00, 100\}/\{0, 182\}$$

per il CTZ emesso il $31/3/2005$:

$$\{-95.76, 100\}/\{0, 758\}$$

“Operazione finanziaria a scadenzario fisso”

Una **operazione finanziaria a scadenzario fisso** é un arbitrario insieme di importi monetari $x_1, x_2, \ldots, x_m$, caratterizzati dalle rispettive date di esigibilità $t_1, t_2, \ldots, t_m$, con la convenzione $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$.

Operazione certa alla data di valutazione t quando tutti gli importi e le date di esigibilità sono note in t.

Vettore dei pagamenti:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} ,$$

vettore delle scadenze:

$$\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\} ,$$

L'operazione finanziaria è costituita dal flusso di importi $\mathbf{x}$ sullo scadenzario $\mathbf{t}$, $\mathbf{x}/\mathbf{t}$.

Operazioni coincidenti

Sia $\mathbf{x}/\mathbf{t}$, un'operazione finanziaria; si consideri l'operazione ottenuta estendendo lo scadenzario $\mathbf{t}$ e attribuendo importi di entità nulla alle date aggiuntive; sarà naturale considerare formalmente coincidenti queste due operazioni.

Assegnate due operazioni finanziarie $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$ e $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$, è sempre possibile ridefinirle su uno stesso scadenzario $\mathbf{t}$, scegliendo

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}' \cup \mathbf{t}''$$

e completando i vettori $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ con pagamenti nulli sullo scadenzario unione.

Esempio

Siano date $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$ e $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$ con:

$$\mathbf{x}' = \{-10, 1, 10, -2\} \;\; \mathbf{t}' = \{0, 0.5, 1, 1.5\}$$
$$\mathbf{x}'' = \{5, 5, 5\} \;\; \mathbf{t}'' = \{1, 2, 3\}$$

Lo scadenzario unione è:

$$\mathbf{t}' \cup \mathbf{t}'' = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

L'operazione:

$$\{-10, 1, 10, -2, 0, 0\} \,/\, \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

è uguale alla $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$; l'operazione:

$$\{0, 0, 5, 0, 5, 5\} \,/\, \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

coincide con la $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$.

Somma di operazioni finanziarie.

$$\mathbf{x}' = \{-10, 1, 10, -2\}, \mathbf{t}' = \{0, 0.5, 1, 1.5\}$$
$$\mathbf{x}'' = \{5, 5, 5\}, \qquad \mathbf{t}'' = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathbf{t}' \cup \mathbf{t}'' = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

L'operazione finanziaria somma di $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$ e $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$ è:

$$\{-10, 1, 15, -2, 5, 5\} / \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}.$$

Somma di operazioni finanziarie.

$$\mathbf{x}' = \{-10, 1, 10, -2\}, \mathbf{t}' = \{0, 0.5, 1, 1.5\}$$
$$\mathbf{x}'' = \{5, 5, 5\}, \qquad \mathbf{t}'' = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathbf{t}' \cup \mathbf{t}'' = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

L'operazione finanziaria somma di $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$ e $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$ è:

$$\{-10, 1, 15, -2, 5, 5\} / \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}.$$

Date due operazioni finanziarie $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$ e $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$, si definisce **operazione finanziaria somma** l'operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ ottenuta ridefinendo le due operazioni componenti sullo scadenzario unione $\mathbf{t}$ e sommando algebricamente i pagamenti esigibili alle stesse date.

Scomposizione di operazioni finanziarie.

Si consideri un generico flusso di importi:

$$\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$$

sullo scadenzario $\mathbf{t}$.
Si possono distinguere gli importi z_k aventi segno positivo separatamente da quelli aventi segno negativo $\iff$ l'operazione $\mathbf{z}/\mathbf{t}$ é scomposta nella somma di un'operazione *attiva* $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ (crediti netti) e in una *passiva* $\mathbf{y}/\mathbf{t}$ (debiti netti).
Si dice anche che $\mathbf{x}$ è il flusso degli *asset* e che $\mathbf{y}$ è il flusso delle *liability*; il vettore complessivo $\mathbf{z}$ è un vettore di *asset-liability*.

Esempio

L'operazione finanziaria:

$$\mathbf{z}/\mathbf{t} = \{100, -110, 1100, -1210\}/\{1, 2, 3, 4\}$$

può essere scomposta nell'operazione attiva:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{100, 0, 1100, 0\}/\{1, 2, 3, 4\}$$

e nell'operazione passiva:

$$\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{0, -110, 0, -1210\}/\{1, 2, 3, 4\}\,.$$

Il flusso di asset-liability $\mathbf{z}$ è dato, per costruzione, dalla somma del flusso $\mathbf{x}$ degli asset e del flusso $\mathbf{y}$ delle liability.

Table of Contents

Definizioni fondamentali basate sulla funzione valore

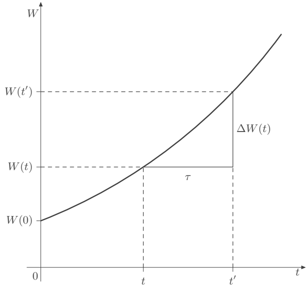
- Fattori, tassi e intensità;
- intensità istantanea;
- la funzione esponenziale come legge di equivalenza finanziaria;
- tassi e intensità equivalenti secondo la legge esponenziale.

Fattori, tassi e intensità

- $W(t)$ funzione valore a valori reali positivi, definita per $t \geq 0$;
- $W(t)$ sia una funzione monotona crescente del tempo.

Siano t e $t' = t + \tau$, $\tau > 0$, due arbitrari istanti di tempo. Si definisce *interesse* nel periodo da t a $t + \tau$ l'incremento:

$$\Delta W(t) = W(t+\tau) - W(t) \,,$$



fattore di capitalizzazione (o *fattore montante*)

$$m(t, t+\tau) = \frac{W(t+\tau)}{W(t)} \, ,$$

- m è il fattore per cui va moltiplicato $W(t)$ per ottenere il valore a fine periodo, detto anche *valore capitalizzato* o *montante* $W(t+\tau) = W(t) \cdot m(t, t+\tau)$;
- m è una grandezza adimensionale in quanto rapporto tra due quantità monetarie (euro);
- per l'ipotesi di crescenza è sempre $m(t, t+\tau) > 1$.

fattore di sconto (o fattore di attualizzazione)

è il reciproco del fattore di capitalizzazione:

$$v(t, t+\tau) = \frac{W(t)}{W(t+\tau)} \,.$$

- moltiplicando $W(t+\tau)$ per il fattore di sconto si ottiene il valore di inizio periodo, o *valore scontato* $W(t) = W(t+\tau) \cdot v(t, t+\tau)$;
- se t é l'istante di tempo corrente si usa anche dire che $W(t)$ è il *valore attuale*, in t, di $W(t+\tau)$;
- v è una grandezza adimensionale e $v(t, t+\tau) < 1$.

tasso di interesse, o tasso di rendimento

$$j(t, t+\tau) = \frac{\Delta W(t)}{W(t)}\,;$$

$$j(t, t+\tau) = \frac{W(t+\tau) - W(t)}{W(t)} = m(t, t+\tau) - 1 = \frac{1}{v(t, t+\tau)} - 1\,.$$

tasso di sconto, o tasso di interesse anticipato

$$d(t, t+\tau) = \frac{\Delta W(t)}{W(t+\tau)}$$

$$d(t, t+\tau) = \frac{W(t+\tau) - W(t)}{W(t+\tau)} = 1 - v(t, t+\tau)$$

$$d(t, t+\tau) = \frac{\Delta W(t)}{W(t+\tau)} = \frac{\Delta W(t)}{W(t)} \frac{W(t)}{W(t+\tau)} = j(t, t+\tau)\, v(t, t+\tau)$$

Il tasso di interesse e il tasso di sconto rappresentano incrementi percentuali, sono grandezze adimensionali e sono sempre positivi.

Se si considera il rapporto tra un tasso e la lunghezza del periodo di riferimento, si ottiene un'*intensità*, che è una grandezza positiva e ha per dimensione il reciproco di un tempo (a esempio anni^{-1}).

intensità di interesse

$$\gamma(t, t+\tau) = \frac{\Delta W(t)}{\tau\, W(t)} = \frac{j(t, t+\tau)}{\tau}\,.$$

intensità di sconto

$$\frac{\Delta W(t)}{\tau\, W(t+\tau)}\,.$$

Esempio

$W(1) = 97.5$ euro e $W(1.5) = 100$ euro

- interesse in $[1, 1.5]$ $\Delta W(1) = 100 - 97.5 = 2.5$ euro;
- $W(1.5) = 100$ euro è il montante, dopo 6 mesi, di 97.5 euro;
- $W(1) = 97.5$ euro è il valore scontato di 100 euro.
- $v(1, 1.5) = 0.975$;
- $m(1, 1.5) = 100/97.5 = 1.02564$;
- $j(1, 1.5) = 2.5/97.5 = 0.02564\ (2.56\%)$;
- $d(1, 1.5) = 2.5/100 = 0.025\ (2.5\%)$;
- $\gamma(1, 1.5) = 2.5/(0.5 \times 97.5) = j(1, 1.5)/0.5 = 0.05128 \ \ \text{anni}^{-1}$;
- intensitá di sconto $2.5/(0.5 \times 100) = 0.05 \ \ \text{anni}^{-1}$.

Intensità istantanea

Si supponga che $W(t)$ sia dotata di derivata prima $W'(t)$.

Quando $\tau \to 0$ i tassi tendono ad annullarsi.

Per l'intensità di interesse si ha invece:

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\Delta W(t)}{\tau\, W(t)} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\Delta W(t)}{\tau} \frac{1}{W(t)} = \frac{W'(t)}{W(t)} \,.$$

intensità istantanea di interesse o _forza di interesse_

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\Delta W(t)}{\tau\, W(t)} = \delta(t) = \frac{d}{dt} \log W(t) \,,$$

Rappresenta la "sensibilità" ("sensitivity") alle variazioni temporali della funzione valore, espressa in termini di variazione percentuale per unità di tempo. È la *semielasticità* di W rispetto al tempo.

Riepilogo

- **Fattore montante**

$$m(t, t+\tau) = \frac{W(t+\tau)}{W(t)}$$

- **Fattore di sconto**

$$v(t, t+\tau) = \frac{W(t)}{W(t+\tau)}$$

- **Tasso di interesse**

$$j(t, t+\tau) = \frac{\Delta W(t)}{W(t)}$$

- **Tasso di sconto**

$$d(t, t+\tau) = \frac{\Delta W(t)}{W(t+\tau)}$$

Riempi la tabella

	(m)	(v)	(j)	(d)
$m =$	m	$\frac{1}{v}$		
$v =$		v		
$j =$			j	
$d =$				i

Esercizio

C'é la possibilitá di contrarre un prestito di ammontare C, da investire in un'operazione che rende il 18%; ed é data l'alternativa tra pagare gli interessi posticipatamente, al tasso del 14%, o anticipatamente, al tasso del 12%. Quale scelta é piú vantaggiosa?

Esercizio

C'é la possibilitá di contrarre un prestito di ammontare C, da investire in un'operazione che rende il 18%; ed é data l'alternativa tra pagare gli interessi posticipatamente, al tasso del 14%, o anticipatamente, al tasso del 12%. Quale scelta é piú vantaggiosa?

Se l'interesse é pagato posticipatamente, il ricavo netto dell'operazione é:

$$1.18C - (C + 0.14C) = 0.04C$$

(differenza tra montante dell'investimento e restituzione del capitale e degli interessi)

Esercizio

C'é la possibilitá di contrarre un prestito di ammontare C, da investire in un'operazione che rende il 18%; ed é data l'alternativa tra pagare gli interessi posticipatamente, al tasso del 14%, o anticipatamente, al tasso del 12%. Quale scelta é piú vantaggiosa?

Se l'interesse é pagato posticipatamente, il ricavo netto dell'operazione é:

$$1.18C - (C + 0.14C) = 0.04C$$

(differenza tra montante dell'investimento e restituzione del capitale e degli interessi)

Se l'interesse é pagato anticipatamente, il ricavo netto dell'operazione é:

$$C(1 - 0.12) \times 1.18 - C = C(1.18 - 0.1416 - 1) = 0.0384C$$

(il capitale investito al 18% é solo $C - 0.12C$)

Table of Contents

Le leggi finanziarie

- la legge degli interessi semplici;
- la legge degli interessi composti;
- la legge esponenziale.

La legge degli interessi semplici

Si consideri un contratto ottenuto componendo m operazioni elementari: una operazione a pronti e $m - 1$ operazioni a termine, tutte caratterizzate dallo stesso interesse I.

Ad esempio si supponga che il debito S, contratto in $t = 0$, possa venir rimborsato dopo uno, oppure dopo due, $\dots$, oppure dopo m anni, su decisione della parte debitrice, con un pagamento di interesse calcolato aggiungendo per ogni anno una maggiorazione costante $I = iS$, cioè uguale a una percentuale i prefissata del debito iniziale.

La legge di equivalenza intertemporale stabilita in $t = 0$ dal contratto è descritta da una funzione valore $W(k)$ definita per $k = 0, 1, \ldots, m$ dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
W(0) &= S\,, \\
W(1) &= S + i\,S = S\,(1+i)\,, \\
W(2) &= S + 2\,i\,S = S\,(1+2i)\,, \\
&\vdots \\
W(k) &= S + k\,i\,S = S\,(1+k\,i)\,, \\
&\vdots \\
W(m) &= S + m\,i\,S = S\,(1+m\,i)\,.
\end{aligned}$$

progressione aritmetica di ragione $I = iS$

$$W(k) = W(k-1) + i\,S,$$

con $k = 1, 2, \ldots, m$ e $W(0) = S$.

Dopo k anni, l'ammontare del passivo, ovvero il valore dell'investimento, è dato da:

$$W(k) = S\,(1 + k\,i),$$

per $k = 1, 2, \ldots, m$.

legge (o **regime**) **degli interessi semplici**

Il tasso di interesse i_k, relativo alla k–esima operazione elementare, è dato da

$$i_k = \frac{I}{W(k-1)} = \frac{I}{S + (k-1)\,I},$$

per $k = 1, 2, \ldots, m$.

i_1 *tasso a pronti*;

i_k per $k > 1$ *tassi a termine*

Esempio

Sia $S = 100$ euro, $n = 4$ e $i = 0.05$ (cioè $I = 5$ euro); si ha:

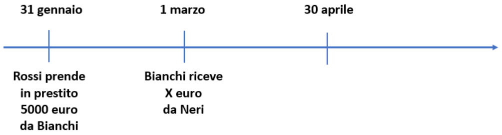
$$
\begin{aligned}
W(0) &= 100\,,\\
W(1) &= 100 + 0.05 \times 100 = 100 \times 1.05 = 105\,,\\
W(2) &= 100 + 2 \times 0.05 \times 100 = 100 \times 1.10 = 110\,,\\
W(3) &= 100 + 3 \times 0.05 \times 100 = 100 \times 1.15 = 115\,,\\
W(4) &= 100 + 4 \times 0.05 \times 100 = 100 \times 1.20 = 120\,.
\end{aligned}
$$

Per il tasso a pronti si ha $i_1 = 5/100 = 0.05$; i tassi a termine risultano:

$$
\begin{aligned}
i_2 &= 5/105 = 0.04762\,,\\
i_3 &= 5/110 = 0.04545\,,\\
i_4 &= 5/115 = 0.04348\,.
\end{aligned}
$$

Esempio

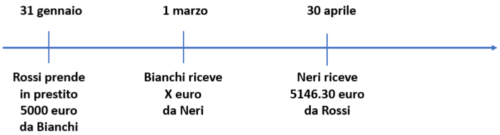
Il 31 gennaio il sig. Rossi prende in prestito 5000 euro dal sig. Bianchi e firma una cambiale con benificiario Bianchi. Il contratto stabilisce che il prestito sará restituito il 30 aprile dello stesso anno, con un interesse calcolato al tasso annuo semplice del 12%. Il 1^o marzo Bianchi rivende il contratto al sig. Neri che paga a Bianchi un dato importo in cambio del diritto di riceve il pagamento da Rossi il 30 aprile. La somma che Neri paga a Bianchi é tale che il tasso di rendimento per Neri equivale a un tasso annuale semplice del 15%.



- determiniamo l'importo che Rossi deve pagare alla scadenza del 30 aprile
  durata $28 + 31 + 30 = 89$

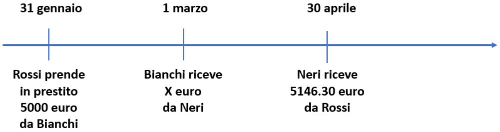
$$5000\left(1 + 0.12\frac{89}{365}\right) = 5146.30$$

Esempio (cont.)



- determiniamo l’importo che Neri paga a Bianchi e il tasso di rendimento realizzato da Bianchi, calcolato su base annuale

Esempio (cont.)

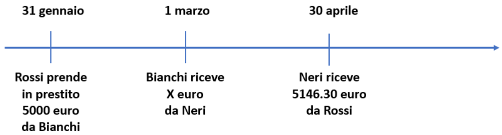


- determiniamo l'importo che Neri paga a Bianchi e il tasso di rendimento realizzato da Bianchi, calcolato su base annuale

$t_1 = \frac{29}{365}$ $(31/1 \to 1/3)$ i_1 tasso annuale di rendimento conseguito da Bianchi (t_1)

$t_2 = \frac{60}{365}$ $(1/3 \to 30/4)$ i_2 tasso annuale di rendimento ottenuto da Neri (t_2)

Esempio (cont.)



- determiniamo l'importo che Neri paga a Bianchi e il tasso di rendimento realizzato da Bianchi, calcolato su base annuale

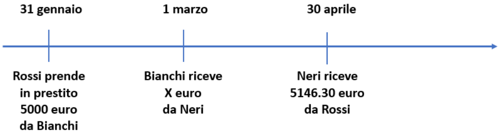
$t_1 = \frac{29}{365}$ $(31/1 \rightarrow 1/3)$ i_1 tasso annuale di rendimento conseguito da Bianchi (t_1)

$t_2 = \frac{60}{365}$ $(1/3 \rightarrow 30/4)$ i_2 tasso annuale di rendimento ottenuto da Neri (t_2)

per Neri

$$X\left(1 + i_2 t_2\right) = 5146.30 \Rightarrow X = \frac{5146.30}{1 + i_2 t_2} = \frac{5146.30}{1 + 0.15\frac{60}{365}} = 5022.46$$

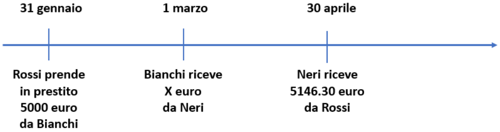
Esempio (cont.)



$t_1 = \frac{29}{365}$ $(31/1 \to 1/3)$ i_1 tasso annuale di rendimento conseguito da Bianchi (t_1)

$t_2 = \frac{60}{365}$ $(1/3 \to 30/4)$ i_2 tasso annuale di rendimento ottenuto da Neri (t_2)

Esempio (cont.)



$t_1 = \frac{29}{365}$ $(31/1 \rightarrow 1/3)$ i_1 tasso annuale di rendimento conseguito da Bianchi (t_1)

$t_2 = \frac{60}{365}$ $(1/3 \rightarrow 30/4)$ i_2 tasso annuale di rendimento ottenuto da Neri (t_2)

per Bianchi

$$5022.46 = 5000\,(1 + i_1 t_1) = 5000\left(1 + i_1 \frac{29}{365}\right)$$

risolvendo rispetto a i_1 abbiamo:

$$i_1 = \left(\frac{5022.46}{5000} - 1\right)\frac{365}{29} = 0.056537 = 5.6537\%$$

Esempio (cont.)

- supponiamo, in alternativa, che Neri paghi a Bianchi un importo tale che il rendimento per Neri sia del 12% annuale. Calcoliamo l'importo corrisposto da Neri,

$$5146.30 = X\left(1 + i_2 t_2\right)$$

$$X = \frac{5146.30}{1 + i_2 t_2} = \frac{5146.30}{1 + 0.12\frac{60}{365}} = 5046.75$$

rendimento 15% $\quad \rightarrow \quad X = 5022.46$

rendimento 12% $\quad \rightarrow \quad X = 5046.75$

La legge degli interessi composti

Si supponga che l'interesse sia calcolato aggiungendo per ciascun anno una maggiorazione uguale a una percentuale costante del *debito accumulato* all'inizio dell'anno precedente.

In questo caso si ha:

$$
\begin{aligned}
W(0) &= S\,,\\
W(1) &= S + i\,S = S\,(1+i)\,,\\
W(2) &= S\,(1+i) + i\,S\,(1+i) = S\,(1+i)^2\,,\\
&\vdots\\
W(k) &= S\,(1+i)^{k-1} + i\,S\,(1+i)^{k-1} = S\,(1+i)^k\,,\\
&\vdots\\
W(m) &= S\,(1+i)^{m-1} + i\,S\,(1+i)^{m-1} = S\,(1+i)^m\,.
\end{aligned}
$$

Poiché risulta:

$$\frac{W(k)}{W(k-1)} = 1 + i,$$

per $k = 1, 2, \ldots, m$ si ha una:

progressione geometrica di ragione $i + 1$

essendo:

$$\frac{W(k)}{W(k-1)} = 1 + i,$$

per $k = 1, 2, \ldots, m$.

Dopo k anni, l'ammontare del passivo, ovvero il valore dell'investimento, è dato da:

$$W(k) = S\,(1+i)^k,$$

per $k = 1, 2, \ldots, m\,.$

legge (o **regime**) **degli interessi composti**

La maggiorazione per interesse $I(k) = i\,W(k-1)$ relativa al differimento dell'operazione per il k–esimo anno viene sommata al valore $W(k-1)$ all'inizio dell'anno e contribuisce alla formazione dell'interesse qualora l'operazione venga prolungata per l'anno successivo, diversamente da quanto accade nel regime di interessi semplici

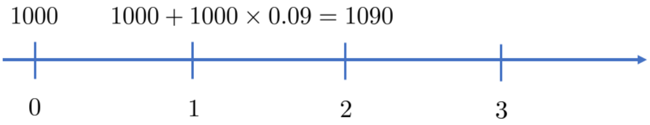
Esempio

Sia $S = 100$ euro, $m = 4$ e $i = 0.05$; si ha:

$$
\begin{aligned}
W(0) &= 100\,,\\
W(1) &= W(0) + I(0)\\
&= 100 + 0.05 \times 100 = 100 \times 1.05 = 105\,,\\
W(2) &= W(1) + I(1)\\
&= 100 \times 1.05 + 0.05 \times 100 \times 1.05 = 100 \times 1.05^2 =\\
&= 110.25\,,\\
W(3) &= W(2) + I(2)\\
&= 100 \times 1.05^2 + 0.05 \times 100 \times 1.05^2 = 100 \times 1.05^3 =\\
&= 115.763\,,\\
W(4) &= W(3) + I(3)\\
&= 100 \times 1.05^3 + 0.05 \times 100 \times 1.05^3 = 100 \times 1.05^4 =\\
&= 121.551\,.
\end{aligned}
$$

Esempio

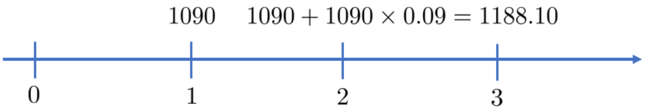
Il tasso di interesse che una Banca applica sui libretti di risparmio é pari al 9% annuale, con accredito degli interesse a fine anno. Il sig. Rossi apre un conto, depositandovi 1000 euro. Supponendo che l'unica operazione eseguita sul conto sia l'accredito annuale degli interessi, determiniamo il saldo del conto subito dopo l'accredito dell'interesse alla fine del terzo anno.



- dopo un anno $\rightarrow$ interesse $1000 \times 0.09 = 90$
  saldo $1000 + 1000 \times 0.09 = 1000 \times 1.09 = 1090$

Esempio (cont.)

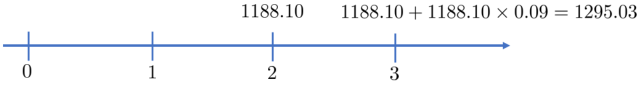
Il tasso di interesse che una Banca applica sui libretti di risparmio é pari al 9% annuale, con accredito degli interesse a fine anno. Il sig. Rossi apre un conto, depositandovi 1000 euro. Supponendo che l'unica operazione eseguita sul conto sia l'accredito annuale degli interessi, determiniamo il saldo del conto subito dopo l'accredito dell'interesse alla fine del terzo anno.



- dopo due anni $\rightarrow$ interesse 1090×0.09
  saldo $1090 + 1090 \times 0.09 = 1090 \times 1.09 = 1000 \times 1.09^2 = 1188.10$

Esempio (cont.)

Il tasso di interesse che una Banca applica sui libretti di risparmio é pari al 9% annuale, con accredito degli interesse a fine anno. Il sig. Rossi apre un conto, depositandovi 1000 euro. Supponendo che l'unica operazione eseguita sul conto sia l'accredito annuale degli interessi, determiniamo il saldo del conto subito dopo l'accredito dell'interesse alla fine del terzo anno.



- dopo tre anni $\rightarrow$ saldo

$$1188.10 + 1188.10 \times 0.09 = 1188.10 \times 1.09 = 1000 \times 1.09^3 = 1295.03$$

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

(reinvestimento degli interessi man mano che maturano)

0	1	2		$n-1$	n
deposito	interesse	interesse	- - -	interesse	interesse
C	$C \cdot i$	$C(1+i) \cdot i$		$C(1+i)^{n-2} \cdot i$	$C(1+i)^{n-1} \cdot i$
saldo	saldo	saldo		saldo	saldo
C	$C + Ci$	$C(1+i) +$		$C(1+i)^{n-2} +$	$C(1+i)^{n-1} +$
	$= C(1+i)$	$+ C(1+i)i$		$+ C(1+i)^{n-2} i$	$+ C(1+i)^{n-1} i$
		$= C(1+i)^2$		$= C(1+i)^{n-1}$	$= C(1+i)^n$

dopo n anni $\qquad C(1+i)^n \to$ MONTANTE

Esempio R.I.C. tasso non costante

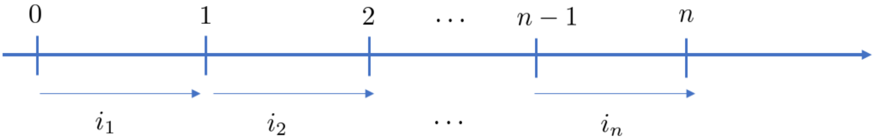
	Tasso di rendimento annuale				
	2016	2015	2014	2013	2012
Dow Jones Ind. Avg.	13.42%	-2.23%	7.52%	26.50%	7.26%

Investo 1 euro il 1^o gennaio 2012. Il valore al 31 dicembre 2016 é:

$$1 \times (1 + 0.0726)(1 + 0.2650)(1 + 0.0752)(1 - 0.0223)(1 + 0.1342) = 1.6178$$

Rendimento annuale medio:

$$1 \times (1 + i)^5 = 1.6178 \qquad \Rightarrow \qquad i = (1.6178)^{\frac{1}{5}} - 1 = 10.10\%$$



In generale, se investo un capitle S, avró al tempo n un capitale dato da:

$$S(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_n)$$

Al continuo

È importante definire un contratto finanziario che prevede il rimborso della somma S, anziché in istanti di tempo discreti, in un qualsiasi istante $t \geq 0$. Si tratta di estendere la funzione valore su tutto l'asse reale positivo, ponendo:

$$W(t) = S\,(1+i)^t\,.$$

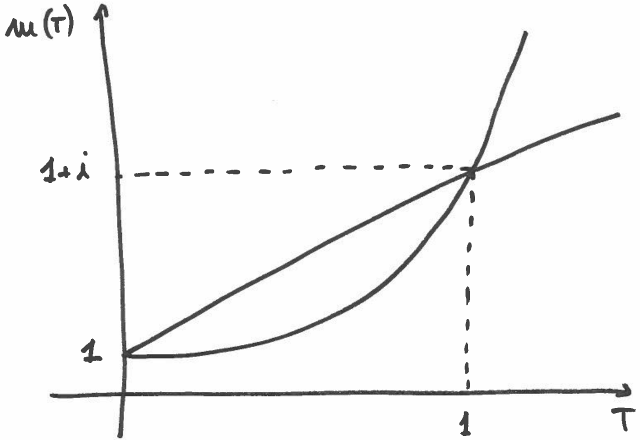
legge di capitalizzazione continua a tasso costante o **legge esponenziale**

Analogamente anche un contratto definito nel regime degli interessi semplici può essere definito nel tempo continuo. Si ha quindi l'espressione:

$$W(t) = S\,(1+i\,t)\,,$$

legge lineare

SEMPLICE VS COMPOSTO



interessi semplici → ammontare dell'interesse annuale via via accreditato rimane costante

$$m(1) - m(0) = 1 + i - 1 = i$$

$$m(T) - m(T-1) = (1 + iT) - (1 + i(T-1)) =$$

$$= 1 + iT - 1 - iT + i = i$$

(l'interesse accreditato non viene reinvestito)

interessi composti:

$$m(1) - m(0) = 1 + i - 1 = i$$

$$m(T) - m(T-1) = (1+i)^{T} - (1+i)^{T-1} = (1+i)^{T-1}\left[(1+i) - 1\right] =$$

$$= (1+i)^{T-1} \cdot i > i$$

(l'interesse maturato viene reinvestito)

TASSO DI INTERESSE ANNUALE EFFETTIVO

variazione percentuale del valore dell'investimento

$\boxed{\text{interessi composti}}$ $$\frac{m(T)-m(T-1)}{m(T-1)} = \frac{(1+i)^{T-1}\cdot i}{(1+i)^{T-1}} = i$$ costante rispetto al tempo

$\boxed{\text{interessi semplici}}$ $$\frac{m(T)-m(T-1)}{m(T-1)} = \frac{i}{1+i(T-1)}$$ decrescente nel tempo

Intensitá istantanea di interesse

Per un investimento il cui valore é descritto dalla funzione derivabile $W(t)$, l'intensitá istantanea di interesse al tempo t é definita come

$$\delta(t) = \frac{W'(t)}{W(t)}$$

- Regime semplice $W(t) = W(0)(1 + it) \Rightarrow W'(t) = W(0)i$

$$\delta(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{i}{1 + it}$$

- Regime composto $W(t) = W(0)(1 + i)^t \Rightarrow W'(t) = W(0)(1 + i)^t \ln(1 + i)$

$$\delta(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{(1 + i)^t \ln(1 + i)}{(1 + i)^t} = \ln(1 + i)$$

Tassi equivalenti

Le leggi di capitalizzazione sono definite a partire dall'identificazione dell'unitá temporale di riferimento (tipicamente l'anno). Al fine di confrontare operazioni definite su intervalli di tempo diversi puó essere utile cambiare l'unitá di riferimento temporale.

supponiamo che sia $t = 1$ anno e i tasso annuale.
Vogliamo passare a definire la legge di capitalizzazione misurando il tempo in mesi $\longrightarrow$ l'unitá temporale di riferimento viene ad essere suddivisa in 12 parti.
$t = 1 \longrightarrow t' = 12$
$t = 2 \longrightarrow t' = 24$
$t \longrightarrow t' = 12 \times t.$

Dobbiamo ridefinire la legge di capitalizzaione rispetto alla nuva unitá di misura del tempo. Dobbiamo ridefinire il tasso di interesse su base mensile in modo tale che la funzione $W(t')$ sia equivalente a $W(t)$.

Tassi equivalenti R.I.C.

Suddividiamo l'unitá temporale di riferimento per il calcolo degli interessi in q unitá temporali (ad esempio $q = 12$ nel caso del mese, $q = 2$ nel caso del semestre), abbiamo $t' = t \times q$. Dato il tasso i su base annuale, il tasso equivalente $i_{1/q}$ per la capitalizzazione composta rispetto alla nuova unitá temporale deve soddisfare la seguente condizione:

$$W(t) = W(t') \quad \forall t \geq 0$$

quindi

$$S(1+i)^t = S(1+i_{1/q})^{tq}$$

che equivale a

$$(1+i_{1/q})^q = 1+i$$

e puó essere scritta come

$$i_{1/q} = (1+i)^{1/q} - 1$$

$i_{1/q}$ é detto **tasso di interesse equivalente** al tasso i per una frazione temporale $\frac{1}{q}$

Esempio

Regime composto con tasso annuo di interesse $i = 5\%$. Calcolare:

- il tasso semestrale equivalente i';
- il tasso trimestrale equivalente i''.

1. $q = 2$. Si ha quindi:

$$i' = (1+i)^{1/2} - 1 = (1.05)^{1/2} - 1 = 0.024695 = 2.4695\,\% \,.$$

2. $q = 4$. Si ha quindi:

$$i'' = (1+i)^{1/4} - 1 = (1.05)^{1/4} - 1 = 0.012272 = 1.2272\,\% \,.$$

.

Esempio

Regime composto con tasso semstrale di interesse $i_{1/2} = 6\%$. Calcolare:

- il tasso annuo equivalente i';
- il tasso mensile equivalente i''.

1. $q = \frac{1}{2}$. Si ha quindi:

$$i' = (1 + i_{1/2})^2 - 1 = (1.06)^2 - 1 = 0.1236 = 12.36\% \,.$$

2. $q = 6$. Si ha quindi:

$$i'' = (1 + i_{1/2})^{1/6} - 1 = (1.06)^{1/6} - 1 = 0.009759 = 0.9759\% \,.$$

.

Esempio

Regime composto con tasso di interesse a 159 giorni $i_{159g} = 4\%$. Calcolare:

- il tasso annuo equivalente i';
- il tasso mensile equivalente i''.

1. $q = \frac{159}{365}$. Si ha quindi:

$$i' = (1 + i_{159})^{365/159} - 1 = (1.04)^{365/159} - 1 = 0.094213 = 9.4213\% \,.$$

2. $q = \frac{159}{30}$. Si ha quindi:

$$i'' = (1 + i_{159})^{30/159} - 1 = (1.04)^{30/159} - 1 = 0.007428 = 0.7428\% \,.$$

.

Tassi equivalenti R.I.S.

Il tasso di interesse equivalente puó essere definito anche rispetto rispetto alla capitalizzazione semplice imponendo:

$$S(1+it) = S(1+i_{1/q}qt)$$

che equivale a

$$1+i_{1/q}qt = 1+it$$

e puó essere scritta come

$$i_{1/q} = \frac{i}{q}$$

$j_q = qi_{1/q}$ é detto **tasso di interesse nominale annuo convertibile** q **volte l'anno**: é il tasso annuo corrisposto q volte in un anno ogni $\frac{1}{q}$ intervallo di tempo nella misura $i_{1/q}$.

Esempio

Regime semplice con tasso annuo di interesse $i = 5\%$. Calcolare:

- il tasso semestrale equivalente i';
- il tasso trimestrale equivalente i''.

1. $q = 2$. Si ha quindi:

$$i' = i\frac{1}{2} = 0.05\frac{1}{2} = 0.025 = 2.5\% \,.$$

2. $q = 4$. Si ha quindi:

$$i'' = i\frac{1}{4} = 0.05\frac{1}{4} = 0.0125 = 1.25\% \,.$$

.

Per ricordarlo

Immaginiamo di indicare con i_V il tasso di partenza (V sta per vecchia, la vecchia unitá di misura del tempo) e con i_N il tasso di arrivo (N sta per nuova, la unitá di misura del tempo). Allora:

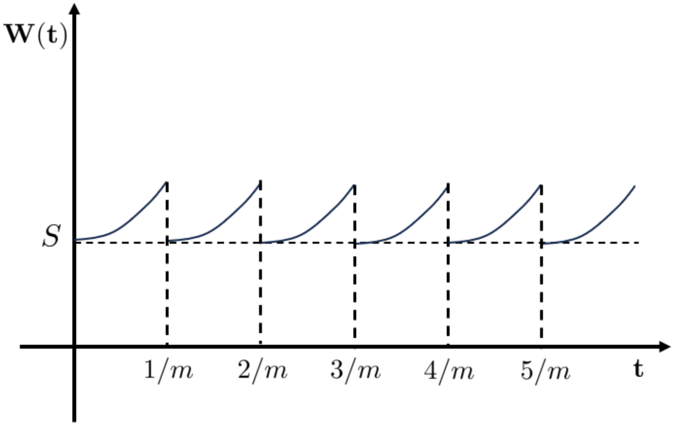
$$i_N = (1 + i_V)^F - 1$$

$$i_N = i_V \times F$$

dove F denota **la nuova unitá di misura del tempo rispetto alla vecchia**.

Il Tasso Nominale

Consideriamo il caso in cui un capitale S sia investito, in r.i.c., al tasso annuo i, ma *l'interesse via via prodotto venga corrisposto* all'investitore con una prefissata periodicitá, diaciamo m volte l'anno.



Il Tasso Nominale (cont.)

L'ammontare d'interesse maturato in capo al primo m-esimo di anno é $Si_{1/m}$. Se questo interesse non vine capitalizzato, ma viene staccato e messo a disposizione dell'investitore, all'inizio del secondo m-esimo d'anno il capitale a frutto ammonta ancora ad S.
In capo ad un anno l'investitore avrá riscosso m rate di ammontare $i_{1/m}$.
La somma aritmetica di queste quantitá non ha significato finanziario diretto , trattandosi di capitali disponibili ad epoche diverse; non é peró priva di un suo valore indicativo. Essa riceve il nome di *tasso nominale* annuo di interesse, *rinnovabile m volte nell'anno*, *equivalente ad i*. La indicheremo con $j(m)$.

$$j(m) = mi_{1/m} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right)$$

da cui

$$i_{1/m} = \frac{1}{m} j(m) \qquad i = \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1$$

La legge di capitalizzazione esponenziale

Abbiamo appena visto che dividendo l'unitá temporale di riferimento per il fattore m otteniamo un tasso $i_{1/m} = (1+i)^{1/m} - 1$ equivalente ad i in capitalizzazione composta. Ricordando che $j(m) = mi_{1/m}$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
j_\infty &= \lim_{m\to\infty} j(m) = \lim_{m\to\infty} mi_{1/m} = \lim_{m\to\infty} m\left((1+i)^{1/m} - 1\right) = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{\frac{1}{m}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+i)^x - 1}{x} \\
&= ln(1+i) = \delta
\end{aligned}
$$

La quantitá $\delta = log(1+i) = lim_{m\to\infty} j(m)$ é detta **tasso instantaneo di interesse** o **tasso nominale annuo convertibile infinite volte nell'anno**.

Significato

Ricordando che $j(m)$ é la quantiá somma di m rate uguali corrisposte al termine di m periodi consecutivi di anno, al tendere di m ad infinito le rate costanti ed equintervallate si trasformano in un flusso uniforme e continuo di capitale durante tutto l'anno, per l'ammontare nominale complessivo δ
Il montante in un anno sará dato da:

$$\left(1+i_{1/m}\right)^m = \left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^m$$

e il montante per una durata t sará:

$$\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{mt}$$

Si ha quindi che :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{mt} = e^{ln(1+i)t} = e^{\delta t}$$

Capitalizzazione esponenziale

Secondo la legge di **capitalizzazione esponenziale**, il montante evolve come una funzione esponenziale del tempo:

$$W(t) = W(0)e^{\delta t}$$

Per $\delta = ln(1+i)$ questa legge di capitalizzazione corrisponde a quella composta con tasso di interesse annuale i

Tassi equivalenti in legge esponenziale

Si consideri la funzione

$$W(t) = e^{\delta t}$$

cambiamo l'unitá di misura per il tempo:

$$t' = tq$$

La funzione valore, espressa nella nuova scala, sarà

$$W(t') = e^{\delta' t'} = e^{\delta' tq}.$$

Affinché δ' sia la forza di interesse equivalente a δ, si richiede che la funzione valore espressa nelle due scale sia la stessa, cioè

$$W(t') = W(t).$$

Deve quindi essere $\delta' t' = \delta t$, cioè $\delta' tq = \delta t$; per cui la relazione di equivalenza è espressa dalla:

$$\delta' = \frac{\delta}{q}.$$

Ricordando che:

$$\delta = \frac{d}{dt} \log W(t)$$

si riconosce che δ rappresenta l'intensità istantanea di interesse della legge esponenziale. Che la funzione forza di interesse risulti costante costituisce una proprietá caratteristica della legge esponenziale. Essendo:

$$\delta = \frac{d}{dt} \log W(t) \, .$$

integrando tra 0 e t si ha:

$$\int_0^t \delta \, du = \int_0^t \frac{d}{dt} \log W(t) \, du \, .$$

$$\int_0^t \delta \, du = \int_0^t \frac{d}{dt} \log W(t) \, du \, .$$

da cui

$$\delta \, t = \log W(t) - \log W(0) = \log \frac{W(t)}{W(0)}$$

cioè:

$$W(t) = Se^{\delta \, t}$$

essendo $S = W(0)$

Riepilogo: regime degli interessi composti

- fattore montante $m(t) = (1+i)^t$
- fattore di sconto $v(t) = (1+i)^{-t}$
- tassi equivalenti $i_{1/q} = (1+i)^{1/q} - 1$
- intensità istantanea $\delta = ln(1+i)$

Riepilogo: legge esponenziale

- fattore montante $m(t) = e^{\delta t}$
- fattore di sconto $v(t) = e^{-\delta t}$
- tassi equivalenti $\delta_{1/q} = \frac{\delta}{q}$

Riepilogo: regime degli interessi semplici

- fattore montante $m(t) = (1 + it)$
- fattore di sconto $v(t) = \frac{1}{1+it}$
- tassi equivalenti $i_{1/q} = \frac{i}{q}$
- intensità istantanea $\delta = \frac{i}{1+it}$

Table of Contents

Valore di un'operazione finanziaria

Sia data l'operazione finanziaria $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ caratterizzata dai vettori di importi e di tempi:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} ;$$

Considerando il tempo zero come l'istante corrente e assumendo assegnata una legge di valutazione esponenziale con intensità istantanea di interesse δ, il valore attuale $W(0; x_k)$ dell'importo x_k sarà dato da:

$$W(0; x_k) := x_k \, e^{-\delta t_k} , \quad k = 1, 2, \ldots, m ,$$

Si definisce *valore attuale dell'operazione finanziaria* $\mathbf{x}$,conformemente alla assegnata legge esponenziale, la somma $W(0;\mathbf{x})$ dei valori attuali dei singoli importi componenti:

$$W(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} W(0;x_k)\,,$$

cioè:

$$W(0;\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{-\delta t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k}\,.$$

Nelle stesse ipotesi, per un generico istante $t > 0$ è naturale definire il *valore in t dell'operazione* $\mathbf{x}$ come il valore attuale di $\mathbf{x}$ capitalizzato da zero a t, cioè:

$$W(t; \mathbf{x}) = W(0; \mathbf{x})\ e^{\delta t} .$$

Si ha quindi:

$$W(t; \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{\delta\,(t-t_k)} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{t-t_k} .$$

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA FINANZIARIA

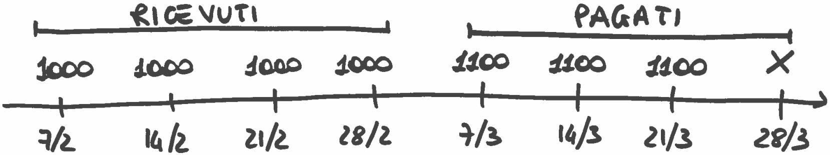
- Ogni pagamento deve essere associato all'epoca in cui viene effettuato
- La rappresentazione matematica di un'operazione finanziaria assume la forma di un'eq. che bilancia la sequenza temporale dei pagamenti in entrata e in uscita. Tale eq. deve tenere conto dei "valori temporali" dei pagamenti, ossia dei montanti e dei valori attuali

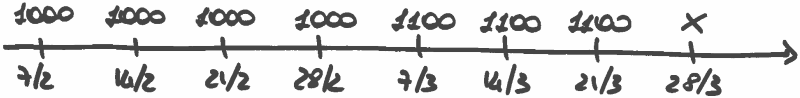
Scelta una data di valutazione, con riferimento a tale epoca si uguagliano i seguenti due elementi:

1) il montante di tutti i pagamenti già corrisposti in passato più il valore attuale di tutti i pagamenti da effettuare in futuro
2) il montante di tutti i pagamenti già ricevuti in passato più il valore attuale di tutti i pagamenti ancora da ricevere in futuro

ESEMPIO

Ogni venerdì di febbraio (7, 14, 21 e 28) Walter scommette un importo uguale a 1000€, prendendolo a credito, presso una agenzia di scommesse. Il servizio prevede un tasso effettivo di interesse settimanale pari all'8%. Purtroppo per Walter, egli perde tutte le scommesse. Si accorda per ripagare il suo debito in quattro rate, con scadenze rispettivamente 7, 14, 21 e 28 marzo. Walter paga 1100€ il 7, il 14 e il 21 marzo. Quanto deve pagare il 28 marzo per saldare il suo debito?





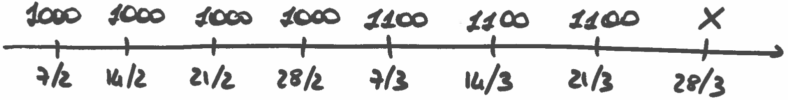
uguagliando il valore al tempo 0 di ciò che Walter riceverà e il valore di ciò che pagherà si ottiene

$$1000 + 1000\,1{,}08^{-1} + 1000\,1{,}08^{-2} + 1000\,1{,}08^{-3} =$$
$$= 1100\,1{,}08^{-4} + 1100\,1{,}08^{-5} + 1100\,1{,}08^{-6} + X\,1{,}08^{-7}$$

da cui

$$X = \frac{1000\left(1 + 1{,}08^{-1} + 1{,}08^{-2} + 1{,}08^{-3}\right) - 1100\left(1{,}08^{-4} + 1{,}08^{-5} + 1{,}08^{-6}\right)}{1{,}08^{-7}}$$

$$= 2273{,}79\,€$$



al tempo $T = 28/3$ si ha

$$1000\left(1{,}08^7 + 1{,}08^6 + 1{,}08^5 + 1{,}08^4\right) =$$
$$= 1100\left(1{,}08^3 + 1{,}08^2 + 1{,}08\right) + X$$

da cui

$$X = 1000\left(1{,}08^7 + 1{,}08^6 + 1{,}08^5 + 1{,}08^4\right) - 1100\left(1{,}08^3 + 1{,}08^2 + 1{,}08\right.$$
$$= 2273{,}79\text{€}$$

Table of Contents

I Titoli di Stato

→ sono strumenti emessi dai governi nazionali per finanziare le proprie esigenze di indebitamento
→ offerti in sottoscrizione a soggetti in avanzo finanziario
→ allo scopo di ottenere finanziamenti

CARATTERISTICHE:

- sono nominativi o al portatore;
- non conferiscono al titolare alcun diritto amministrativo, ma alcuni diritti economici
- certezza e ammontare dei flussi generati dalle obbligazioni
- vita limitata
- regolarità nei collocamenti;
- alto livello di liquidità.

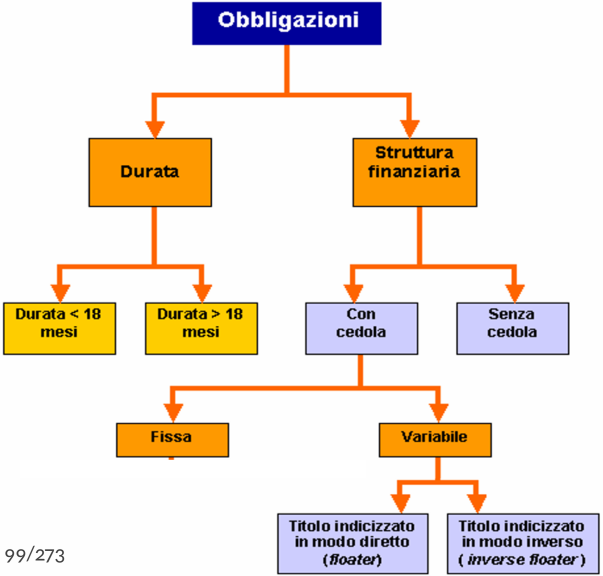
Banca d'Italia Dipartimento del Tesoro

Obbligazioni corporate

prestiti contratti da societá per far fronte a esigenze di breve, medio o lungo periodo

- obbligazioni zero coupon bond
- obbligazioni a tasso fisso
- obbligazioni a tasso variabile o indicizzate
- obbligazioni strutturate
  - Azioni
  - Titoli di Stato
  - Tassi di interesse
  - Valute
  - Merci
  - Indici o panieri
  - Contratti derivati

La classificazione delle obbligazioni



Definizioni

Si definiscono:

- **valore facciale, nominale, nozionale** = importo fissato C il cui pagamento é garantito da parte dell'emittente a una data futura s stabilita (data di scadenza del titolo);
- **prezzo di emissione** = prezzo P che l'investitore deve pagare nell'istante corrente t per acquisire questo diritto.

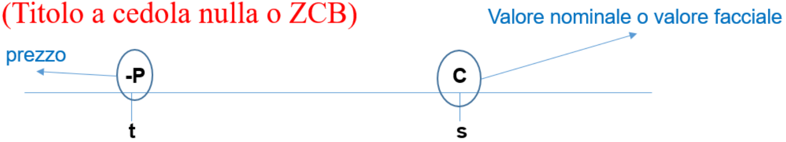
Alcuni titoli garantiscono al portatore il pagamento di un flusso di m importi detti ***cedola*** o ***coupon***.

Le obbligazioni possono essere emesse:

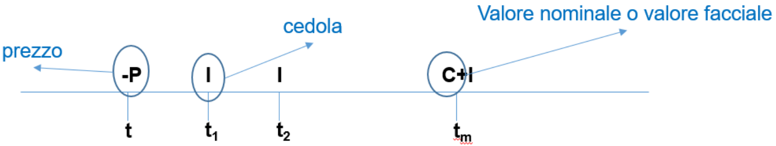
- **alla pari**, $P = C$;
- **sotto la pari**, $P < C$;
- **sopra la pari**, $P > C$.

TCN e TCF

TCN (Titolo a cedola nulla o ZCB)



TCF (Titolo a cedola fissa)



$I = j \cdot C$ $\qquad$ j é il tasso cedolare ottenuto dividendo il tasso nominale annuo per il numero di cedole pagate in un anno

DISAQ
DIPARTIMENTO DI STUDI AZIENDALI E QUANTITATIVI
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Tipologie

	ZERO COUPON BOND		CEDOLA FISSA	CEDOLA VARIABILE			
Titolo	BoT	CTz	BTp	CcT	CCTeu	BTP€i	BTP Italia
Anno di creazione	1850	1995	1892	1977			
Durata attuale	2,3,6,12 mesi	2 anni	3,5,7,10,15,20, 30 e 50 anni	7 anni	7 anni	5,10,15 e 30 anni	4,6 e 8 anni
Tasso	Fisso	Fisso	Fisso	Variabile	Variabile	Variabile	Variabile
Periodicità cedola	Zero coupon	Zero Coupon	Semestrale	Semestrale	Semestrale	Semestrale	Semestrale
Remunerazione	Scarto di emissione	Scarto di emissione	Cedole ed eventuale scarto di emissione	Cedole indicizzate ai BOT più spread ed eventuale scarto d'emissione	Cedole indicizzate Euribor 6 mesi più spread ed eventuale scarto d'emissione	Cedole indicizzate all'IAPC ed eventuale scarto d'emissione più rivalutazione del capitale a scadenza	Cedole e capitale rivalutati in base al FOI
Rimborso	Alla pari	Alla pari	Alla pari	Alla pari	Alla pari	In unica soluzione a scadenza	In unica soluzione a scadenza
Meccanismo d'asta	Asta competitiva sul rendimento	Asta marginale	Asta marginale	Asta marginale	Asta marginale	Asta marginale	Collocamento diretto sul MOT
Periodicità aste	Variabile	Una al mese	Due al mese	Una al mese	Una al mese	Una al mese	
Corso	Tel-quel	Tel-quel	Corso secco	Corso secco	Corso secco	Corso secco	Corso secco

Mercato primario e secondario

mercato primario

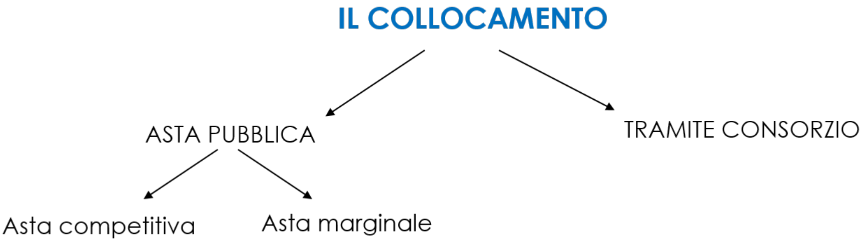
é il “luogo” di collocazione; operano su questo mercato gli emittenti che raccolgono fondi e si indebitano, e gli investitori che acquistano titoli.

mercato secondario

é il “luogo” di scambio; il mercato fissa i prezzi di scambio e consente al detentore del titolo di liquidare l’investimento.

Emissione

- **dove** $\rightarrow$ sul mercato primario
- **come** $\rightarrow$ tramite collocamento



aste titoli stato

Negoziazione

- **dove** $\rightarrow$ sul mercato secondario
- **MOT** $\rightarrow$ Mercato delle Obbligazioni e dei Titoli di Stato
  La contrattazione puó avvenire solo mediante intermediari finanziari autorizzati, principalmente SIM (Società di Intermediazione Mobiliare) e Banche. Gli strumenti finanziari trattati nei mercati regolamentati sono dematerializzati
- **come** $\rightarrow$ contratti tipo $\rightarrow$ con clausole standardizzate $\rightarrow$ per quantitativi minimi (lotti o tagli minimi)

Come Investire

**ACQUISTARE
TITOLI DI STATO**

Prenotare presso
la Banca le obbligazioni
In asta

Inoltrando la prenotazione
Almeno un giorno prima
dell'asta ad un
intermediario finanziario
abilitato da Banca d'Italia

Sul mercato regolamentato
MOT di Borsa Italiana

Tramite intermediario

Direttamente
se in possesso
di un conto online
per eseguire
le transazioni finanziarie
presso la propria banca.

i titoli vengono acquistati in forma dematerializzata

Importo minimo pari a 1.000 euro

Stipulazione/Liquidazione contratti

giorno di stipulazione (o negoziazione):
giorno in cui il contratto viene concluso con l'abbinamento fra proposta di acquisto e proposta di vendita

giorno di liquidazione:
giorno in cui il contratto viene eseguito con il passaggio di proprietà dei titoli oggetto della contrattazione e pagamento del relativo prezzo

giorno stipulazione + 2 gg. Borsa aperta = giorno liquidazione

esempio

stipulazione MARTEDÍ + 2 gg. Borsa aperta = liquidazione GIOVEDÍ
stipulazione GIOVEDÍ + 2 gg. Borsa aperta = liquidazione LUNEDÍ

CORSI (prezzi)

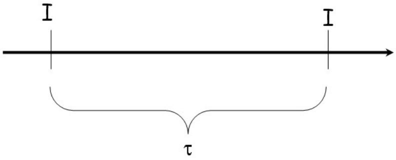
corso secco: valore capitale
corso tel quel: prezzo che comprende oltre al valore capitale anche gli interessi maturati dal giorno in cui è scaduta l'ultima cedola

corso tel quel = corso secco + interessi maturati

calcolo interessi

base di calcolo: valore nominale del titolo
tasso: tasso nominale annuo / numero periodi dell'anno
giorni: dal giorno di inizio maturazione cedola (escluso) al giorno di valuta dell'operazione

Tasso cedolare e tasso nominale



Si consideri un *coupon bond* con valore facciale C

$I/C \; = \;$ *tasso cedolare* del titolo.

$\sum I/C \; = \;$ *tasso nominale* (annuo) dell'obbligazione.

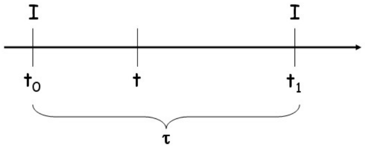
tasso nominale = tasso cedolare $*$ numero annuo di coupon.

Esempio

Se il titolo ha periodicità semestrale, il tasso nominale è $2I/C$.

Grandezze caratteristiche di un coupon bond

Acquisto del coupon bond trattato in t successivo alla data di emissione.



La cedola esigibile in t_1, viene chiamata **cedola in corso**.
L'intervallo $[t_0, t_1]$ costituisce il **periodo di godimento** della cedola in corso.
Il **rateo di interesse** A al tempo t è:

$$A = I\,\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = I\left(1 - \frac{t_1 - t}{\tau}\right),$$

rappresenta l'interesse maturato (*accrued interest*) tra t_0 e t.

P (prezzo effettivamente dovuto) $\Longrightarrow$ "corso **tel quel**"

Nel mercato obbligazionario secondario, si usa effettuare le contrattazioni in riferimento al cosiddetto "corso **secco**" Q

$$Q = P - A,$$

Q é un prezzo fittizio che permette di confrontare i prezzi di titoli che richiedono tempi d'attesa diversi per l'incasso della prossima cedola.

Il corso secco coincide col corso tel quel all'emissione e immediatamente dopo lo stacco di ogni cedola.

Esempio

Titolo con cedola fissa:

- $I = 3$ euro,
- $C = 100$ euro,
- periodicità trimestrale,
- prezzo tel quel $P = 98$ euro,
- $m = 5$ pagamenti con prima cedola staccata dopo 1 mese

$$\mathbf{y}/\mathbf{s} = \{-98, 3, 3, 3, 3, 103\}/\{0, 1, 4, 7, 10, 13\}$$

L'obbligazione:

- è stata acquistata dopo la data di emissione;
- è quotata sotto la pari;
- la vita residua del titolo è 13 mesi;
- il tasso cedolare è $3/100 = 3\%$;
- il tasso nominale è $4 \times 3/100 = 12\%$;
- il rateo è dato da: $A = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ euro;
- il corso secco è $Q = 98 - 2 = 96$ euro.

Esempio

Il Btp 4.50% 1/11/1993-1/11/2023 paga, per ogni 100 euro di nominale, cedole semestrali di 2.25 euro il $1/5$ e il $1/11$ (convenzione eff/eff).
In $t =$1/10/2016, il valore del rateo è:

$$A(t) = 2.25 \times \frac{153}{184} = 1.870924\,,$$

poiché:

- 153 = numero di giorni effettivi che intercorrono tra la data di inizio godimento della cedola $01/05/2016$ e la data di calcolo del rateo;
- 184 = numero di giorni effettivi dell'intervallo cedolare $[01/05/2016, 01/11/2016]$.

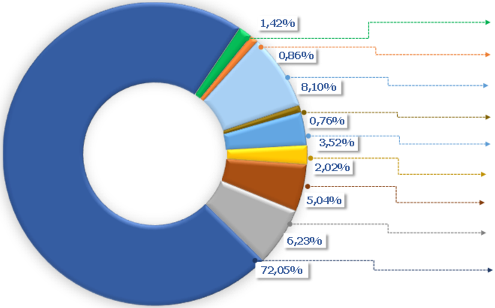
Situazione al 30 giugno 2023

Debito Pubblico

COMPOSIZIONE DEI TITOLI DI STATO

Dipartimento del Tesoro

Valori in circolazione
al 30 giugno 2023
(milioni di Euro)



BTP Green	33.900,00
BTP Futura	20.588,89
BTP €i (rivalutato)	193.728,95
BTP Valore	18.191,09
BTP Italia (rivalutato)	84.322,73
Estero	48.362,08
BOT	120.559,11
CCTeu	149.109,21
BTP	1.724.201,88

Totale
2.392.963,95

Vita media 6,96 anni

www.dt.mef.gov.it

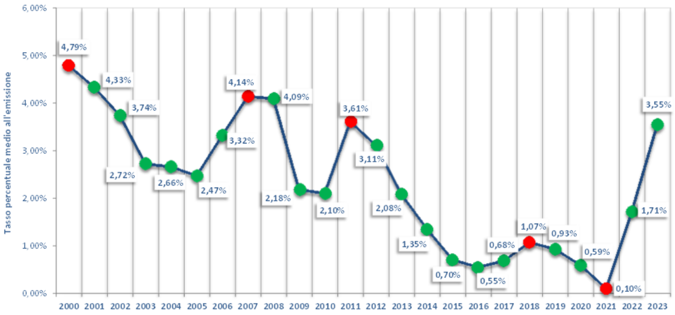
Situazione al 30 giugno 2023

MEF Dipartimento del Tesoro

Debito Pubblico

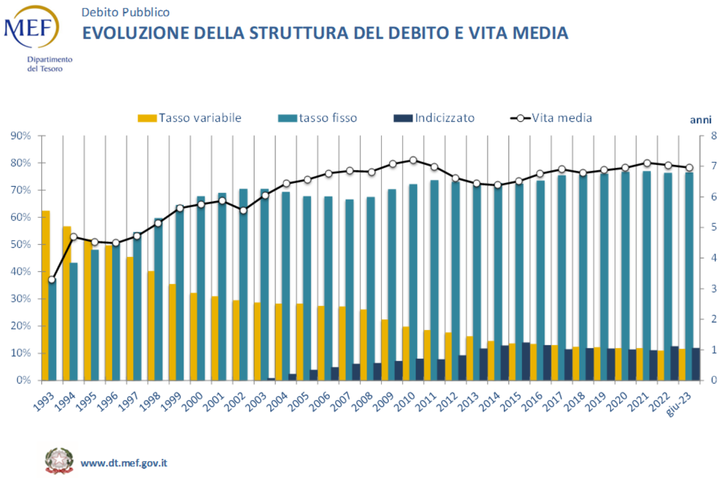
COSTI MEDI ALL'EMISSIONE DEI TITOLI DI STATO

Andamento del tasso medio ponderato di interesse dei titoli di Stato calcolato sulla base dei rendimenti lordi all'emissione dei titoli emessi nel singolo anno



www.dt.mef.gov.it

Situazione al 30 giugno 2023



ISIN

ISIN (International Securities Identification Number) é un codice identificativo dei valori mobiliari a livello internazionale. É utilizzato per identificare le azioni, le obbligazioni, i warrant e gli ETF.

Composizione di un codice ISIN											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Codice del Paese		NSIN									Check digit

IT
Per l'Italia

Numero di controllo

assegnato dalla **NNA** (National Numbering Agency) di ciascun paese.
In Italia l'agenzia assegnatrice è la Banca d'Italia.

Esempio

Dati estratti da www.borsaitaliana.it in data 11/09/2020

Isin	Descrizione	Ultimo	Cedola	Scadenza	Acquisto	Vendita
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00

Tasso cedolare $i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$

Esempio

Dati estratti da www.borsaitaliana.it in data 11/09/2020

Isin	Descrizione	Ultimo	Cedola	Scadenza	Acquisto	Vendita
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00

Tasso cedolare $i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$

Cedola $I = i(0, 0.5) \cdot C = 0.045 \cdot 100 = 4.5$

Esempio

Dati estratti da www.borsaitaliana.it in data 11/09/2020

Isin	Descrizione	Ultimo	Cedola	Scadenza	Acquisto	Vendita
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00

Tasso cedolare $i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$

Cedola $I = i(0, 0.5) \cdot C = 0.045 \cdot 100 = 4.5$

Data godimento ultima cedola $01/05/2020$

Esempio

Dati estratti da www.borsaitaliana.it in data 11/09/2020

Isin	Descrizione	Ultimo	Cedola	Scadenza	Acquisto	Vendita
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00

Tasso cedolare $i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$

Cedola $I = i(0, 0.5) \cdot C = 0.045 \cdot 100 = 4.5$

Data godimento ultima cedola $01/05/2020$

Acquistato il $11/09/2020$, con valuta il $15/09/2020$, interessi maturati dal $01/05$ fino al $15/09 \rightarrow 137$ giorni.

Esempio

Il titolo é quotato al MOT ad un corso secco pari a $P_{cs} = 127.80$, a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

$C = 100$

Esempio

Il titolo é quotato al MOT ad un corso secco pari a $P_{cs} = 127.80$, a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

$C = 100$

$A(0, 137) = C \cdot i(0, 0.5)\frac{\tau}{n} = 100 \cdot 0.045 \cdot \frac{137}{184} = 3.3505$

Esempio

Il titolo é quotato al MOT ad un corso secco pari a $P_{cs} = 127.80$, a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

$C = 100$

$A(0, 137) = C \cdot i(0, 0.5)\frac{\tau}{n} = 100 \cdot 0.045 \cdot \frac{137}{184} = 3.3505$

$P_{tq} = P_{cs} + A = 127.80 + 3.3505 = 131.1505$

Esempio

Sul mercato monetario americano sono offerte le seguenti possibilità di investimento a breve periodo:

- Un deposito che paga il 5% annuo $[Act/365]$.
- Un T-Bond che paga il 5% annuo $[Act/360]$.

Qual é l'investimento che offre un rendimento effettivo maggiore?
Si consideri un investimento pari a $10.000.000$ per due mesi (gennaio e febbraio).
In entrambi i casi il numero di giorni è pari a 59. I rendimenti effettivi sono dati da:

$$10000000 \cdot 0.05 \cdot \frac{59}{365} = 80821.92$$
$$10000000 \cdot 0.05 \cdot \frac{59}{360} = 81944.44$$

Sebbene i due tassi siano nominalmente identici, il T?Bond ha un rendimento effettivo maggiore.

Esempio

Il tasso LIBOR per operazioni finanziarie in euro con scadenza una settimana é quotato a 4.54138%, base $[Act/360]$. Si ipotizzi che sul mercato sia possibile reperire denaro per scadenze non superiori ad una settimana ad un tasso pari al 4.58%, base $[Act/365]$. Qual è il tasso più conveniente?

Per effettuare un confronto é necessario esprimere i tassi in esame nella stessa base. Si supponga di trasformare il tasso LIBOR nella base $[Act/365]$.

$$i \cdot \frac{Act}{365} = 4.54138\% \frac{Act}{360} \rightarrow i = 4.54138\% \frac{365}{360} = 4.60445\%$$

L'operazione di finanziamento al 4.58% é sicuramente più conveniente (circa 2.5 basis point meno costosa) in quanto $4.58\% < 4.60445\%$.

Table of Contents

Le rendite

Le rendite

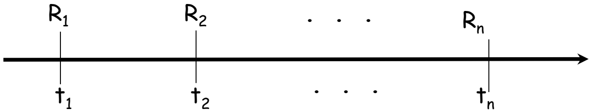
Numerose operazioni finanziarie comportano una sequenza di pagamenti, quali la corresponsione periodica dei dividendi ai possessori di azioni ordinarie, i pagamenti mensili per ripagare un prestito o i pagamenti semestrali degli interessi su un’obbligazione con cedole.

Se l’operazione comporta una sequenza di pagamenti regolari, allora spesso è possibile applicare metodi algebrici che ne semplificano la valutazione.

Il termine generico che si impiega per indicare una sequenza di pagamenti periodici (detti **rate**) è **rendita** (in inglese <u>annuity</u>).

Rappresentazione

Supponiamo di aver stipulato un contratto che prevede n somme di denaro alle scadenze t_1, t_2, …, t_n



$$\boxed{r = \{(R_k, t_k), k \epsilon \mathcal{N}, R_k > 0\}}$$

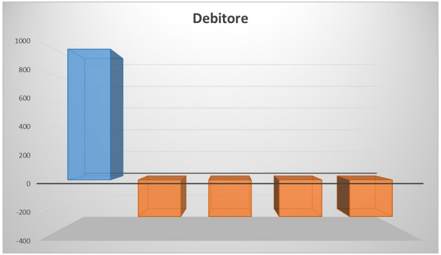
Tali somme di denaro costituiscono le **rate** di una *rendita*.

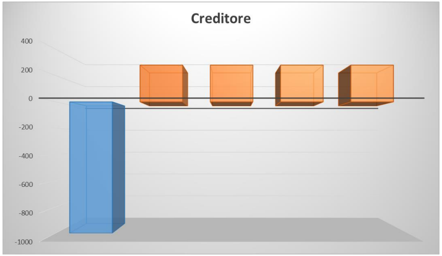
Una *rendita* è una successione di somme di denaro R_k disponibili agli istanti t_k

Le poste sono da considerarsi generalmente tutte dello stesso segno.
Esempio: un debito viene rimborsato mediante rate periodiche che costituiscono una rendita.

Debitore e creditore

Anche per le rendite è possibile considerare due punti di vista: quello del debitore (chi paga le rate) e quello del creditore (chi riceve le rate della rendita)





Valore attuale e montante

Il valore attuale di una rendita è dato dalla somma dei valori attuali di tutte le rate.

$$W(0,r) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-t_k}$$

Il montante di una rendita è dato dalla somma dei montanti di tutte le rate.

$$W(t_n,r) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{t_n - t_k}$$

Progressione geometrica

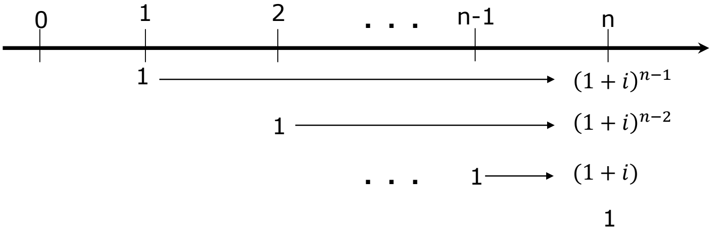
Una relazione algebrica fondamentale usata per valutare una rendita è la formula per il calcolo della somma di una successione geometrica finita.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

x: ragione della progressione

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Montante di una rendita



$$W(n,r) = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} \ldots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\boldsymbol{s_{\overline{n}|\,\mathrm{i}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} \ldots + (1+i) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

s figurato n al tasso i

MONTANTE ALLA DATA DELL'ULTIMO VERSAMENTO DI UNA SEQUENZA DI N RATE DI IMPORTO 1€ PAGATE A SCADENZE EQUIDISTANTI

Montante di una rendita

Il numero totale di rate della sequenza è detto DURATA DELLA RENDITA

L'intervallo temporale tra due rate successive è detto PERIODO DI PAGAMENTO o FREQUENZA

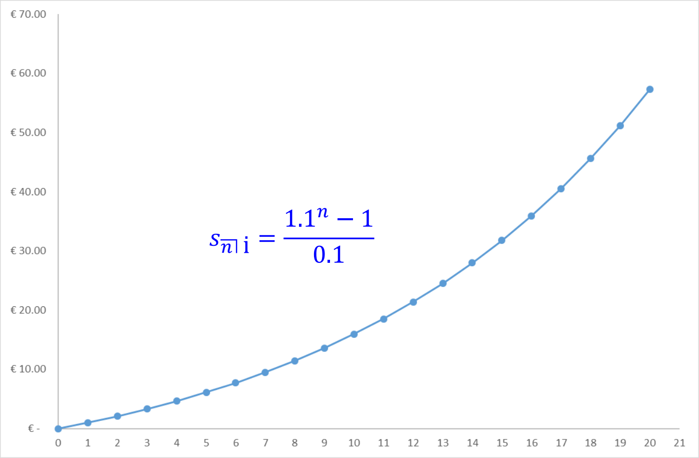
$s_{\overline{1}|\,\mathbf{i}} = \mathbf{1}$ $\qquad$ $s_{\overline{n}|\,\mathbf{i}} > n$ $\qquad$ A causa dell'interesse maturato
Sui depositi precedenti

Si può usare il simbolo $s_{\overline{n}|\,\mathbf{i}}$ purché siano rispettate le seguenti condizioni:

- il tasso di interesse per periodo di pagamento è costante;
- vi sono n rate tutte dello stesso importo;
- le rate sono pagate a scadenze equidistanti, con la stessa frequenza con la quale si compone il tasso di interesse i;
- il montante è calcolato nella data della rata finale e comprende il pagamento di quest'ultima

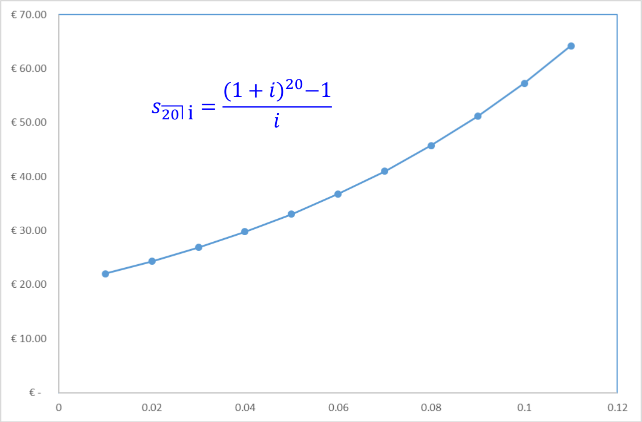
Montante di una rendita

Al variare di n

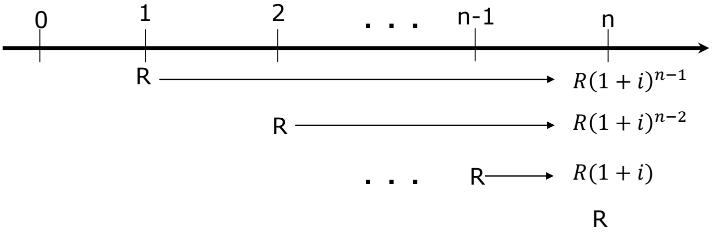


Montante di una rendita

Al variare di i



Montante di una rendita



$$W(n,r) = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i) + R =$$

$$= R[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1] =$$

$$= R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R\,\boldsymbol{s}_{\overline{\boldsymbol{n}}|\,\mathbf{i}}$$

Esempio

Ogni mese l'INPS invia al sig. Fabbri un assegno familiare di 30€ per suo figlio. Il sig. Fabbri deposita questi pagamenti su un cc l'ultimo giorno di ogni mese. Il conto garantisce un tasso di interesse del 9% annuale nominale pagabile mensilmente; gli interessi sono accreditati sul conto l'ultimo del mese. Se il primo assegno è stato depositato il 31 maggio 2007, qual è il montante sul conto il 31 dicembre 2018, comprensivo del pagamento appena eseguito e dell'interesse pagato quel giorno?

31 maggio — 30 giugno — 31 luglio

$$i_{1/12} = \frac{0.09}{12} = 0.75\%$$

$$30 \longrightarrow 30(1+i_{1/12}) \longrightarrow 30(1+i_{1/12})^2$$

$$+30 \longrightarrow +30(1+i_{1/12})$$

$$+30$$

$$W(2) = 30(1+i_{1/12}) + 30$$

$$W(3) = 30(1+i_{1/12})^2 + 30(1+i_{1/12}) + 30$$

$$W(140) = 30(1+i_{1/12})^{139} + 30(1+i_{1/12})^{138} + \cdots + 30\left(1+i_{\frac{1}{12}}\right) + 30 =$$

$$= 30\left[(1+i_{1/12})^{139} + (1+i_{1/12})^{138} + \cdots + \left(1+i_{\frac{1}{12}}\right) + 1\right] = 30\,\frac{1.0075^{140}-1}{0.0075}$$

ESERCIZIO

Se il tasso nominale annuo di interesse pagabile semestralmente è uguale al 9% e il 1° maggio e il 1° novembre di ogni anno dal 2015 al 2022 inclusi depositate 500€, quale capitale avrete accumulato il 1° novembre 2022?

ESERCIZIO

Se il tasso nominale annuo di interesse pagabile semestralmente è uguale al 9%, quale capitale si deve depositare il 1° maggio e il 1° novembre di ogni anno dal 2015 al 2022 inclusi per avere un montante uguale a 7000€ il 1° novembre 2022?

ESERCIZIO

Ogni mese l'INPS invia al sig. Fabbri un assegno familiare di 30€ per suo figlio. Il sig. Fabbri deposita questi pagamenti su un cc l'ultimo giorno di ogni mese. Il conto garantisce un tasso di interesse del 9% annuale nominale pagabile mensilmente; gli interessi sono accreditati sul conto l'ultimo del mese. Se il primo assegno è stato depositato il 31 maggio 2007, qual è il montante sul conto il 31 dicembre 2018, comprensivo del pagamento appena eseguito e dell'interesse pagato quel giorno?

Supponiamo ora che il figlio del sig. Fabbri sia nato nell'aprile del 2007 e che il primo assegno familiare sia ricevuto da Fabbri in maggio e depositato alla fine di maggio. Gli assegni familiari continuano ad arrivare e i versamenti sul conto continuano ad essere eseguiti fino a che il ragazzo compie 16 anni, compreso il mese del compleanno. Dopodiché gli assegni cessano di arrivare, ma sul conto continuano a cumularsi gli interessi, fino al mese in cui il ragazzo compie 21 anni. Qual è il saldo il giorno del 21esimo compleanno del sig. Fabbri.

ESERCIZIO

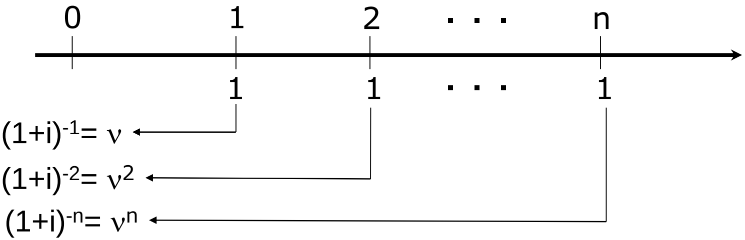
Ogni mese l'INPS invia al sig. Fabbri un assegno familiare di 30€ per suo figlio. Il sig. Fabbri deposita questi pagamenti su un cc l'ultimo giorno di ogni mese. Il conto garantisce un tasso di interesse del 9% annuale nominale pagabile mensilmente; gli interessi sono accreditati sul conto l'ultimo del mese. Se il primo assegno è stato depositato il 31 maggio 2007, qual è il montante sul conto il 31 dicembre 2018, comprensivo del pagamento appena eseguito e dell'interesse pagato quel giorno?

Supponiamo ora che il tasso nominale di interesse su base annua applicato al conto venga modificato in data 1° gennaio 2013, diventando il 7,5% (composto mensilmente). Qual è il montante al 31 dicembre 2018?

ESERCIZIO

In una rendita 10 rate di importo 50€ ciascuna sono seguite da 14 rate di importo 75€ ciascuna. Se il tasso effettivo di interesse su base mensile è uguale all'1%, qual è il montante all'atto dell'ultimo pagamento?

Valore attuale di una rendita



$$a_{\overline{n|}\,i} = \nu + \nu^2 + \dots + \nu^n = v(1 + \nu + \dots + \nu^{n-1}) = v \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k =$$

$$= v \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

Valore attuale di una rendita

$$a_{\overline{n}|\,i} = v\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)-1} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

a figurato n al tasso i

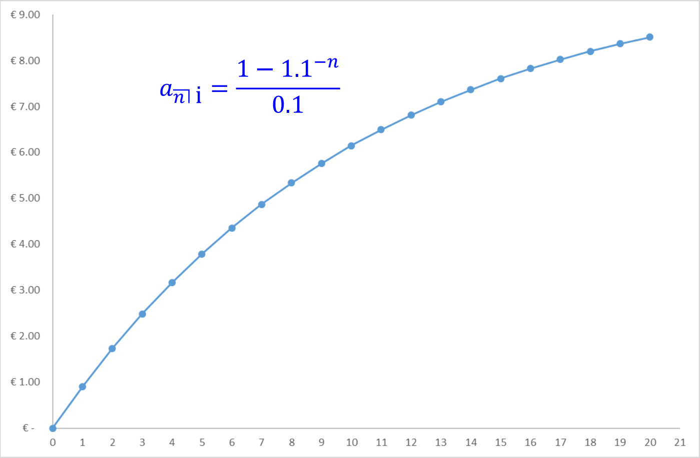
Valore attuale di una rendita

Si può usare il simbolo $a_{\overline{n}|\,\mathrm{i}}$ purché siano rispettate le seguenti condizioni:

- il tasso di interesse per periodo di pagamento è costante;
- vi sono n rate tutte dello stesso importo;
- le rate sono pagate a scadenze equidistanti, con la stessa frequenza con la quale si compone il tasso di interesse i;
- <u>il valore attuale è calcolato un periodo prima del primo pagamento</u>

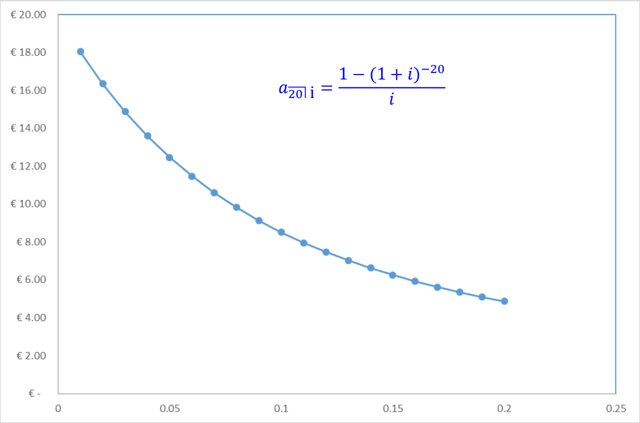
Valore attuale di una rendita

Al variare di n

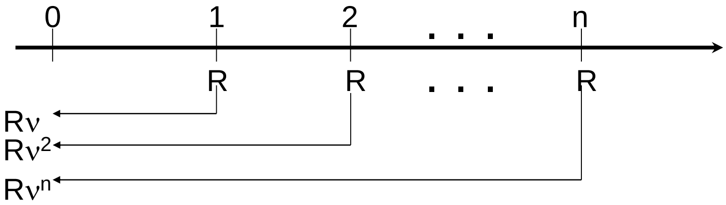


Valore attuale di una rendita

Al variare di i



Rendita costante annua posticipata immediata temporanea



$$W(0,n) = R\nu + R\nu^2 + \ldots + R\nu^n$$

$$= R(\nu + \nu^2 + \ldots + \nu^n)$$

$$= \boxed{R a_{\overline{n|}\,i}}$$

Esercizio

n = 15
i = 4,5%
R = 300€

$$Ra_{\overline{n}|\,i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 300\frac{1-(1+0,045)^{-15}}{0,045}$$

$$= 300 \times 10,739545 = 3221,8635$$

Valore attuale = 3221,86€

Osservazione

Relazione tra il montante e il valore attuale di una rendita unitaria

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$W(n,r) = (1+i)^n a_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{s_{n\neg i} = (1+i)^n a_{n\neg i}}$$

Esercizio

n = 15 anni
R = 300€ posticipate
i = 4,5%

0 15

$$W(0) = 300 a_{\overline{15|}\,4,5\%}$$

$$W(15) = 300 s_{\overline{15|}\,4,5\%}$$

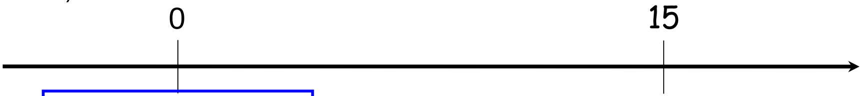
$$W(0) = 300 \cdot \frac{1-(1,045)^{-15}}{0,045}$$

$$W(15) = 300 \cdot \frac{(1,045)^{15}-1}{0,045}$$

$$W(15) = W(0)(1+i)^{15}$$

Esercizio

n = 15 anni
R = 300€ posticipate
i = 4,5%



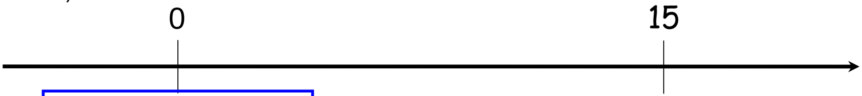
$$\boxed{W(0) = 300\,a_{\overline{15}|\,4,5\%}}$$

Esercizio

n = 15 anni

R = 300€ posticipate

i = 4,5%



$$\boxed{W(0) = 300 a_{\overline{15}|\,4,5\%}}$$

$$\boxed{W(0) = 300 \cdot \frac{1-(1,045)^{-15}}{0,045}}$$

Esercizio

n = 15 anni
R = 300€ posticipate
i = 4,5%

0 15

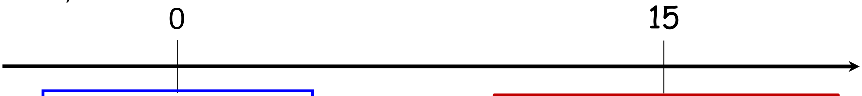
$$\boxed{W(0) = 300 a_{\overline{15|}\;4,5\%}}$$

$$\boxed{W(15) = 300 s_{15\neg 4,5\%}}$$

$$\boxed{W(0) = 300 \cdot \frac{1-(1,045)^{-15}}{0,045}}$$

Esercizio

n = 15 anni
R = 300€ posticipate
i = 4,5%



$$W(0) = 300 a_{\overline{15|}\,4,5\%}$$

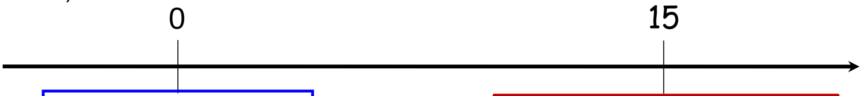
$$W(15) = 300 s_{\overline{15|}\,4,5\%}$$

$$W(0) = 300 \cdot \frac{1-(1,045)^{-15}}{0,045}$$

$$W(15) = 300 \cdot \frac{(1,045)^{15}-1}{0,045}$$

Esercizio

n = 15 anni
R = 300€ posticipate
i = 4,5%



$$\boxed{W(0) = 300 a_{\overline{15}|\,4,5\%}}$$

$$\boxed{W(15) = 300 s_{\overline{15}|4,5\%}}$$

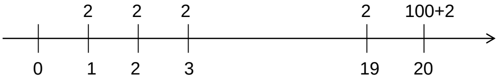
$$\boxed{W(0) = 300 \cdot \frac{1-(1,045)^{-15}}{0,045}}$$

$$\boxed{W(15) = 300 \cdot \frac{(1,045)^{15}-1}{0,045}}$$

$$\boxed{W(15) = W(0)(1+i)^{15}}$$

Esercizio

Consideriamo un BTP decennale con tasso nominale annuo del 4%, valore nominale 100€ e supponiamo che sul mercato sia in vigore un tasso annuo pari all’1.5%. Determinare il prezzo del titolo.



$$j = \frac{4\%}{2} = 2\%$$

$$i_{1/2} = (1 + 0.015)^{1/2} - 1 = 0.7472\%$$

$$V(x, 0) = 2a_{\overline{20}|0.007472} + 100(1 + 0.015)^{-10} = 2\,\frac{1 - (1 + 0.007472)^{-20}}{0.007472} + 100 \cdot 1.015^{-10}$$

$$= 37.03 + 86.17 = 123.19$$

Un BTP può essere visto come un portafoglio costituito da una rendita di rata uguale alla cedola e uno zero coupon bond con valore nominale uguale a quello del BTP.

ESERCIZIO

Il sig. Fabbri ha un nipote che tra un anno inizierà a frequentare un corso universitario di quattro anni. Desidera aprire un conto in banca, facendo oggi un singolo versamento la cui rendita contribuirà all'istruzione universitaria di suo nipote. Nelle intenzioni del sig. Fabbri, il nipote dovrebbe poter ritirare dal conto 1000€ ogni anno per 4 anni, cominciando tra un anno. Il saldo dovrebbe essere zero subito dopo l'ultimo prelevamento, tra quattro anni. Il conto su cui versa il denaro applica un tasso di interesse del 6%. Qual è l'importo che deve versare oggi il sig. Fabbri?

ESERCIZIO

Il sig. Rossi richiede un finanziamento di 12000€ per comprare una nuova auto. Il concessionario gli offre due opzioni per rimborsare il finanziamento:

a) Pagando rate mensili per 3 anni, iniziando un mese dopo l'acquisto, al tasso di interesse nominale annuo del 12% pagabile mensilmente;
b) Pagando rate mensili per 4 anni, iniziando un mese dopo l'acquisto, al tasso di interesse nominale annuo del 15% pagabile mensilmente.

Determiniamo per ciascuna delle due opzioni, l'importo della rata mensile e il totale pagato dal sig. Rossi per rimborsare il finanziamento.

Rappresentazione

$$\boxed{S = \{(R_k, t_k), k \epsilon \mathcal{N}, R_k > 0\}}$$

$R_k \longrightarrow$ rata

$t_k \longrightarrow$ scadenza

$t_0 \longrightarrow$ data di inizio

$t_1 \longrightarrow$ data di pagamento della prima rata

Classificazione

- *rendita periodica: periodo costante* $t_k - t_{k-1} = \tau$
- *rendita aperiodica in caso contrario*

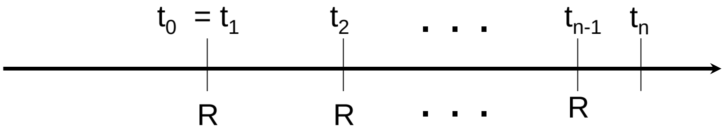
- *rendita anticipata* $t_1 = t_0$
- *rendita posticipata* $t_1 = t_0 + \tau$

- *rendita temporanea: le rate sono in numero finito*
- *rendita perpetua: durata infinita*

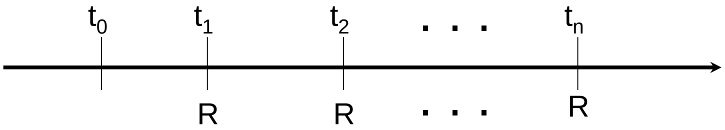
- *rendita immediata: la data di inizio coincide con l'istante contrattuale (t_0=0)*
- *rendita differita in caso contrario (t_0>0)*

Classificazione

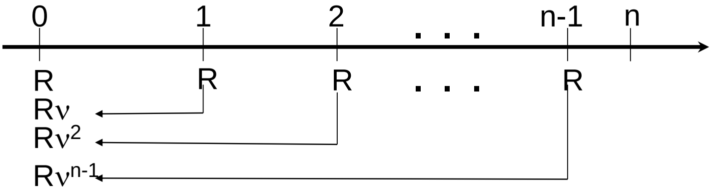
➢*rendita anticipata: $t_1 = t_0$*



➢*rendita posticipata: $t_1 = t_0+1$*



Rendita anticipata



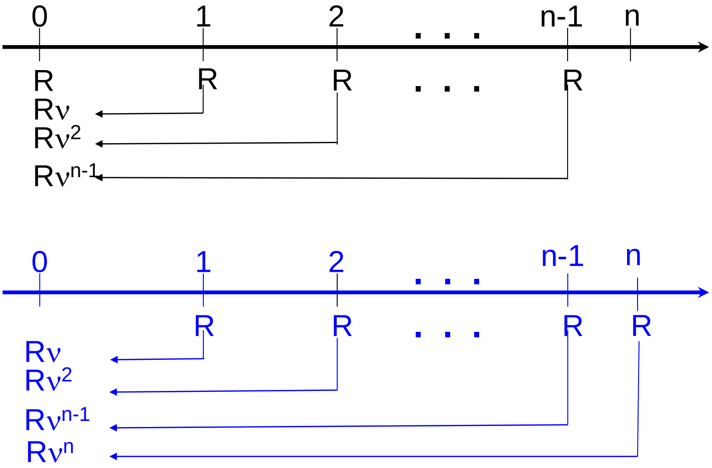
$$R + Rv + Rv^2 + \cdots + Rv^{n-1} =$$

$$R(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) =$$

$$R\frac{1 - v^n}{1 - v} = R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} = R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - \frac{1}{1+i}} = R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{1+i}}$$

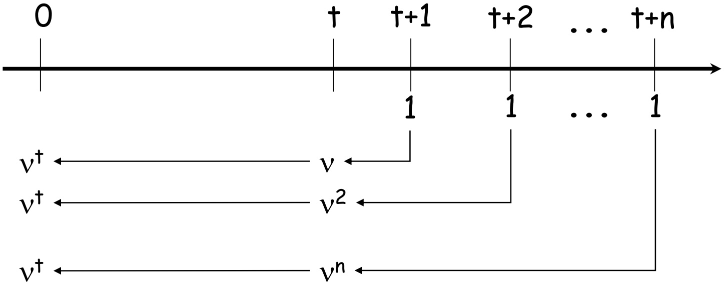
$$= R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{\frac{i}{1+i}} = R(1+i)\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R(1+i)a_{n\neg i}$$

Rendita anticipata



$W(0,r) = R(1+i)a_{n\neg i}$ $\ddot{a}_{n\neg i} = (1+i)a_{n\neg i}$

Rendita unitaria annua posticipata temporanea differita



$$W(0,r) = v^t(v + v^2 + \cdots + v^n) = v^t a_{n\neg i}$$

Rendita unitaria annua posticipata temporanea differita

0 t

$$\boxed{W(0) = v^t a_{\overline{n|}\,i}} \longleftarrow W(t) = a_{\overline{n|}\,i}$$

IMPORTANTE

Quando usiamo i simboli $a_{\overline{n|}i}$ e $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$ stiamo calcolando il valore della rendita alla data di inizio della rendita stessa!!!

$$W(t) = a_{\overline{n|}\,i}$$

Esercizio

n= 10 semestri
R = 100€
i = 4% annuo
Calcolare il valore al tempo t=5 anni.

$$i_{\frac{1}{2}} = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0{,}04)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}019804 = 1{,}9804\%$$

$$V = R\frac{(1+i_{\frac{1}{2}})^{10} - 1}{i_{1/2}} = R\frac{(1+(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1)^{10} - 1}{i_{1/2}} = R\frac{(1+i)^{5} - 1}{i_{1/2}} =$$

$$100\frac{(1+0.04)^{5} - 1}{0.019804} = 1093.99$$

Esercizio

i= 9,5% annuo
Rata semestrale corrisposta anticipatamente per 5 anni equivalente al pagamento di una rata annua posticipata di 1800 euro per 12 anni.

$$i_{\frac{1}{2}} = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0,095)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,046422 = 4,6422\%$$

$$W_1(0) = R\ddot{a}_{\overline{10}|0,046422} = R(1+0,046422)\frac{1-(1+0,046422)^{-10}}{0,046422}$$

$$W_1(0) = R \cdot 8,222439$$

$$W_1(0) = R \cdot 8{,}222439$$

$$W_2(0) = 1800 a_{\overline{12|}0{,}095} = 1800 \frac{1-(1+0{,}095)^{-12}}{0{,}095} = 12570{,}910917$$

$$R \cdot 8{,}222439 = 12570{,}910907 \Rightarrow R = \frac{12570{,}910917}{8{,}222439} \cong 1528{,}854263$$

$$R = 1528{,}85\,€$$

Rendite perpetue

Rendita unitaria annua immediata posticipata

$$a_{\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to+\infty} a_{\overline{n}|\,\mathrm{i}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

tasso posticipato

tasso anticipato

Rendita unitaria annua immediata anticipata

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}} = \frac{1}{v} a_{\overline{\infty}|\,i} = \frac{1}{vi} = \frac{1}{d}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}} = (1+i) a_{\overline{\infty}|\,i} = 1 + \frac{1}{i}$$

Per la rendita perpetua non è possibile formulare un’espressione per il montante

ESERCIZIO

Ad un tasso effettivo di interesse dell’8% su base annuale, un deposito di 10.000€ genererà un interesse pasi a 800€ dopo un anno. Se dal conto di «preleva» tale interesse, ma si lascia per un altro anno il capitale di 10.000€, quest’ultimo genererà un altro accredito di 800€ al termine del secondo anno. Ciò può andare avanti all’infinito, purché l’unico prelevamento alla fine dell’anno sia quello dell’interesse generato per quell’anno. Da un altro punto di vista si può dire che 10.000€ è il valore attuale al tasso di interesse dell’8% delle rate di importo 800€ pagate alla fine di ogni anno, tutti gli anni.

Problemi inversi: calcolo del numero di rate

$$W(0) = Ra_{n\neg i} = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{W(0)}{R} \;\Rightarrow\; 1-(1+i)^{-n} = i\,\frac{W(0)}{R}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - i\,\frac{W(0)}{R} \;\Rightarrow\; ln(1+i)^{-n} = ln\left(1 - i\,\frac{W(0)}{R}\right)$$

$$\Rightarrow\; -n\ln(1+i) = ln\left(1 - i\,\frac{W(0)}{R}\right)$$

$$\Rightarrow\; n = -\frac{ln\left(1 - i\,\frac{W(0)}{R}\right)}{\ln(1+i)}$$

Risolvendo rispetto all'incognita tempo si ottiene di solito un valore non intero di n. La sua parte intera sarà il numero di pagamenti periodici interi richiesti; ci sarà poi una frazione di pagamento necessaria per il completamento della rendita. Questa frazione di pagamento può essere versata alla data dell'ultimo pagamento intero oppure un periodo dopo.

ESERCIZIO

Il sig. Rossi vuole ottenere un montante pari a 1000€ per mezzo di depositi semestrali al tasso annuo nominale di interesse i(2)=8% pagabile semestralmente.

a) Supponiamo che i depositi regolari siano di 50 euro ciascuno. Troviamo il numero di depositi necessari e l'importo del deposito frazionario aggiuntivo in ciascuno de seguenti due casi:
   1) Il deposito addizionale viene effettuato insieme all'ultimo versamento regolare;
   2) Il deposito addizionale viene effettuato sei mesi dopo l'ultimo deposito regolare.

b) Ripetiamo il problema nel caso in cui i depositi regolari siano di 25€ l'uno.

Table of Contents

Operazioni eque

Se è:

$$W(t; \mathbf{x}) = 0$$

l'operazione finanziaria $\mathbf{x}$ si dice *equa*, al tempo t, conformemente alla legge esponenziale adottata. L'equità caratterizza quindi un'operazione di scambio "in equilibrio", nella quale il valore delle somme incassate è uguale al valore delle somme pagate.

Affinchè l'operazione $\mathbf{x}$ sia equa è necessario che almeno uno degli importi componenti x_k abbia segno diverso dagli altri.

Proprietà funzionali della legge esponenziale

Proprietà invariantiva

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante t secondo una assegnata legge esponenziale, lo è in qualsiasi altro istante.

Proprietà additiva

Se due operazioni finanziarie sono eque in un medesimo istante, conformemente a una stessa legge esponenziale, anche l'operazione finanziaria somma è equa allo stesso istante, secondo la stessa legge esponenziale.

Proprietà di uniformità nel tempo

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante t secondo una assegnata legge esponenziale, l'operazione avente tutte le scadenze traslate di un intervallo di lunghezza τ è equa nell'istante $t + \tau$ conformemente alla stessa legge.

Scomposizione di operazioni finanziarie

L'operazione finanziaria:

$$\mathbf{z}/\mathbf{t} = \{100, -105, 1100, -1155\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

è equa conformemente alla legge esponenziale con tasso annuo di interesse $i = 5\%$. Può essere scomposta nell'operazione attiva:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{100, 0, 1100, 0\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

e nell'operazione passiva:

$$\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{0, -105, 0, -1155\}/\{1, 2, 3, 4\}.$$

Sempre in base alla stessa legge esponenziale, risulta:

$$W(0; \mathbf{x}) = 95.2381 + 950.2214 = 1045.4595,$$

e:

$$W(0; \mathbf{y}) = -95.2381 - 950.2214 = -1045.4595.$$

Scomposizione di operazioni finanziarie

Un'altra scomposizione significativa si ottiene separando le somme esigibili in date precedenti un certo istante $t \geq 0$ assegnato, da quelle pagabili in date successive, esprimendo cioè il valore in t di $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ nella forma:

$$W(t;\mathbf{x}) = M(t;\mathbf{x}) + V(t;\mathbf{x}) \, ,$$

dove:

$$M(t;\mathbf{x}) := \sum_{k:t_k \leq t} x_k \, e^{\delta\,(t-t_k)} \, ,$$

definisce il *montante* dell'operazione al tempo t, e:

$$V(t;\mathbf{x}) := \sum_{k:t_k > t} x_k \, e^{-\delta\,(t_k-t)} \, ,$$

è il corrispondente *valore residuo*.

Se l'operazione $\mathbf{x}$ è equa (in un qualsiasi istante t), sarà $W(t;\mathbf{x}) = 0$ e quindi dovrà essere, per ogni t:

$$M(t;\mathbf{x}) = -V(t;\mathbf{x}) \,.$$

Esempio

Calcolare il valore residuo del contratto

$$x/t = \{-85, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 93\}/\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

nell'istante $\bar{t} = 0.75$ anni in base alla legge esponenziale individuata da I/C.

Risulta:

$$\frac{I}{C} = \frac{8}{85} = 9.41176\%$$

il tasso interno di rendimento su base annua risulta:

$$i = \left(1 + \frac{I}{C}\right)^2 - 1 = 19.70934\%$$

Il valore di un contratto finanziario in un qualsiasi istante di tempo $\bar{t}$ con $t_0 < \bar{t} < t_m$ puó essere scomposto nella somma del montante delle poste scadute fino a $\bar{t}$, $M(\bar{t}, x)$, e del valore del flusso residuo delle poste con scadenza dopo $\bar{t}$, $V(\bar{t}, x)$ si ha:

$$W(\bar{t}; x) = M(\bar{t}; x) + V(\bar{t}; x) = \sum_{k:t_k \leq \bar{t}} x_k m(t_k, \bar{t}) + \sum_{k:t_k > \bar{t}} x_k v(\bar{t}, t_k)$$

essendo l'operazione finanziaria equa secondo la legge esponenziale individuata da i, $W(\bar{t}; x) = 0$, risulta:

$$M(\bar{t}; x) = -V(\bar{t}; x)$$

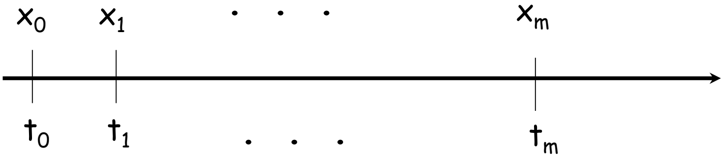
e quindi si ottiene:

$$V(0.75; x) = -\left[-85(1+i)^{0.75} + 8(1+i)^{(0.75-0.5)}\right] = 88.91007$$

Il Tasso Interno di Rendimento (TIR)

Definizione

Data l’operazione finanziaria $\underline{x}/\underline{t}$:

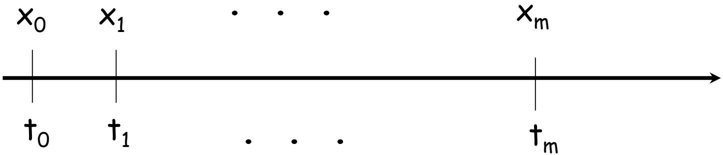


L’operazione è equa se:

$$x_0 + \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-(t_k - t_o)} = 0$$

Definizione

Data l'operazione finanziaria $\underline{x}/\underline{t}$:



Tasso Interno di Rendimento (TIR): tasso di interesse della legge esponenziale conformemente alla quale l'operazione risulta equa.

Il TIR è soluzione dell'equazione:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-(t_k - t_o)} = 0$$

Semplifichiamo

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-(t_k - t_0)} = 0$$

Poniamo $t_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-t_k} = 0$$

Se assumiamo pagamenti periodici (ad esempio, annuali) $t_k = k$

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-k} = 0$$

Semplificazioni

sostituiamo v = 1/(1+i)

$$(1+i^*)^{-k} = v^k$$

abbiamo l'equazione algebrica di grado m nell'incognita v:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-k} = \sum_{k=0}^{m} x_k v^k = 0$$

Significatività

La soluzione che cerchiamo rappresenta un fattore di sconto. Affinché la soluzione dell'eq. del T.I.R. abbia significato finanziario deve risultare $0 < v < 1$ cioè:

- la soluzione dell'equazione deve essere unica;
- la soluzione deve essere un numero reale positivo;
- la soluzione deve essere minore di 1.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia:

$$p_m(v) = \sum_{k=0}^{m} x_k v^k$$

r_i, i=1,…,h: radici del polinomio $p_m(v)$, in generale numeri complessi
n_i: molteplicità di r_i

Si ha che:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k v^k = x_m (v - r_1)^{n_1} (v - r_2)^{n_2} \ldots (v - r_h)^{n_h}$$

$$n_1 + n_2 \cdots + n_h = m$$

Esistenza e unicità

Teorema di Cartesio

Sia N il numero delle variazioni nella successione dei segni dei coefficienti di $p_m(v)$, e sia h il numero delle sue radici positive. Allora N − h è un numero pari positivo o nullo.

N=0 ➔ h=0: non esistono radici positive
N=1 ➔ h=1: esiste una sola radice positiva

Corollario

Condizione sufficiente affinché l'equazione $p_m(v)=0$ ammetta un'unica soluzione positiva è che gli importi del flusso $\underline{x}$ cambino segno una sola volta.

Significatività finanziaria

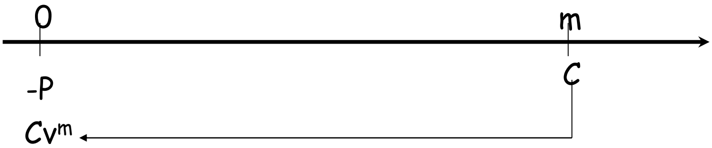
$$v = \frac{1}{1+i} \qquad\qquad i = \frac{1}{v} - 1$$

Il corollario al teorema di Cartesio garantisce che la soluzione sia unica e che sia un un numero reale positivo.

Vediamo quali sono le condizione che assicurano che sia v<1

TIR di un titolo a cedola nulla

P: prezzo di acquisto
C: valore facciale
m: scadenza

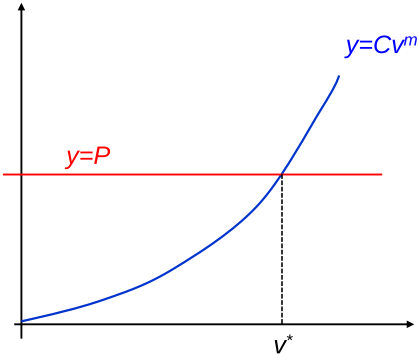


$$\sum_{k=0}^{m} x_k v^k = 0 \Leftrightarrow -P + C v^m = 0$$

TIR di un titolo a cedola nulla

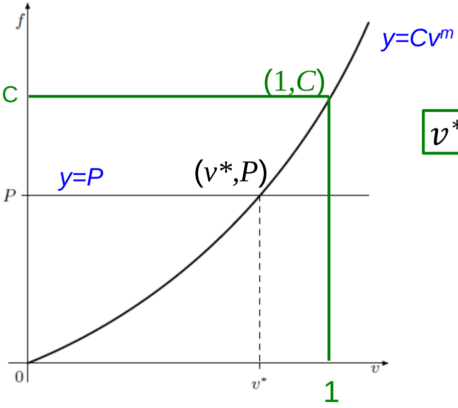
$$f(v) = -P + Cv^m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = P \\ y = Cv^m \end{cases}$$

Graficamente:



Significatività finanziaria

$$i^* > 0 \Leftrightarrow 0 < v^* < 1$$



$$\boxed{v^* < 1 \Leftrightarrow P < C}$$

TIR di un'operazione di investimento

Acquisto in 0 al prezzo P di un flusso <u>x</u> di m pagamenti:

$$P = \sum_{k=1}^{m} x_k v^k$$

$$f(v) = \sum_{k=1}^{m} x_k v^k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m} x_k v^k = 0 \Leftrightarrow f(v) = P$$

TIR di un'operazione di investimento

$$f(v) = x_1 v + x_2 v^2 + \cdots + x_m v^m$$

Derivando:

$$f'(v) = \underbrace{x_1}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2 v}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{m x_m v^{m-1}}_{>0} \Rightarrow$$

f monotona strettamente crescente

Derivando ancora:

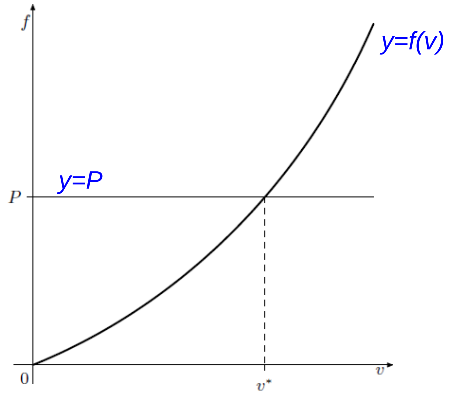
$$f''(v) = \underbrace{2x_2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{m(m-1)x_m v^{m-2}}_{>0} \Rightarrow$$

f strettamente convessa

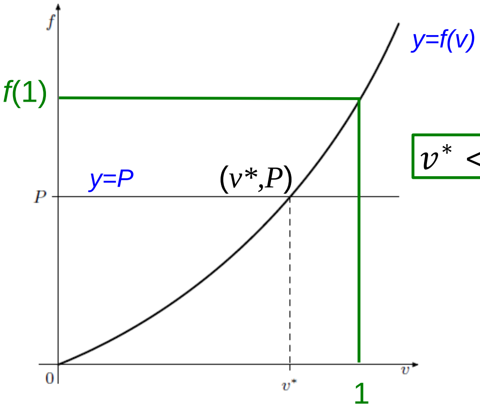
TIR di un'operazione di investimento

$$f(v) = P \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(v) \\ y = P \end{cases}$$

Graficamente:



Significatività finanziaria



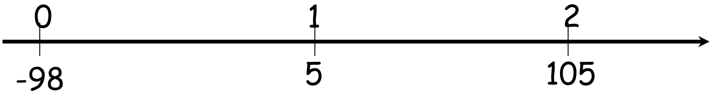
$$\boxed{v^* < 1 \iff P < f(1)}$$

$$f(v) = x_1 v + x_2 v^2 + \cdots + x_m v^m \qquad f(1) = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$$

<u>La somma degli incassi futuri deve essere maggiore del prezzo di acquisto</u>

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo P=98 del coupon bond con valore facciale C=100, durata m=2 anni, cedola annua I=5 euro.



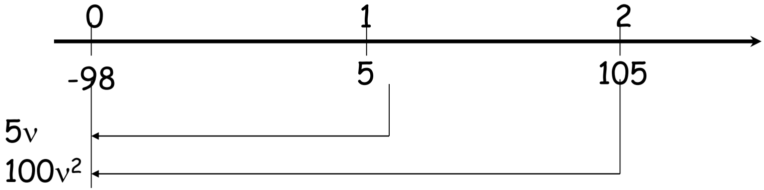
$$\boxed{P < C + 2I}$$

$$\boxed{98 < 100 + 2 \cdot 5 = 110}$$

$\Rightarrow$ esistenza e unicità del tir

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo P=98 del coupon bond con valore facciale C=100, durata m=2 anni, cedola I=5 euro.



$$-98 + 5v + 105v^2 = 0 \Leftrightarrow 105v^2 + 5v - 98 = 0$$

Esempio

$$\boxed{105v^2 + 5v - 98 = 0}$$

$v_1 \cong -0.990195$ ⇒ non significativa dal punto di vista finanziario

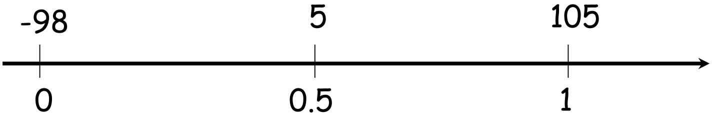
$v_2 \cong 0.942576$ ⇒ $\boldsymbol{v^* = v_2}$

⇓

$$\boldsymbol{i^* = \frac{1}{v^*} - 1 \cong 0.060923 = 6.0923\%}$$

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo P=98 del coupon bond con valore facciale C=100, che paga cedole di importo I=5 euro alla date t_1=0.5 e t_2=1, essendo il tempo espresso in anni.



Equazione del TIR:

$$-98 + 5v^{1/2} + 105v^{1} = 0$$

Esempio

$$-98 + 5v^{1/2} + 105v^{1} = 0$$

Poniamo:

$$x = v^{1/2} \qquad \Longrightarrow v = x^2$$

Con la sostituzione:

$$-98 + 5x + 105x^2 = 0$$

$$\boxed{105x^2 + 5x - 98 = 0}$$

Esempio

Risolvendo l'equazione otteniamo:

$$x^* \cong 0.94257561$$ su base semestrale

$$i^* = \frac{1}{x^*} - 1 \cong 0.060922847 = 6.09285\%$$

su base semestrale

Il TIR su base annua è:

$$\boldsymbol{i_a^* = (1 + i^*)^2 - 1 \cong 0.125557 = 12.5557\%}$$

Progressione geometrica

Una relazione algebrica fondamentale usata per valutare una rendita è la formula per il calcolo della somma di una successione geometrica finita.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

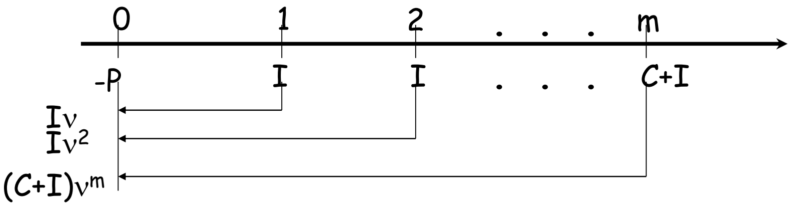
x: ragione della progressione

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^2 + \cdots + x^n = x(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = x\,\frac{1 - x^n}{1 - x}$$

TIR di un titolo a cedola fissa

Acquisto in 0 al prezzo P di un titolo a cedola fissa I, di durata m e valore facciale C:



Equazione del TIR:

$$-P + \sum_{k=1}^{m} I v^k + C v^m = 0$$

TIR di un titolo a cedola fissa

$$-P + \sum_{k=1}^{m} I v^k + C v^m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-P + I v \frac{1 - v^m}{1 - v} + C v^m = 0$$

$$\Rightarrow I v \frac{1 - v^m}{1 - v} = P - C v^m$$

TIR di un titolo a cedola fissa

a) P<C:

$$\boxed{P < C \Rightarrow P < C + mI}$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = P - Cv^m < C - Cv^m = C(1-v^m)$$

$$\Downarrow$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} < C(1-v^m) \Rightarrow I\frac{v}{1-v} < C \Rightarrow \frac{I}{C}\frac{v}{1-v} < 1$$

$$\boxed{\frac{v}{1-v} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{i}}$$

$$\frac{I}{C}\frac{1}{i^*} < 1 \Rightarrow i^* > \frac{I}{C}$$

Se P<C il T.I.R. è maggiore del tasso cedolare

TIR di un titolo a cedola fissa

b) P=C:

$$\boxed{P = C \;\; e \;\; C < C + mI \Rightarrow P < C + mI}$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = P - Cv^m = C - Cv^m = C(1-v^m)$$

$$\Downarrow$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = C(1-v^m) \Rightarrow \quad I\frac{v}{1-v} = C$$

$$\Rightarrow \frac{I}{C}\cdot\frac{1}{i^*} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{i^* = \frac{I}{C}}$$

Se P=C il T.I.R. è uguale
al tasso cedolare

TIR di un titolo a cedola fissa

c) P>C:

$$\boxed{P < C + mI}$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = P - Cv^m > C - Cv^m = C(1-v^m)$$

$$\Downarrow$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} > C(1-v^m) \quad \Rightarrow I\frac{v}{1-v} > C$$

$$\Rightarrow \frac{I}{C}\cdot\frac{1}{i^*} > 1 \Rightarrow \boldsymbol{i^* < \frac{I}{C}}$$

Se P>C il T.I.R. è minore
del tasso cedolare

Table of Contents

Ammortamento di un debito

Classificazione

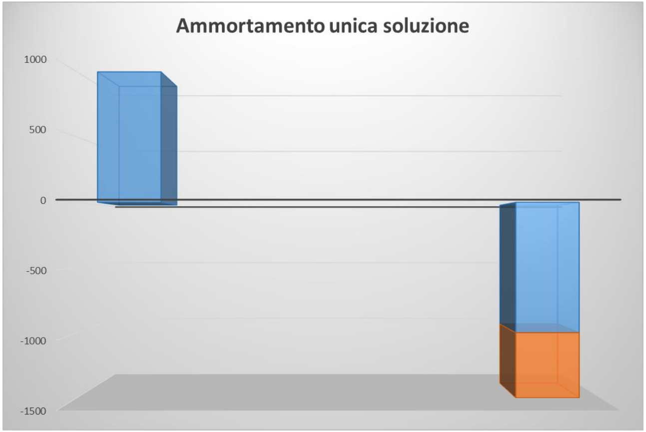
Classificazione in base ai tempi di corresponsione degli interessi dovuti sul debito e del debito medesimo

1. Ammortamento in un’unica soluzione (BOT, CTZ, ZCB)
2. Ammortamento a redditi staccati (BTP- emessi alla pari)
3. Ammortamento graduale (Usuali mutui a medio termine per il credito industriale ed il credito immobiliare, contratti di vendita rateale e di leasing)

Ammortamento in un'unica soluzione

Il debitore rimborsa alla fine della durata del prestito il montante del debito.

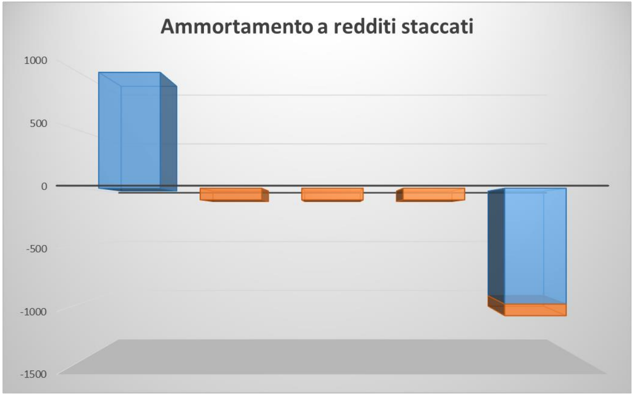
L'operazione finanziaria è un'operazione finanziaria semplice:



Ammortamento a redditi staccati

Il debitore paga periodo per periodo i soli interessi di competenza ed alla scadenza finale del contratto rimborsa l'intero debito unitamente agli interessi di competenza dell'ultimo periodo.

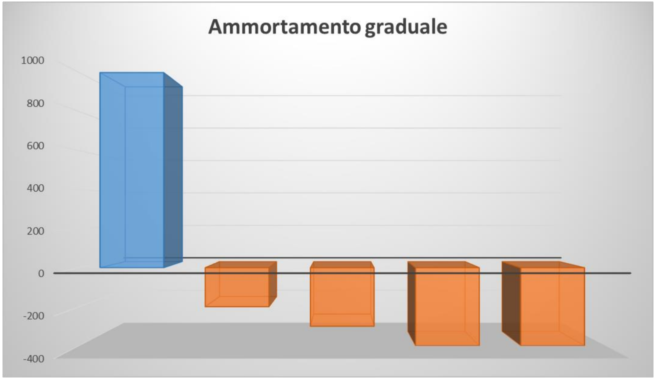
L'operazione finanziaria risulta:



Ammortamento graduale

Il debitore rimborsa gradualmente il debito attraverso il pagamento di *rate* periodiche che, oltre agli interessi dovuti sul debito in essere nei singoli periodi, le *quote di interesse,* comprendono le quote di debito rimborsate, dette *quote di capitale*.

L'operazione finanziaria risulta ad esempio:



Ammortamento graduale

La legge finanziaria sottostante è normalmente ad interessi composti

I versamenti delle rate normalmente avvengono ad intervalli regolari uniformi, detti *periodi*, ed il tasso di interesse ha come unità di tempo di riferimento tale periodo.

Colui che presta il capitale è chiamato mutuante o creditore.

Colui che riceve il prestito è chiamato mutuatario o debitore. Il debitore si impegna a restituire entro una data prestabilita il capitale e durante il prestito paga l’interesse sulla somma in suo possesso.

La durata del prestito è il tempo intercorrente tra la data di cessione del capitale mutuato e la data del rimborso.

Ammortamento graduale

Il debitore può porsi una delle due domande seguenti:

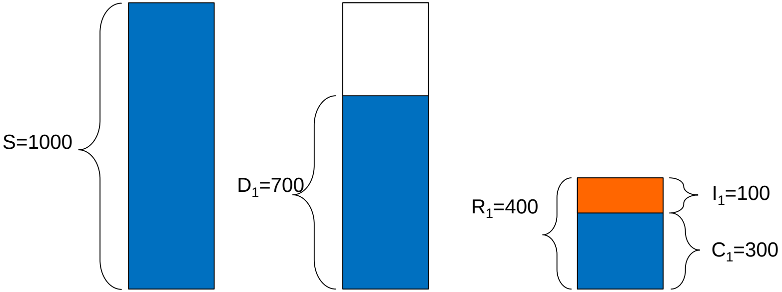
1. Ha contratto un debito di 1000 al tasso di interesse del 10% annuo; volendo ridurlo a 700 dopo un anno, quanto deve versare?

2. Ha contratto un debito di 1000 al tasso di interesse del 10% annuo; versando dopo un anno 500, a quanto ammonta il debito dopo tale versamento?

Ammortamento graduale

1. **Ha contratto un debito di 1000 al tasso di interesse del 10% annuo; volendo ridurlo a 700 dopo un anno, quanto deve versare?**

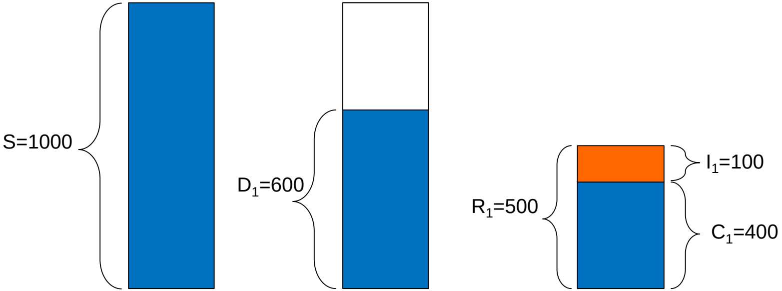
   Il debitore deve versare il 10% di 1000€ a titolo di ***quota di interesse***.
   Inoltre versa 300€=1000-700 per ridurre il debito, a titolo di ***quota di capitale.***
   La ***rata*** complessivamente versata è pari a 400 (400=300+100).



Ammortamento graduale

2. **Ha contratto un debito di 1000 al tasso di interesse del 10% annuo; versando dopo un anno 500, a quanto ammonta il debito dopo tale versamento?**

La ***rata*** è pari a 500,
100€ sono versati a titolo di ***quota di interesse***
400€=500-100 possono essere considerate a titolo di ***quota di capitale***



Ammortamento

Consideriamo dunque un prestito di ammontare S, di durata n anni. Ad ogni scadenza k=1,...,n il debitore corrisponde al creditore una rata o annualità R_k.

Ciascuna rata R_k è decomposta nella somma di due termini:

$$R_k = C_k + I_k \quad k=1,\dots,n$$

Quota capitale: restituzione di una frazione del capitale

Quota interesse: corresponsione dell'interesse maturato sul debito

Piano di ammortamento

E' il documento a supporto del contratto stipulato fra le controparti.

Gli aggiornamenti della situazione debitoria alla fine di ogni periodo sono regolati dalle *relazioni di ricorrenza*.

Le relazioni di ricorrenza sono le equazioni che permettono di calcolare tutte le variabili del piano di ammortamento del periodo k, una volta determinate tutte le variabili del periodo k-1

Variabili del piano

- **Rata**
  - **Quello che ogni mese il debitore paga**
  - Quota capitale + quota interessi
- **Quota Capitale**
  - **Rimborsa il prestito iniziale**
  - La somma di tutte le quote capitale = prestito iniziale
- **Quota interessi**
  - **Interessi su quello che rimane da pagare**
  - Si pagano su debito residuo
- **Debito residuo**
  - **Quello che ancora deve essere rimborsato**
  - Si sottrae la quota capitale pagata
- **Debito estinto**
  - **Quello che è stato pagato fino ad ora**
  - Si somma la quota capitale pagata

Variabili del piano

- **S** **importo del debito, in valore assoluto**
- **i** **tasso di interesse del periodo**
- **n** **numero delle rate**
- **R_k** **rata da versare alla fine del periodo k**
- **C_k** **quota di capitale del periodo k**
- **I_k** **quota di interesse del periodo k**
- **E_k** **debito estinto alla fine del periodo k**
- **D_k** **debito residuo alla fine del periodo k**

Scadenze	Debito residuo	Quota capitale	Quota interesse	Rata	Debito estinto
0					
1					
…					
n					

Variabili del piano

- **S** **importo del debito, in valore assoluto**
- **i** **tasso di interesse del periodo**
- **n** **numero delle rate**
- **R_k** **rata da versare alla fine del periodo k** $R_k = C_k + I_k$
- **C_k** **quota di capitale del periodo k**
- **I_k** **quota di interesse del periodo k**
- **E_k** **debito estinto alla fine del periodo k**
- **D_k** **debito residuo alla fine del periodo k**

Scadenze	Debito residuo	Quota capitale	Quota interesse	Rata	Debito estinto
0					
1					
…					
n					

Variabili del piano

- **S** **importo del debito, in valore assoluto**
- **i** **tasso di interesse del periodo**
- **n** **numero delle rate**
- **R_k** **rata da versare alla fine del periodo k** $R_k = C_k + I_k$
- **C_k** **quota di capitale del periodo k** $C_k = R_k - I_k$ o $C_k = D_{k-1} - D_k$
- **I_k** **quota di interesse del periodo k**
- **E_k** **debito estinto alla fine del periodo k**
- **D_k** **debito residuo alla fine del periodo k**

Scadenze	Debito residuo	Quota capitale	Quota interesse	Rata	Debito estinto
0					
1					
…					
n					

Variabili del piano

- **S** **importo del debito, in valore assoluto**
- **i** **tasso di interesse del periodo**
- **n** **numero delle rate**
- **R_k** **rata da versare alla fine del periodo k** $R_k = C_k + I_k$
- **C_k** **quota di capitale del periodo k** $C_k = R_k - I_k$ **o** $C_k = D_{k-1} - D_k$
- **I_k** **quota di interesse del periodo k** $I_k = R_k - C_k$ **o** $I_k = i \cdot D_{k-1}$
- **E_k** **debito estinto alla fine del periodo k**
- **D_k** **debito residuo alla fine del periodo k**

Scadenze	Debito residuo	Quota capitale	Quota interesse	Rata	Debito estinto
0					
1					
…					
n					

Variabili del piano

- **S** **importo del debito, in valore assoluto**
- **i** **tasso di interesse del periodo**
- **n** **numero delle rate**
- **R_k** **rata da versare alla fine del periodo k** $R_k = C_k + I_k$
- **C_k** **quota di capitale del periodo k** $C_k = R_k - I_k$ **o** $C_k = D_{k-1} - D_k$
- **I_k** **quota di interesse del periodo k** $I_k = R_k - C_k$ **o** $I_k = i \cdot D_{k-1}$
- **E_k** **debito estinto alla fine del periodo k** $E_k = E_{k-1} + C_k$
- **D_k** **debito residuo alla fine del periodo k**

Scadenze	Debito residuo	Quota capitale	Quota interesse	Rata	Debito estinto
0					
1					
…					
n					

Variabili del piano

- **S** **importo del debito, in valore assoluto**
- **i** **tasso di interesse del periodo**
- **n** **numero delle rate**
- **R_k** **rata da versare alla fine del periodo k** $R_k = C_k + I_k$
- **C_k** **quota di capitale del periodo k** $C_k = R_k - I_k$ **o** $C_k = D_{k-1} - D_k$
- **I_k** **quota di interesse del periodo k** $I_k = R_k - C_k$ **o** $I_k = i \cdot D_{k-1}$
- **E_k** **debito estinto alla fine del periodo k** $E_k = E_{k-1} + C_k$
- **D_k** **debito residuo alla fine del periodo k** $D_k = D_{k-1} - C_k$

Scadenze	Debito residuo	Quota capitale	Quota interesse	Rata	Debito estinto
0					
1					
…					
n					

Classificazione in base all'impostazione usata

La condizione di chiusura consiste in una condizione che permetta stabilire se il conto è *chiuso*, ossia il debito è estinto

1. ***Impostazione elementare*, con condizione di chiusura elementare**

2. ***Impostazione finanziaria,* con condizione di chiusura finanziaria iniziale e finale**

Impostazione elementare

Le variabili di controllo per definire la chiusura del debito sono le *quote di capitale C_k*

***Condizione di chiusura elementare*:**

$$\boldsymbol{C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k = S}$$

LA SOMMA DI TUTTE LE QUOTE CAPITALE DEVE ESSERE UGUALE AL DEBITO INIZIALE

***Condizioni iniziali*: $D_0 = S$, $E_0 = 0$, *condizioni finali*: $D_n = 0$, $E_n = S$**

La somma di tutte le quote capitale ancora da pagare deve essere uguale al debito residuo.

Impostazione elementare

Esempio:
$S = 1000$ $n = 3$ $i = 10\%$
$C_1 = 300$ $C_2 = 400$ $C_3 = 300$

La condizione di chiusura elementare è verificata:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 300 + 400 + 300 = 1000 = S$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1		300			
2		400			
3		300			

Impostazione elementare

Esempio:
$S = 1000$ $n = 3$ $i = 10\%$
$C_1 = 300$ $C_2 = 400$ $C_3 = 300$

$$k = 1 \left\{ \begin{array}{l} I_1 = i\,D_0 = 0.10 * 1000 = 100 \\ R_1 = C_1 + I_1 = 300 + 100 = 400 \\ E_1 = E_0 + C_1 = 0 + 300 = 300 \\ D_1 = D_0 - C_1 = 1000 - 300 = 700 \end{array} \right.$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	700	300	100	400	300
2		400			
3		300			

Impostazione elementare

Esempio:
$S = 1000$ $n = 3$ $i = 10\%$
$C_1 = 300$ $C_2 = 400$ $C_3 = 300$

$$k = 2 \begin{cases} I_2 = i\, D_1 = 0.10 * 700 = 70 \\ R_2 = C_2 + I_2 = 400 + 70 = 470 \\ E_2 = E_1 + C_2 = 300 + 400 = 700 \\ D_2 = D_1 - C_2 = 700 - 400 = 300 \end{cases}$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	700	300	100	400	300
2	300	400	70	470	700
3		300			

Impostazione elementare

Esempio:
$S = 1000$ $n = 3$ $i = 10\%$
$C_1 = 300$ $C_2 = 400$ $C_3 = 300$

$$k = 3 \quad \begin{cases} I_3 = i\, D_2 = 0.10 * 300 = 30 \\ R_3 = C_3 + I_3 = 300 + 30 = 330 \\ E_3 = E_2 + C_3 = 700 + 300 = 1000 \\ D_3 = D_2 - C_3 = 300 - 300 = 0 \end{cases}$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	700	300	100	400	300
2	300	400	70	470	700
3	0	300	30	330	1000

Impostazione finanziaria

Le variabili di controllo per definire la chiusura del debito sono le *rate* R_k.

***Condizione di chiusura finanziaria*:**

$$\boldsymbol{R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + \cdots + R_n(1+i)^{-n} = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-k} = S}$$

LA SOMMA DEI VALORI ATTUALI DI TUTTE LE RATE DEVE ESSERE UGUALE AL DEBITO INIZIALE

***Condizioni iniziali*: $D_0 = S$, $E_0 = 0$, *condizioni finali*: $D_n = 0$, $E_n = S$**

La somma dei valori attuali delle rate ancora da pagare deve essere uguale al debito residuo.

Impostazione finanziaria

Esempio:
$S = 1000$ $n = 4$ $i = 10\%$
$R_1 = 300$ $R_2 = 250$ $R_3 = 350$ $R_4 = 377.3$

La condizione di chiusura finanziaria è verificata:

$$\frac{300}{1.1}+\frac{250}{1.1^2}+\frac{350}{1.1^3}+\frac{377.3}{1.1^4}=272.73+206.61+262.96+257.70=1000$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1				300	
2				250	
3				350	
4				377.3	

Impostazione finanziaria

Esempio:
$S = 1000$ $n = 4$ $i = 10\%$
$R_1 = 300$ $R_2 = 250$ $R_3 = 350$ $R_4 = 377.3$

$$k = 1 \left\{ \begin{array}{l} I_1 = i\,D_0 = 0.10 * 1000 = 100 \\ C_1 = R_1 - I_1 = 300 - 100 = 200 \\ E_1 = E_0 + C_1 = 0 + 200 = 200 \\ D_1 = D_0 - C_1 = 1000 - 200 = 800 \end{array} \right.$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	800	200	100	300	200
2				250	
3				350	
4				377.30	

Impostazione finanziaria

Esempio:
$S = 1000$ $n = 4$ $i = 10\%$
$R_1 = 300$ $R_2 = 250$ $R_3 = 350$ $R_4 = 377.3$

$$k = 2 \quad \begin{cases} I_2 = i\, D_1 = 0.10 * 800 = 80 \\ C_2 = R_2 - I_2 = 250 - 80 = 170 \\ E_2 = E_1 + C_2 = 200 + 170 = 370 \\ D_2 = D_1 - C_2 = 800 - 170 = 630 \end{cases}$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	800	200	100	300	200
2	630	170	80	250	370
3				350	
4				377.30	

Impostazione finanziaria

Esempio:
$S = 1000$ $n = 4$ $i = 10\%$
$R_1 = 300$ $R_2 = 250$ $R_3 = 350$ $R_4 = 377.3$

$$k = 3 \begin{cases} I_3 = i\, D_2 = 0.10 * 630 = 63 \\ C_3 = R_3 - I_3 = 350 - 63 = 287 \\ E_3 = E_2 + C_3 = 370 + 287 = 657 \\ D_3 = D_2 - C_3 = 630 - 287 = 343 \end{cases}$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	800	200	100	300	200
2	630	170	80	250	370
3	343	287	63	350	657
4				377.30	

Impostazione finanziaria

Esempio:
$S = 1000$ $n = 4$ $i = 10\%$
$R_1 = 300$ $R_2 = 250$ $R_3 = 350$ $R_4 = 377.3$

$$k = 4 \begin{cases} I_4 = i\,D_3 = 0.10 * 343 = 34.3 \\ C_4 = R_4 - I_4 = 377.3 - 34.3 = 343 \\ E_4 = E_3 + C_4 = 657 + 343 = 1000 \\ D_4 = D_3 - C_4 = 343 - 343 = 0 \end{cases}$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	1000				
1	800	200	100	300	200
2	630	170	80	250	370
3	343	287	63	350	657
4	0	343	34.30	377.30	1000

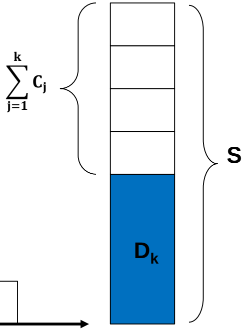
Il debito residuo

In termini di quota capitale:

Forma retrospettiva

$$\boxed{D_k = S - \sum_{j=1}^{k} C_j}$$

Il debito residuo al tempo k è la differenza tra il debito iniziale e la somma delle quote capitale già pagate.



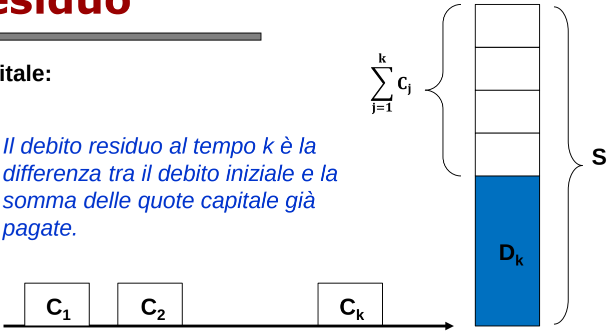
Il debito residuo

In termini di quota capitale:

Forma retrospettiva

$$\boxed{D_k = S - \sum_{j=1}^{k} C_j}$$

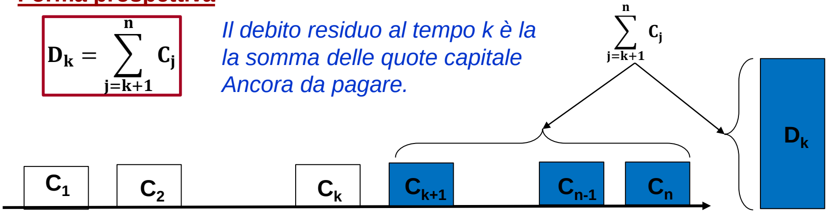
Il debito residuo al tempo k è la differenza tra il debito iniziale e la somma delle quote capitale già pagate.



Forma prospettiva

$$\boxed{D_k = \sum_{j=k+1}^{n} C_j}$$

Il debito residuo al tempo k è la la somma delle quote capitale Ancora da pagare.

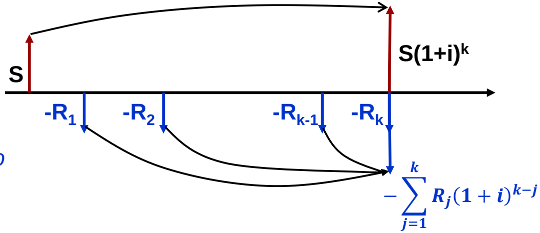


Il debito residuo

In termini di rate:

<u>**Forma retrospettiva**</u>

$$\boxed{D_k = S(1+i)^k - \sum_{j=1}^{k} R_j (1+i)^{k-j}}$$



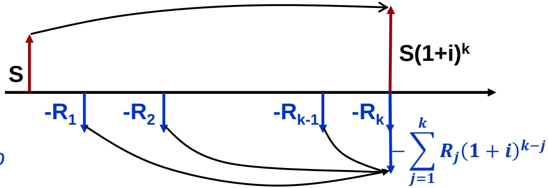
Il debito residuo al tempo k è la differenza tra il montante del debito iniziale al tempo k e la somma dei montanti delle rate già pagate.

Il debito residuo

In termini di rate:

Forma retrospettiva

$$D_k = S(1+i)^k - \sum_{j=1}^{k} R_j(1+i)^{k-j}$$

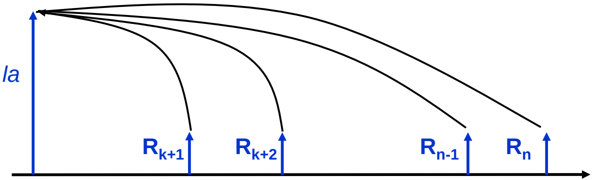


Il debito residuo al tempo k è la differenza tra il montante del debito iniziale al tempo k e la somma dei montanti delle rate già pagate.

Forma prospettiva

$$D_k = \sum_{j=k+1}^{n} R_j(1+i)^{k-j}$$

Il debito residuo al tempo k è la somma dei valori attuali delle Rate ancora da pagare.



Piani di ammortamento

Ammortamento immediato ⇒ **decorre da subito**

Ammortamento differito ⇒ **il primo pagamento è dovuto solo dopo t anni dall'istante iniziale del prestito**

L'ammontare da ammortizzare sarà il montante accumulato all'istante in cui hanno inizio i pagamenti

La rata di preammortamento

Quasi tutti i piani di ammortamento sono caratterizzati da un limitato periodo iniziale in cui si rimborsano gli interessi ma non il capitale, detto per questo preammortamento.

La ragion d'essere del preammortamento è attribuire scadenze canoniche al pagamento delle rate.

ESEMPIO: ***stipulando un contratto di mutuo il giorno 12 del mese di giugno, se non venisse applicato un periodo di preammortamento tutte le rate scadrebbero il giorno 12 dei mesi successivi. Se invece si attua un preammortamento di 19 giorni, fino a fine mese, le rate andranno via via in scadenza alla fine di ogni mese.***

Il periodo di preammortamento si aggiunge all'ammortamento, comportando un lieve aumento della durata complessiva del rimborso. Salvo eccezioni il tasso applicato è quello utilizzato per il mutuo.

Tipi particolari di ammortamento

Ammortamento francese → le rate sono costanti

Ammortamento italiano → le quote capitale sono costanti

Inoltre:

- ammortamento tedesco, in cui le quote interesse sono pagate anticipatamente
- ammortamento americano, il cui le quote interesse vengono pagate periodicamente e il capitale finale viene costituito in modo progressivo su un fondo di accumulo
- piani a rate crescenti (le rate di rimborso non sono fisse ma aumentano di importo ad ogni rata)
- ammortamento libero (le rate sono composte esclusivamente della quota di interessi e il capitale può essere rimborsato liberamente entro scadenze predeterminate)
- a rata fissa e durata variabile (la rata rimane costante mentre le variazioni del tasso determinano l'accorciamento o l'allungamento del piano di rimborso).

AMMORTAMENTO FRANCESE

Le rate sono costanti

creditore $\Rightarrow$ rendita immediata posticipata costante

Utilizzando la condizione di chiusura finanziaria si ha:

$$S = R a_{n \neg i} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{S}{a_{n \neg i}}$$

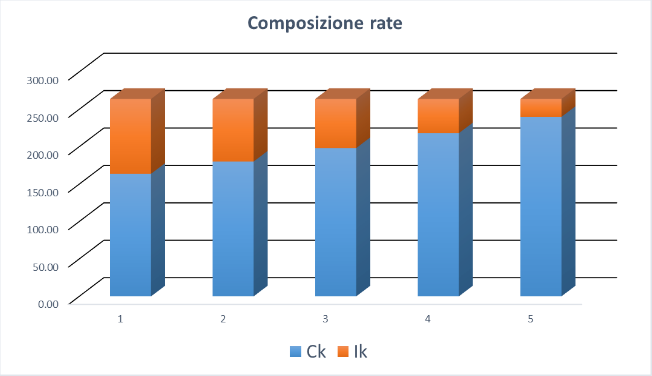
Esempio:
S = 1000; n = 5; i = 10%

$$R = \frac{S}{a_{n \neg i}} = \frac{1000}{a_{5 \neg 0.1}} = \frac{1000 \cdot 0.1}{1 - 1.1^{-5}} = 263.80$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	€ 1 000.00				
1	€ 836.20	€ 163.80	€ 100.00	€ 263.80	€ 163.80
2	€ 656.03	€ 180.18	€ 83.62	€ 263.80	€ 343.97
3	€ 457.83	€ 198.19	€ 65.60	€ 263.80	€ 542.17
4	€ 239.82	€ 218.01	€ 45.78	€ 263.80	€ 760.18
5	€ 0.00	€ 239.82	€ 23.98	€ 263.80	€ 1 000.00

AMMORTAMENTO FRANCESE

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	€ 1 000.00				
1	€ 836.20	€ 163.80	€ 100.00	€ 263.80	€ 163.80
2	€ 656.03	€ 180.18	€ 83.62	€ 263.80	€ 343.97
3	€ 457.83	€ 198.19	€ 65.60	€ 263.80	€ 542.17
4	€ 239.82	€ 218.01	€ 45.78	€ 263.80	€ 760.18
5	€ 0.00	€ 239.82	€ 23.98	€ 263.80	€ 1 000.00



AMMORTAMENTO ITALIANO

Le quote capitale sono costanti

Utilizzando la condizione di chiusura elementare si ha:

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = nC = S \quad \Rightarrow \quad C = \frac{S}{n}$$

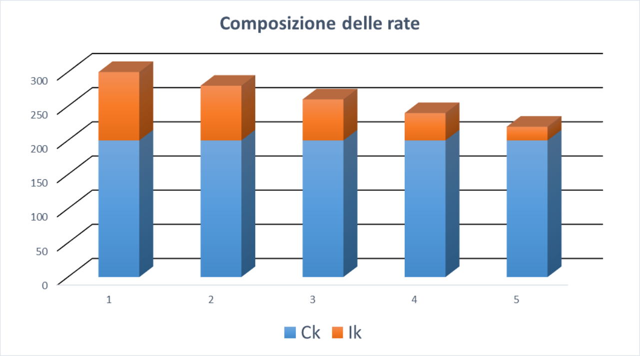
Esempio:
S = 1000; n = 5; i = 10%

$$C = \frac{S}{n} = \frac{1000}{5} = 200.00$$

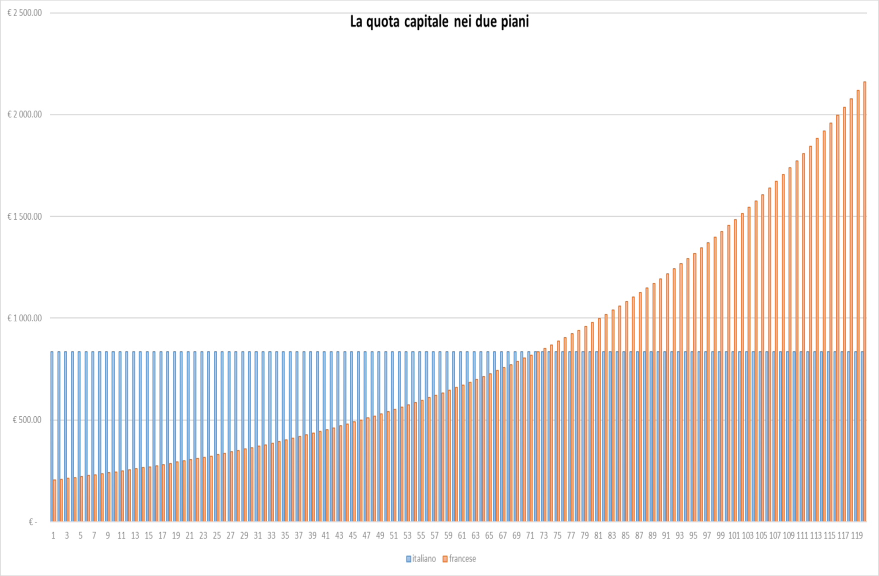
k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	€ 1 000.00				
1	€ 800.00	€ 200.00	€ 100.00	€ 300.00	€ 200.00
2	€ 600.00	€ 200.00	€ 80.00	€ 280.00	€ 400.00
3	€ 400.00	€ 200.00	€ 60.00	€ 260.00	€ 600.00
4	€ 200.00	€ 200.00	€ 40.00	€ 240.00	€ 800.00
5	€ -	€ 200.00	€ 20.00	€ 220.00	€ 1 000.00

AMMORTAMENTO ITALIANO

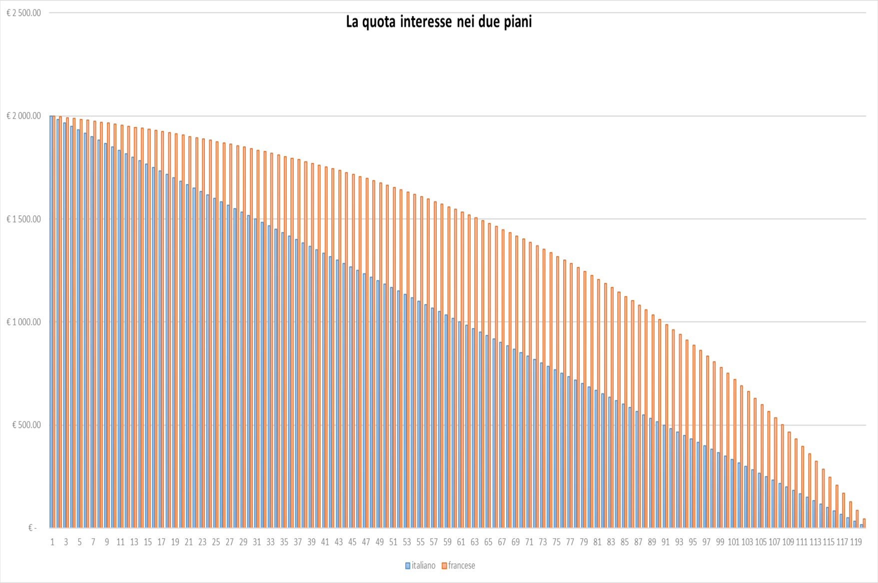
k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	€ 1 000.00				
1	€ 800.00	€ 200.00	€ 100.00	€ 300.00	€ 200.00
2	€ 600.00	€ 200.00	€ 80.00	€ 280.00	€ 400.00
3	€ 400.00	€ 200.00	€ 60.00	€ 260.00	€ 600.00
4	€ 200.00	€ 200.00	€ 40.00	€ 240.00	€ 800.00
5	€ -	€ 200.00	€ 20.00	€ 220.00	€ 1 000.00



Italiano VS francese



Italiano VS francese



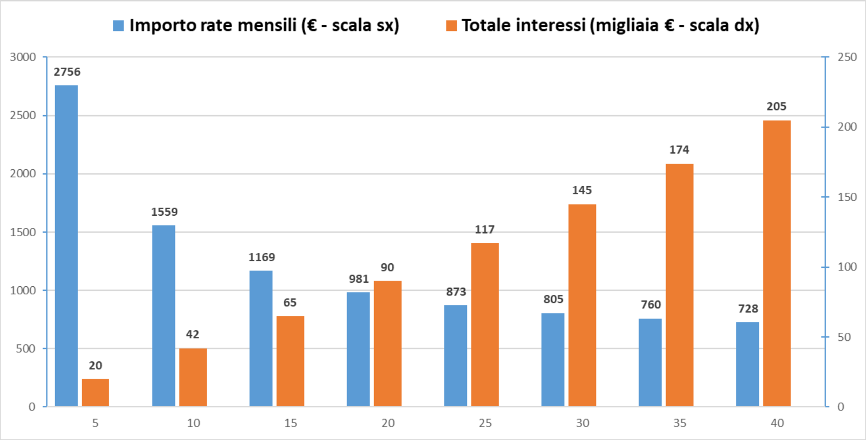
Il mutuo

Il tipo di ammortamento graduale più comune è il **mutuo**.

Il **mutuo** è un finanziamento a medio-lungo termine, che in genere dura da 5 a 30 anni.
Serve per acquistare, costruire o ristrutturare un immobile, in particolare la casa di abitazione. È chiamato “ipotecario” perché il pagamento delle rate è garantito da un’ipoteca su un immobile.
Può essere concesso dalle banche e da altri operatori finanziari.

AMMORTAMENTO A RATA COSTANTE

Il mutuo

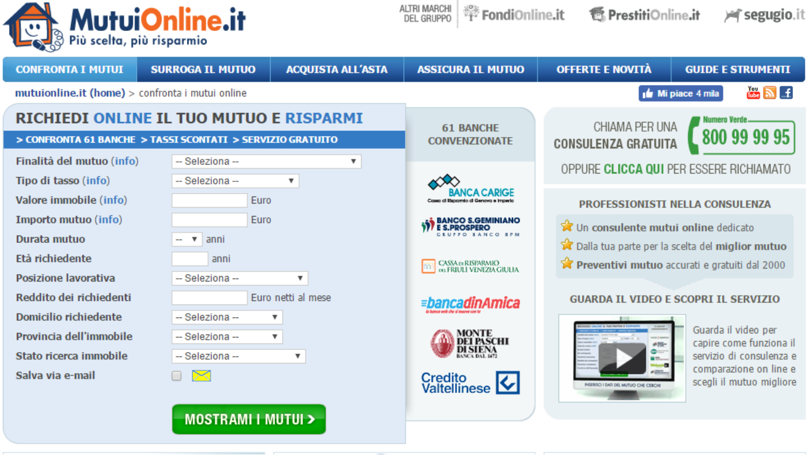


Importo rate mensili (€ - scala sx)
Totale interessi (migliaia € - scala dx)
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
250
200
150
100
50
0
2756
20
1559
42
1169
65
981
90
873
117
805
145
760
174
728
205
5
10
15
20
25
30
35
40

I tipi di mutuo

A tasso fisso	il tasso di interesse resta quello fissato dal contratto per tutta la durata del mutuo
A tasso variabile	il tasso di interesse può variare a scadenze prestabilite rispetto al tasso di partenza seguendo le oscillazioni di un parametro di riferimento
A tasso misto	il tasso di interesse può passare da fisso a variabile (o viceversa)
A tasso doppio	il mutuo è suddiviso in due parti: una con il tasso fisso, una con il tasso variabile

http://www.mutuionline.it



Esercizio

Completare il seguente piano di ammortamento relativo ad un mutuo di importo S stipulato al tasso annuo i e ammortizzabile con 3 versamenti annui immediati posticipati.

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0					
1	2600	1400	800		
2				1600	
3					

$$S = C_1 + D_1 = 1400 + 2600 = 4000$$

$$I_1 = S \cdot i = 4000 \cdot i \Rightarrow i = \frac{800}{4000} = 0.20 = 20\%$$

$$R_1 = C_1 + I_1 = 1400 + 800 = 2200$$

$$E_1 = C_1 = 1400$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	4000				
1	2600	1400	800	2200	1400
2				1600	
3					

$$I_2 = D_1 \cdot i = 2600 \cdot 0.2 = 520$$

$$C_2 = R_2 - I_2 = 1600 - 520 = 1080$$

$$E_2 = C_1 + C_2 = 1400 + 1080 = 2480$$

$$D_2 = S - E_2 = 4000 - 2480 = 1520$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	4000				
1	2600	1400	800	2200	1400
2	1520	1080	520	1600	2480
3					

$$I_2 = D_2 \cdot i = 1520 \cdot 0.2 = 304$$

$$C_3 = S - E_3 = 4000 - 2480 = 1520$$

$$R_3 = C_3 + I_3 = 1520 + 304 = 1824$$

$$E_3 = E_2 + C_3 = 2480 + 1520 = 4000$$

$$D_3 = S - E_3 = 4000 - 4000 = 0$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	4000				
1	2600	1400	800	2200	1400
2	1520	1080	520	1600	2480
3	0	1520	304	1824	4000

Esercizio

S = 12000; n = 4; i = 10%

quote di capitale proporzionali rispettivamente ai numeri 2, 3, 3, 4.

$$\begin{cases} C_1 = 2C_0 \\ C_2 = 3C_0 \\ C_3 = 3C_0 \\ C_4 = 4C_0 \end{cases}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = (2 + 3 + 3 + 4)C_0 = 12000$$

$$C_0 = \frac{12000}{2 + 3 + 3 + 4} = 1000$$

$$\begin{cases} C_1 = 2000 \\ C_2 = 3000 \\ C_3 = 3000 \\ C_4 = 4000 \end{cases}$$

Esercizio

S = 12000; n = 4; i = 10%

quote di capitale proporzionali rispettivamente ai numeri 2, 3, 3, 4.

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	12000				
1		2000			
2		3000			
3		3000			
4		4000			

Esercizio

S = 12000; n = 4; i = 10%

quote di capitale proporzionali rispettivamente ai numeri 2, 3, 3, 4.

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	12000				
1	10000	2000			2000
2	7000	3000			5000
3	4000	3000			8000
4	0	4000			12000

Esercizio

S = 12000; n = 4; i = 10%

quote di capitale proporzionali rispettivamente ai numeri 2, 3, 3, 4.

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	12000				
1	10000	2000	1200		2000
2	7000	3000	1000		5000
3	4000	3000	700		8000
4	0	4000	400		12000

Esercizio

S = 12000; n = 4; i = 10%

quote di capitale proporzionali rispettivamente ai numeri 2, 3, 3, 4.

k	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	**12000**				
1	**10000**	**2000**	**1200**	**3200**	**2000**
2	**7000**	**3000**	**1000**	**4000**	**5000**
3	**4000**	**3000**	**700**	**3700**	**8000**
4	**0**	**4000**	**400**	**4400**	**12000**

Table of Contents

I rischi

- Rischio di tasso di interesse;
- rischio di credito;
- rischio inflattivo;
- rischio di cambio;
- agire nei mercati: le coperture, la speculazione, l'arbitraggio.

Il compito della finanza è “la valutazione di cash flow distribuiti nel tempo, e che sono di solito aleatori” *rischio* $\Rightarrow$ “la possibilità che si verifichi qualcosa che abbia effetto sugli obiettivi”; il rischio quindi “è misurato in termini di conseguenze e di probabilità, [...] può comportare effetti sia positivi che negativi”.

“Il rischio é una categoria fondamentale nella teoria della finanza - parole chiave: premio per il rischio (risk-loading); avversione al rischio; paradigma rendimento-atteso/rischio (media/varianza); rischio sistematico (di mercato), rischio specifico (idiosincratico); tasso di interesse risk-free; prezzo di mercato del rischio; distribuzione di probabilitá risk-adjusted; portafogli replicanti: istantaneamente non rischiosi; coherent measures of risk”

Molti contratti finanziari sono stati “inventati” per mitigare situazioni di rischio.

“La capacità delle economie di mercato di gestire i problemi posti dal rischio è un indicatore del loro successo. Viceversa l’incapacità di gestire il rischio è un indicatore del loro insuccesso”[1].

[1] J.E. Stiglitz, *Principi di Microeconomia*, Torino, Bollati Boringhieri, 1994, p. 117.

Rischio di tasso di interesse

Obbligazione

il rischio di tasso di interesse $\rightarrow$ aleatorietà del prezzo del titolo.

Un Bot con l'obiettivo di essere detenuto sino a scadenza non è rischioso; diventa rischioso se venduto sul mercato secondario, per l'aleatorietà del prezzo.

All'emissione un Btp è strutturalmente piú rischioso di un Bot.

Cct: più rischiosi di un titolo a tasso fisso; ma le cedole indicizzate al tasso di interesse del mercato hanno effetto stabilizzante sul prezzo di mercato del titolo indicizzato.

Schemi di misurazione e di controllo del rischio di tasso di interesse, per essere completi e generali, debbono utilizzare modelli stocastici di mercato.

Rischio di credito

Il rischio di credito é l'incertezza derivante dall'eventualitá che in un'operazione di debito il debitore si riveli *insolvente*.

Operazione di indebitamento $\{S, -(S+I)\}/\{0, 1\}$.
$X < S + I \longrightarrow$ somma che il debitore corrisponde al creditore in $t = 1$.
$X/(S+I) \ \Rightarrow$ *recovery rate*: esprime la frazione di credito recuperato dell'operazione rischiosa.

L'incertezza su X configura il *rischio di insolvenza* (*default risk*) dell'operazione finanziaria.

Tutto il fenomeno riguardante l'insolvenza nelle operazioni di debito/credito è noto come *rischio di credito*; un'operazione non affetta da rischio di credito è detta *default-free*.

Alle imprese, alle istituzioni, agli stati e agli enti locali viene assegnato un giudizio di affidabilità (*merito di credito*) detto *rating*.

La rischiosità del debitore è definita dal rating.

La differenza tra il tasso rischioso e il tasso risk-free è detta *spread creditizio* (*credit spread*), e ha il ruolo di un vero e proprio *premio al rischio*.

In questi casi il tasso di interesse caratteristico del debito non è più soltanto un "price of time", ma diventa – con l'immagine dell'abate Galiani – il "prezzo del batticuore".

I princìpî e le tecniche per la determinazione del *premio al rischio* potranno essere definiti solo all'interno di un adeguato quadro teorico in condizioni di incertezza.

Rischio inflattivo

Si consideri un'operazione di scambio di importi $\{-S, X\}/\{0, 1\}$.

L'operazione non sia affetta da rischio di credito.

Se l'investimento ha l'obiettivo di garantire la disponibilità in $t = 1$ di un fissato "paniere" di beni reali (beni di consumo, materie prime, servizi, ...), allora l'operazione non è esente da rischio, dato che il prezzo futuro dei beni reali non è noto in $t = 0$ e, quindi, la quantità di beni che potrà essere acquistata in $t = 1$ con X euro è incerta.

Questo tipo di rischio è detto *rischio inflattivo*.

Si consideri un agente economico utente di un certo bene di consumo deperibile, che in $t = 0$ abbia un'eccedenza di B(0) unitá del bene.

$p(0) \longrightarrow$ prezzo del bene sul mercato
l'agente puó vendere il bene sul mercato ricavando $S := p(0)B(0)$ euro
puó investire il valore nominale ricavato in un'operazione finanziaria che garantisca l'ammontare certo di X euro in $t = 1$.

La quantitá

$$B(1) = \frac{X}{p(1)}$$

di unitá del bene di consumo acquistabili in $t = 1$ non é nota in $t = 0$, dato che il prezzo di mercato $p(1)$ del bene é imprevedibile.

DISAQ
DIPARTIMENTO DI STUDI AZIENDALI E QUANTITATIVI
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Si dice che il tasso di interesse nominale

$$i := \frac{X}{S} - 1,$$

é certo, mentre il tasso di interesse reale:

$$i' := \frac{B(1)}{B(0)} - 1,$$

é incerto.

Questa incertezza é, evidentemente, generata dall'incertezza sul prezzo $p(1)$, cioé sul potere d'acquisto in $t = 1$ dell'euro (nei confronti del bene considerato).

Si indica con:

$$f := \frac{p(1)}{p(0)} - 1,$$

il tasso di inflazione (cioé il tasso di incremento di prezzo) sul periodo $[0, 1]$ del bene B.

Rischio di cambio

Il *rischio di cambio* si ha quando un agente entra in un'operazione finanziaria il cui risultato deve essere misurato in una valuta diversa da quella di denominazione (a esempio, quando un titolo denominato in dollari deve essere contabilizzato in euro).

La relazione quantitativa tra i due rendimenti potrà essere specificata sulla base di un modello stocastico che descriva adeguatamente anche le aspettative sul cambio futuro e il relativo premio al rischio.

Arbitraggio

Si supponga che nel mercato siano simultaneamente disponibili un Btp e, separatamente, ciascun importo corrispondente alla quota capitale e alle cedole del suo piano d'ammortamento. Se un investitore vuole acquistare quel Btp ha due possibilità:

- acquistare il Btp tutto intero
- "replicare" il Btp acquistando separatamente tutte le cedole e il capitale, costruendo così il Btp *sintetico*

Le due strategie di acquisto produrrebbero lo stesso flusso di importi, perciò è naturale che i due acquisti debbano poter essere regolati allo stesso prezzo.
Se i prezzi fossero diversi si potrebbe realizzare un *arbitraggio* privo di rischio: acquistando la soluzione con prezzo più basso e vendendo quella a prezzo più alto si realizzerebbe un guadagno certo al momento dell'acquisto/vendita, avendo annullato qualsiasi impegno nel futuro (importi netti futuri tutti nulli).

Agire nei mercati: le coperture, la speculazione, l’arbitraggio

Opportunità di arbitraggio ⇒ strategia di investimento che garantisce un flusso finanziario positivo in qualche circostanza, senza generare flussi finanziari negativi, né richiedere investimenti netti”[2].

Per fare un arbitraggio bisogna poter costruire una strategia finanziaria – cioè un insieme di azioni di acquisto e di vendita – che produce un profitto certo qualsiasi cosa avvenga.

[2] P.H. Dybvig, S.A. Ross. *Arbitrage*, in *The New Palgrave, A dictionary of economics*, London, 1987; tr. it. in *Il principio di arbitraggio*, a cura di M. De Felice e F. Moriconi, Bologna, Il Mulino, 1996.

La *copertura* (*hedging*) è un'operazione finanziaria finalizzata a "bloccare" un prezzo futuro di acquisto o di vendita altrimenti aleatorio; se dopo l'operazione di copertura, cioè dopo l'eliminazione dell'incertezza, residua un margine di profitto netto positivo (senza impiego di capitale), si è realizzato un arbitraggio.

Chi effettua investimenti con la logica della copertura è detto *hedger*.

La speculazione è “l’attività di acquisto (o vendita) di beni con la prospettiva di vendita (acquisto) a una data successiva, avendo come motivo l’aspettativa di un cambiamento dei prezzi”[3].

Quindi si può dire che l’arbitraggio è una speculazione realizzata con certezza; dal punto di vista delle motivazioni, la speculazione è l’opposto della copertura.

Chi fa speculazioni è detto speculatore (*speculator*).

Quando la speculazione diventa un fenomeno collettivo e assume rilievo sociale, si parla in genere di “eccesso speculativo”, in particolare di “mania” e di “bolla”.

---

[3] N. Kaldor, *Speculation and economic stability*.

Table of Contents

Prezzi di mercato

- Rappresentare i flussi di cassa;
- il principio di arbitraggio;
- la legge del prezzo unico;
- il teorema dell'indipendenza dall'importo;
- il teorema di linearità del prezzo.

Il mercato

Un mercato per una fissata classe di “beni” sarà inteso come un “luogo” (fisico o virtuale) nel quale, in ogni istante t, viene fissato e reso pubblico il prezzo di acquisto e di vendita di una quantità unitaria di ciascuno dei beni trattati.

Si considererà nel seguito un mercato finanziario idealizzato (*mercato perfetto*), in cui siano trattati solamente titoli obbligazionari default-free. Un mercato perfetto viene qualificato in base a un insieme di ipotesi.

Ipotesi di mercato perfetto

Non frizionalità:

1. non ci sono costi di transazione;
2. non ci sono gravami fiscali;
3. i titoli sono *infinitamente divisibili*;
4. sono consentite le *vendite allo scoperto* (*short sales*).

Competitività. Gli agenti sono:

1. *massimizzatori di profitto*;
2. *price taker*.

Assenza di rischio di insolvenza.

Esempio

Una delle Nazioni partecipanti ai Giochi Olimpici invernali di Torino del 2006 era la Danimarca. Il 6 febbraio, su SportingUSA.com si poteva scommettere 2.5 a 1 che la Danimarca non avrebbe vinto alcuna medaglia: scommettendo $1\$$ si potevano vincere $1 + 2.5 = 3.5\$$ se il medagliere della Danimarca rimaneva vuoto, mentre in caso contrario la vincita era 0.
Nella stessa data, il sito di scommesse Bet365.com quotava 1.875 a 1 l'evento la Danimarca vincerá almeno una medaglia.

Supponiamo che il 6 febbraio uno scommettitore abbia puntato $451\$$ su SportingUSA e $549\$$ su Bet365 per un totale di $1000\$$.

- la Danimarca non vince
  - vince $3.5 \cdot 451 = 1578.50\$$
  - perde $549\$$
- la Danimarca vince
  - perde $451\$$
  - vince $2.875 \cdot 549 = 1578.38\$$

Investendo $1000\$$ c'é un guadagno garantito di $578\$$.

La proprietà di assenza di arbitraggio

Si consideri una operazione finanziaria $\mathbf{x}_0/\mathbf{t}_0$, di importi:

$$\mathbf{x}_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_m\} ,$$

non tutti nulli, esigibili sullo scadenzario:

$$\mathbf{t}_0 = \{t, t_1, \dots, t_m\} ,$$

essendo t l'istante corrente e $t \leq t_1 < \cdots < t_m$.
Si dirà che $\mathbf{x}_0/\mathbf{t}_0$ è un *arbitraggio non-rischioso* (o, brevemente, un arbitraggio), se il flusso $\mathbf{x}_0$ non contiene pagamenti di segno opposto.

Arbitraggio immediato e a scadenza

L'importo:

$$c := -x_0 \ ,$$

può essere interpretato come il costo di acquisizione, in t, del flusso residuo:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \ ,$$

su:

$$\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_m\} \ .$$

Arbitraggio immediato:

$$c < 0 \ ; \quad x_k \geq 0 \ , \ k = 1, 2, \ldots m \ .$$

Arbitraggio a scadenza:

$$c \leq 0 \ ; \quad x_k \geq 0 \ , \ k = 1, 2, \ldots m \ , \ \exists j : \ x_j > 0 \ .$$

DISAQ
DIPARTIMENTO DI STUDI AZIENDALI E QUANTITATIVI
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Principio di arbitraggio

Si assume che nel mercato sia esclusa la possibilità di effettuare arbitraggi: con questa richiesta è preclusa la possibilità di realizzare profitti senza alcuna assunzione di rischio.

La legge del prezzo unico

Due contratti che producono lo stesso payoff in ogni situazione possibile, debbono avere lo stesso prezzo.

Oltre al contratto che paga il flusso:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \,,$$

sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_m\}$, acquistabile al prezzo c in t, si consideri un secondo contratto che, sullo stesso scadenzario, paga il flusso:

$$\mathbf{x}' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_m\} \,,$$

acquistabile in t al prezzo c'. Se risulta:

$$x_k = x'_k \,, \quad k = 1, 2, \ldots, m \,,$$

cioè se i due contratti producono lo stesso payoff a tutte le scadenze, deve anche aversi $c = c'$.

Dimostrazione

Si supponga, per assurdo, che sia $c' > c$; si tratta di adottare la seguente strategia di compravendita:

- azione (A): vendita allo scoperto in t del contratto con payoff $\mathbf{x}'$;
- azione (B): acquisto in t del contratto con payoff $\mathbf{x}$.

La strategia é illustrata nella tabella di payoff:

	t	t_1	t_2	$\dots$	t_m
(A) :	c'	$-x'_1$	$-x'_2$	$\dots$	$-x'_m$
(B) :	$-c$	x_1	x_2	$\dots$	x_m
	$c'-c$	0	0	$\dots$	0

La strategia produce un profitto certo positivo $c' - c$ in t a fronte di un flusso di poste nulle sullo scadenzario $\mathbf{t}$; l'operazione di compravendita costituisce cioè un arbitraggio di tipo immediato. $\square$

Osservazioni

- Qualora fosse $c' < c$, si otterrebbe ancora un arbitraggio (immediato) con profitto $c - c' > 0$ mettendo in atto la compravendita di segno opposto.

- Nella sua formulazione usuale, la legge del prezzo unico (“law of one price”) richiede che due beni che siano *succedanei perfetti* (“perfect substitutes”) siano scambiati allo stesso prezzo.

Titoli a cedola nulla unitari

Sia t l'istante corrente. Si consideri uno ZCB unitario con scadenza $s \geq t$.

Si indicherà con:

$$v(t,s)\,, \quad t \leq s\,,$$

il prezzo in t del titolo.

Per il principio di arbitraggio dovrà aversi:

$$v(t,s) > 0\,, \quad t \leq s$$

$$v(s,s) = 1\,.$$

Per significatività finanziaria:

$$v(t,s) < 1\,, \quad t < s \quad (\textit{Postulato di impazienza}).$$

Vale di conseguenza il

Teorema di decrescenza del prezzo rispetto alla scadenza

$$v(t, s') > v(t, s'') , \quad t \leq s' < s'' .$$

Titoli a cedola nulla non unitari

Si consideri uno zcb con valore facciale non unitario che garantisca alla scadenza s il pagamento di un importo monetario x_s, noto in $t \leq s$. Si indicherà con:

$$V(t; x_s)\,, \quad t \leq s\,,$$

il prezzo in t del titolo.

Si supponga che sul mercato siano trattati in t gli zcb unitari con scadenza in s.

- Per l'ipotesi di infinita divisibilità è possibile costruire un *portafoglio* contenente una quantità x_s di tali titoli;
- per l'ipotesi che gli agenti sono price taker

il costo di acquisizione dell'intero portafoglio è $x_s\, v(t, s)$.

Teorema di indipendenza dall'importo

Per evitare arbitraggi non-rischiosi deve sussistere l'uguaglianza:

$$V(t; x_s) = x_s\, v(t, s)\ .$$

Il prezzo in t dello zcb con valore facciale x_s e scadenza s deve essere uguale al prezzo in t del portafoglio contenente x_s unità di zcb con uguale scadenza e valore facciale unitario.

Dimostrazione

Si supponga, per assurdo, che valga la disuguaglianza:

$$V(t; x_s) < x_s\, v(t, s)\ .$$

È possibile effettuare un arbitraggio adottando la strategia:

- azione (A): acquisto in t del titolo con valore facciale x_s;
- azione (B): vendita allo scoperto in t di x_s zcb unitari con scadenza s.

	t	s
(A) :	$-V(t; x_s)$	x_s
(B) :	$x_s\, v(t, s)$	$-x_s$
	$x_s\, v - V$	0

La strategia garantisce il profitto $x_s\, v(t, s) - V(t; x_s)$, e la chiusura della posizione scoperta in s. $\square$

Portafogli di zero-coupon bond con diversa scadenza

Si consideri il titolo che garantisce il flusso di pagamenti:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \, ,$$

non tutti nulli, alle date:

$$\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \, ,$$

con $t \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. Si indicherà con:

$$V(t; \mathbf{x}) \, , \quad t \leq t_1 \, ,$$

il prezzo in t del titolo.

Si supponga che sul mercato siano trattati in t m zcb unitari con scadenza sulle date di $\mathbf{t}$.

- Per l'ipotesi di infinita divisibilità è possibile costruire un *portafoglio* contenente x_k unità dello zcb unitario con scadenza in t_k $(k = 1, 2, \dots, m)$,

il costo di acquisizione dell'intero portafoglio è $\sum_k x_k v(t, t_k)$.

Teorema di linearità del prezzo

Per evitare arbitraggi non-rischiosi deve essere:

$$V(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t, t_k) \, .$$

Dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che valga la disuguaglianza:

$$V(t;\mathbf{x}) < \sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t, t_k) \, .$$

In questo caso la strategia che consente arbitraggio è:

- azione (A): acquisto in t del titolo che garantisce il flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$;
- azione (B$_k$) $(k = 1, 2, \ldots, m)$: vendita allo scoperto in t di x_k zcb unitari con scadenza t_k.

La tabella di payoff corrispondente è:

	t	t_1	t_2	$\dots$	t_m
(A) :	$-V(t;\boldsymbol{x})$	x_1	x_2	$\dots$	x_m
(B_1) :	$x_1 v_1$	$-x_1$	0	$\dots$	0
(B_2) :	$x_2 v_2$	0	$-x_2$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
(B_m) :	$x_m v_m$	0	0	$\dots$	$-x_m$
	$\sum_k x_k v_k - V$	0	0	$\dots$	0

Si ricava il profitto $\sum_k x_k v(t, t_k) - V(t; \mathbf{x})$ al tempo t senza contrarre alcun impegno futuro. Si effettua quindi un arbitraggio di tipo immediato. $\square$

Osservazione

Una interpretazione espressiva del teorema si ottiene osservando che, date le ipotesi di mercato, il titolo complesso che garantisce il pagamento del flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ è perfettamente replicabile componendo opportunamente zcb unitari. Quindi il titolo complesso e il portafoglio di zcb sono "perfect substitutes", e il risultato è conseguenza diretta della legge del prezzo unico.

Nella logica della replicazione, il titolo complesso è qualificabile come *titolo derivato*, mentre gli zcb unitari possono essere intesi come *titoli elementari*, o *titoli base*. Si usa anche dire che il titolo complesso è *ridondante*.

Table of Contents

Riepilogo

La legge del prezzo unico: due contratti che producono lo stesso payoff in ogni situazione possibile, debbono avere lo stesso prezzo.

Teorema di indipendenza dall'importo: per evitare arbitraggi non-rischiosi deve sussistere l'uguaglianza:

$$V(t; x_s) = x_s \, v(t, s) \, .$$

Teorema di linearità del prezzo: per evitare arbitraggi non-rischiosi deve essere:

$$V(t; \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t, t_k) \, .$$

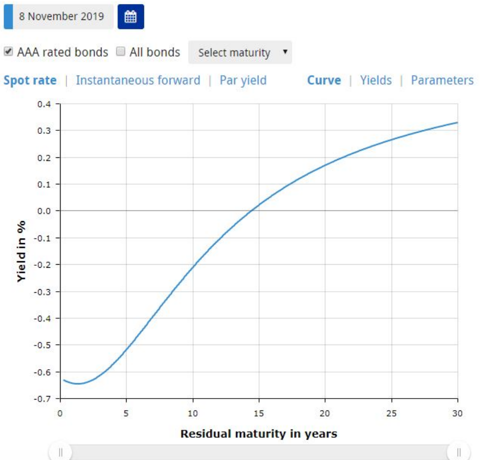
Il creditore, quando tratta l'accordo per la concessione di un prestito, prende in considerazione molti fattori per fissare il tasso di interesse da applicare. Ad esempio, l'affidabilitá creditizia del debitore.
Anche un investitore in titoli a scandeza fissa prende in considerazione questi aspetti.

Struttura per scadenze dei tassi di interesse

La relazione tra il tempo fino alla scadenza e il tasso di rendimento per i titoli di reddito come i Buoni del Tesoro e le obbligazioni con cedola viene chiamata Struttura per scadenze dei tassi di interesse; un grafico che rappresenta tale relazione é detto curva dei rendimenti

Grafico

La struttura per scadenze cambia di giorno in giorno al variare delle condizioni dell'economia. Di solito agli investimenti a lungo termine sono associati tassi di interesse piú alti di quelli ottenibili per gli investimenti a breve termine.



Le strutture per scadenza a pronti

Per le proprietá di coerenza del mercato, la situazione di mercato alla data corrente t puó essere completamente rappresentata dai valori osservati dei prezzi (o dei tassi) di ZCB di tutte le scadenze, la cosiddetta struttura per scadenza dei prezzi (o dei tassi).

Sia t l'istante di osservazione. Siano:

$$\mathbf{s} = \{t, t+1, t+2, \ldots, t+m\}\,,$$

le *date di apertura* del mercato.

Tutti i titoli obbligazionari trattati al tempo t possono produrre pagamenti solamente alle date dello scadenzario:

$$\mathbf{t} = \{t+1, t+2, \ldots, t+m\}\,.$$

Si supponga che siano osservati in t gli m prezzi a pronti:

$$\{ V(t; x_k)\,,\;\; k = 1, 2, \ldots, m \}\,,$$

di zcb di tutte le scadenze. Dalla relazione:

$$v(t, t_k) = \frac{V(t; x_k)}{x_k}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

è possibile ricavare i prezzi a pronti di tutti gli zcb unitari.
L'insieme:

$$\{ v(t, t_k)\,,\;\; k = 1, 2, \ldots, m \}$$

rappresenta la *struttura per scadenza dei prezzi a pronti*, o, anche, “struttura a termine” (*term structure*) dei prezzi a pronti. Tale struttura descrive completamente il mercato al tempo t.

La struttura per scadenza dei prezzi a pronti

Qualsiasi contratto stipulato in t, che necessariamente dovrà garantire un flusso di importi:

$$\mathbf{z}/\mathbf{t} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}/\{t+1, t+2, \ldots, t+m\} \,.$$

per il principio di arbitraggio dovrà avere un prezzo dato da:

$$V(t; \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} z_k \, v(t, t_k) \,.$$

Quindi, la disponibilità degli m titoli con prezzi $V(t; x_k)$ rende il mercato *completo*: sulla base di queste quotazioni vengono ricavati i prezzi $v(t, t_k)$ degli m titoli elementari, e qualsiasi altro tipo di titolo default-free trattato in t è ridondante.

La struttura per scadenza dei tassi di interesse (a pronti)

Dalla struttura per scadenza dei prezzi si ricava la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, secondo le relazioni:

$$i(t, t_k) = \left[\frac{x_k}{V(t; x_k)}\right]^{1/k} - 1 = \left[\frac{1}{v(t, t_k)}\right]^{1/k} - 1 \, .$$

Dato che il mercato di riferimento è esente da rischio di credito, i tassi $i(t, t_k)$ individuano una struttura di rendimenti default-free.

Esempio

In $t = 0$, il mercato sia strutturato su tre anni e siano osservati i tre prezzi:

$$V(0; x_1) = 95\,,\ V(0; x_2) = 18\,,\ V(0; x_3) = 42\,,$$

con:

$$x_1 = 100\,,\ x_2 = 20\,,\ x_3 = 50\,.$$

La struttura dei prezzi a pronti risulta:

$$v(0,1) = \frac{95}{100} = 0.95\,,$$
$$v(0,2) = \frac{18}{20} = 0.9\,,$$
$$v(0,3) = \frac{42}{50} = 0.84\,.$$

La struttura per scadenza dei tassi risulta:

$$i(0,1) = \left(\frac{1}{0.95}\right) - 1 = 5.2632\%\,,$$

$$i(0,2) = \left(\frac{1}{0.9}\right)^{1/2} - 1 = 5.4093\%\,,$$

$$i(0,3) = \left(\frac{1}{0.84}\right)^{1/3} - 1 = 5.9840\%\,,$$

Esempio

In $t = 0$ il mercato sia strutturato su tre anni e sia caratterizzato da una struttura dei tassi a pronti costante al livello del 5% annuo:

$$i(0,1) = i(0,2) = i(0,3) = 0.05\,.$$

e i prezzi degli zcb unitari sulle tre scadenze consentite sono “allineati” con una funzione di sconto esponenziale, essendo:

$$v(0,1) = 1.05^{-1} = 0.95238\,,$$
$$v(0,2) = 1.05^{-2} = 0.90703\,,$$
$$v(0,3) = 1.05^{-3} = 0.86384\,.$$

Esempio

Nella seconda colonna della tabella sono riportati i prezzi a pronti di zcb unitari osservati in $t = 0$ su un ipotetico mercato strutturato su 6 semestri. Nella terza colonna sono forniti i corrispondenti tassi espressi su base semestrale.

k (semestri)	$v(0,k)$	$i(0,k)$ (%)
1	0.980021	2.0386
2	0.957333	2.2041
3	0.934753	2.2746
4	0.919159	2.1298
5	0.906323	1.9867
6	0.889286	1.9748

Esempio

In casi come quello dell'esempio precedente, in cui la griglia temporale ha periodicità semestrale, si usa spesso riportare i rendimenti esprimendo i tassi su base annua, utilizzando le solite formule per i tassi equivalenti in regime esponenziale. Si ottiene così la tabella

k (semestri)	$v(0,k)$	$i(0,k)$ (%)
1	0.980021	4.1188
2	0.957333	4.4569
3	0.934753	4.6009
4	0.919159	4.3049
5	0.906323	4.0128
6	0.889286	3.9887

Esempio

Evoluzione della struttura per scadenza sul mercato secondario italiano dei titoli di Stato, nel periodo che va dal 5 gennaio 1999 al 12 luglio 2005; le date di osservazione sono state scelte con cadenza settimanale. Le curve dei rendimenti sono riportate per scadenze fino a 20 anni.

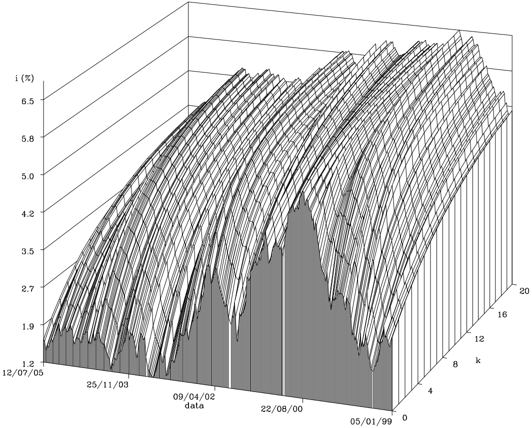


Table of Contents

Contratti a termine

- I contratti a termine (forward);
- il teorema dei prezzi impliciti;
- le “cedole implicite”.

I contratti a termine

Un *contratto a termine* (o *forward*) è una compravendita differita in cui due parti convengono, al tempo t, di scambiarsi a una convenuta data futura T e a un prezzo prefissato una determinata quantità di un bene.

L'istante T è la data di consegna del bene e il prezzo da corrispondere è il *prezzo a termine* (o *forward*) "fatto" in t *per consegna* in T.

Il tempo t rappresenta semplicemente la data di sottoscrizione del contratto.

Nel mercato obbligazionario un contratto a termine dovrà coinvolgere almeno tre date.

Caso di riferimento: acquisto a termine in t, per consegna in $T \geq t$, di uno zcb unitario con scadenza $s \geq T$. La quantità:

$$v(t, T, s)\,, \quad t \leq T \leq s\,,$$

definito come il valore in T, pattuito in t, di un euro pagabile in s, rappresenta il prezzo a termine in t, per consegna in T, di uno zcb unitario con scadenza s.

In generale,

$$v(t, T, s) \neq v(T, s)$$

Vale, invece l'uguaglianza:

$$v(t, t, s) = v(t, s)\,, \quad t \leq s\,,$$

dove, naturalmente, $v(t, s)$ rappresenta il prezzo a pronti, cioè fatto in t e pagato in t, dello zcb unitario con scadenza s.

Esempio

Se in $t = 0$ lo zcb unitario con scadenza in $s = 9$ mesi viene acquistato a termine, per consegna in $T = 3$ mesi, al prezzo di $v(0, 3, 9) = 0.95$ euro, si effettua l'operazione di investimento (differita):

$$\{0, -0.95, 1\}/\{0, 3, 9\}$$

(tempi in mesi). La parte che vende il titolo assume una posizione debitoria (short position); effettua cioè l'operazione di finanziamento (differita):

$$\{0, 0.95, -1\}/\{0, 3, 9\}\,.$$

Il tasso di interesse, su base annua, generato dall'operazione a termine sul periodo $[3, 9]$ è $(1/0.95)^2 - 1 = 10.08\%$.

Teorema dei prezzi impliciti

Un contratto a termine è un contratto scritto su un altro contratto o è un titolo che implica l'acquisto/vendita di un titolo elementare (lo zcb unitario con scadenza in s). È quindi un titolo derivato.

La natura di contratto derivato propria di una operazione a termine è evidenziata dal seguente:

Teorema dei prezzi impliciti. Per evitare arbitraggi non-rischiosi deve sussistere l'uguaglianza:

$$v(t,T,s) = \frac{v(t,s)}{v(t,T)}, \qquad t \leq T \leq s\,.$$

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che valga la diseguaglianza:

$$v(t,s) > v(t,T)\,v(t,T,s)$$

È possibile effettuare un arbitraggio adottando la seguente strategia di compravendita in t:

- azione (A): vendita allo scoperto dello zcb unitario con scadenza s;
- azione (B): acquisto a pronti di $v(t, T, s)$ unità dello zcb unitario che scade in T;
- azione (C): acquisto a termine, per consegna in T, dello zcb unitario con scadenza s.

Come evidenzia la seguente tabella dei pagamenti, ciò condurrebbe alla costruzione di un arbitraggio privo di rischio (di tipo immediato):

	t	T	s
(A):	$v(t,s)$	0	-1
(B):	$-v(t,T)\,v(t,T,s)$	$v(t,T,s)$	0
(C):	0	$-v(t,T,s)$	1
	$v(t,s) - v(t,T)\,v(t,T,s)$	0	0

La strategia opposta condurrebbe ugualmente a un arbitraggio se valesse, al contrario, la disuguaglianza $v(t, s) < v(t, T)\, v(t, T, s)$.

Esempio

Si supponga che in $t = 0$ sul mercato siano in vigore i prezzi:

$$v(0, 0.25) = 0.986\,, \quad v(0,1) = 0.95\,, \quad v(0, 0.25, 1) = 0.96\,.$$

Effettuando la transazione descritta nella dimostrazione precedente, illustrata dalla tabella di payoff:

	0	0.25	1
(A) :	0.95	0.00	-1
(B) :	-0.96×0.986	0.96	0
(C) :	0.00	-0.96	1
	0.00344	0.00	0

si ricaverebbe al tempo zero un profitto non-rischioso di $0.95 - 0.96 \times 0.986 = 0.00344$ euro.

L'unico valore "coerente" di $v(t, T, s)$ è dato da:

$$v(0, 0.25, 1) = \frac{0.95}{0.986} = 0.9634888\,.$$

Proprietà

Dal Teorema dei prezzi impliciti si ricavano le proprietà dei prezzi a termine.

- Positività del prezzo a termine:

$$v(t, T, s) > 0\,, \quad t \le T \le s\,.$$

- Condizione a scadenza:

$$v(t, s, s) = 1\,, \quad t \le s\,.$$

- Proprietà di decrescenza rispetto alla scadenza dell'orizzonte di scambio:

$$v(t, T, s') > v(t, T, s'')\,, \quad t \le T \le s' < s''\,,$$

- Proprietà di monotonia:

$$v(t, T', s) < v(t, T'', s)\,, \quad t \le T' < T'' \le s\,,$$

che stabilisce la crescenza del prezzo rispetto all'inizio dell'orizzonte di scambio.

Prezzo a termine

Si indicherà con

$$V(t; T, x_s)$$

il prezzo a termine in t, per consegna in T, di x_s euro esigibili in s.

Come conseguenza del principio di arbitraggio, vale la proprietà di indipendenza dall'importo.

$$V(t; T, x_s) = x_s \, v(t, T, s) \, .$$

e la proprietà di linearità del prezzo:

$$V(t; T, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t, T, t_k) \, .$$

Tassi impliciti

Il tasso annuo di interesse dell'operazione a termine regolata dal prezzo unitario $v(t,T,s)$ è definito come:

$$i(t,T,s) = \left[\frac{1}{v(t,T,s)}\right]^{1/(s-T)} - 1\,.$$

Il tasso $i(t,T,s)$ è *implicito* nei tassi a pronti $i(t,T)$ e $i(t,s)$. Esprimendo i prezzi che compaiono nel Teorema dei prezzi impliciti in funzione dei tassi annui secondo la relazione:

$$v(t,T,s) = [1 + i(t,T,s)]^{-(s-T)}\,, \quad t \le T \le s\,,$$

si ha:

$$[1 + i(t,T,s)]^{-(s-T)} = \frac{[1 + i(t,s)]^{-(s-t)}}{[1 + i(t,T)]^{-(T-t)}}\,, \quad t \le T \le s\,.$$

ovvero, se sono trattati sul mercato a pronti gli zcb con scadenza in T e s, il tasso $i(t,T,s)$ è *implicito* nei tassi a pronti $i(t,T)$ e $i(t,s)$.

Esempio

Realtivamente ai seguenti prezzi (Esempio precedente)

$$v(0,0.25)=0.986\,,\quad v(0,1)=0.95\,,\quad v(0,0.25,1)=0.96\,.$$

si ha:

$$i(0,1)=\frac{1}{v(0,1)}-1=\frac{1}{0.95}-1=5.2632\%\,,$$

$$i(0,0.25)=\left[\frac{1}{v(0,0.25)}\right]^{1/0.25}-1=\left(\frac{1}{0.986}\right)^{4}-1=5.8016\%\,,$$

e risulta:

$$i(0,0.25,1)=\left(\frac{1.052632^{-(1-0)}}{1.058016^{-(0.25-0)}}\right)^{-1/(1-0.25)}-1=5.0843\%\,.$$

Avendo già ricavato il prezzo a termine $v(0,0.25,1)$ si avrebbe, più direttamente:

$$\begin{aligned}i(0,0.25,1)&=\left[\frac{1}{v(0,0.25,1)}\right]^{1/0.75}-1\\&=\left(\frac{1}{0.9634888}\right)^{4/3}-1=5.0843\%\,.\end{aligned}$$

Esempio

In un *Forward Rate Agreement* (fra) due agenti convengono, in $t = 0$, di garantirsi reciprocamente, riferendosi a un capitale unitario, un tasso di rendimento del 5.0843% per il periodo di 9 mesi che va dalla data $T = 0.25$ anni alla data $s = 1$ anno. Ciò equivale a garantirsi che il prezzo in $T = 0.25$ anni dello zcb unitario con maturity $s - T = 9$ mesi sia uguale a $v(0, 0.25, 1) = 0.9634888$.

La garanzia è ottenuta stipulando un'operazione a termine: uno dei due agenti (l'agente A) acquista a termine – e quindi l'altro agente (l'agente B) vende a termine – al prezzo di 0.9634888 euro lo zcb unitario con scadenza in s.

Se in T il prezzo dello zcb risulterà, per esempio, $v(T, s) = 0.96$ euro, se cioè il tasso di mercato risulterà $i(T, s) = 1/0.96 - 1 = 5.5938\%$ (e quindi superiore al tasso garantito), l'agente A verserà all'agente B la differenza positiva $v(t, T, s) - v(t, s) = 0.0034888$.

Viceversa se risulterà $v(t, s) > v(t, T, s)$.

Le strutture per scadenza implicite

Se si effettua il calcolo del prezzo a termine, o implicito, relativamente a ogni coppia di date contigue dello scadenzario $\mathbf{s}$, si ottiene la *struttura per scadenza dei prezzi impliciti* al tempo t:

$$v(t, t+k-1, t+k) = \frac{v(t, t+k)}{v(t, t+k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

La *struttura dei tassi impliciti* in vigore sul mercato al tempo t si ottiene calcolando, per $k = 1, 2, \ldots, m$, i tassi di interesse a termine uniperiodali:

$$i(t, t+k-1, t+k) = \frac{1}{v(t, t+k-1, t+k)} - 1 = \frac{v(t, t+k-1)}{v(t, t+k)} - 1.$$

Tra la struttura dei tassi a pronti e quella dei tassi impliciti intercorre una significativa relazione di dominanza. Risulta che la struttura dei tassi impliciti domina la struttura dei tassi a pronti nei periodi in cui la struttura a pronti è crescente, cioè se è:

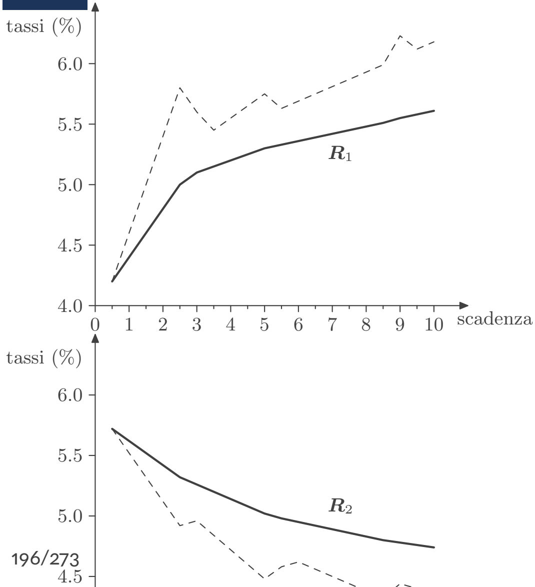
$$i(t, t+k) > i(t, t+k-1)$$

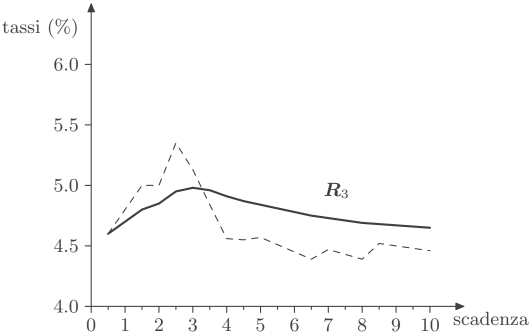
allora:

$$i(t, t+k-1, t+k) > i(t, t+k).$$

Il contrario accade se la struttura dei tassi a pronti è decrescente nel periodo considerato. Ne consegue che in tutte le zone in cui la struttura a pronti ha un comportamento non monotono, passando da un andamento crescente a uno decrescente (o viceversa) tra due successivi periodi, la struttura dei tassi impliciti dovrà "incrociare" quella dei tassi a pronti.

Strutture di tassi a pronti e impliciti





tassi (%)
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
R_3
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
scadenza

Table of Contents

Condizioni

Si consideri un titolo a cedola fissa emesso nell'istante t di valutazione, con valore facciale C, periodicitá τ, e m cedole di importo I. Si tratta quindi di un coupon bond che garantisce il flusso $\mathbf{x}$ di importi:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1} = I\,, \quad x_m = C + I\,,$$

sullo scadenzario $\mathbf{t}$ specificato dalle:

$$t_k = t + k\,\tau\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Si suppone che sia nota la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore in t.

Tasso interno di rendimento di titoli a cedola fissa

Dato che il prezzo di mercato del titolo è:

$$V(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k) = I \sum_{k=1}^{m} v(t, t + k\,\tau) + C\, v(t, t + m\,\tau)$$

si puó ricavare il tasso interno di rendimento (IR) del titolo rispetto al prezzo $V(t;\mathbf{x})$. Si tratta cioé di calcolare il tasso i^* tale che:

$$I \sum_{k=1}^{m} (1 + i^*)^{-(k\,\tau)} + C\,(1 + i^*)^{-(m\,\tau)} = V(t;\mathbf{x})\,;$$

se il tempo è misurato in anni, i^* sarà espresso su base annua. Questa equazione equivale a considerare l'equazione algebrica di grado m nell'incognita v:

$$I \sum_{k=1}^{m-1} v^k + (C + I)\, v^m - V(t;\mathbf{x}) = 0\,, \tag{1}$$

dove si è posto per comodità $v := (1 + i)^{-\tau}$.

$$I \sum_{k=1}^{m-1} v^k + (C+I)\, v^m - V(t;\mathbf{x}) = 0\,,$$

Dato che I e C sono positivi, il prezzo $V(t;\mathbf{x})$ deve essere positivo e i coefficienti cambiano quindi segno una sola volta. Ciò garantisce l'esistenza di un'unica soluzione positiva v^*; il tir si ottiene quindi come:

$$i^* = (v^*)^{-1/\tau} - 1\,.$$

Dato che tutti i fattori di sconto $v(t, t_k)$ debbono essere minori di 1, sarà $m\, I + C > V(t;\mathbf{x})$. Ciò assicura un valore di v^* minore di 1 e quindi un valore positivo di i^*.
Il tir può essere interpretato come la "media funzionale" dei tassi di struttura $i(t, t_k)$ (Chisini)

Tasso di parità di titoli a cedola fissa

Si consideri un coupon bond che garantisce il flusso $\mathbf{x}$ di importi:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1} = I\,, \quad x_m = C + I\,,$$

sullo scadenzario $\mathbf{t}$ specificato dalle:

$$t_k = t + k\,\tau\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Si supponga inoltre che sia nota la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore in t, o che siano almeno noti i fattori di sconto di mercato $v(t, t_k)$ sulle scadenze del flusso $\mathbf{x}$. Il prezzo di mercato del titolo è:

$$V(t; \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k) =$$

$$= I \sum_{k=1}^{m} v(t, t + k\,\tau) + C\, v(t, t + m\,\tau)$$

tasso di parità o par yield

Il valore $\bar{I}/C$ del tasso cedolare per cui il valore del titolo, calcolato in base alla struttura per scadenza in vigore al tempo t, coincide col valore di parità C

Affinché il titolo quoti alla pari deve essere:

$$\bar{I} \sum_{k=1}^{m} v(t, t + k\,\tau) + C\, v(t, t + m\,\tau) = C\,,$$

per cui il tasso di parità $\bar{I}/C$ ha espressione esplicita:

$$\bar{I}/C = \frac{1 - v(t, t + m\,\tau)}{\sum_{k=1}^{m} v(t, t + k\,\tau)}\,.$$

Osservazione. Il valore su base annua $\bar{p}$ del par yield può essere ottenuto anche con la logica dei tassi equivalenti in interessi composti, cioè come:

$$\bar{p} = \left(1 + \bar{I}/C\right)^{1/\tau} - 1\,.$$

Esempio

Si consideri in $t = 0$ il titolo con cedola che garantisce il flusso di pagamenti:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{5, 5, 105\}/\{1, 2, 3\}\,,$$

essendo il tempo misurato in anni. Se nel mercato è in vigore la seguente struttura:

$$v(0,1) = 0.952419, v(0,2) = 0.909373, v(0,3) = 0.870446,$$

il prezzo del titolo, per la proprietà di linearità sarà:

$$V(0;\mathbf{x}) = 5 \times v(0,1) + 5 \times v(0,2) + 105 \times v(0,3) = 100.70575\,.$$

Quindi il titolo è quotato sopra la pari.

Il tasso di parità risulta:

$$\bar{I}/C = \frac{1 - 0.870446}{0.952419 + 0.909373 + 0.870446} = 4.74170\%\,,$$

che coincide col tasso di parità su base annua $\overline{p}$, essendo $\tau = 1$. Quindi il titolo con cedola che garantisce il flusso:

$$\mathbf{x}'/\mathbf{t} = \{4.74170\,,\ 4.74170\,,\ 104.74170\}/\{1, 2, 3\}\,,$$

ha valore $V(0; \mathbf{x}') = 100$ per costruzione.

Table of Contents

Metodi di misurazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse

Contenuti

- La misurazione della struttura per scadenza come problema di algebra lineare
  - Il caso generale
  - Metodi basati sui tassi di parità
  - Interpolazione lineare
  - Tassi swap
  - Esercizi

Il caso generale

$$\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$$

scadenzario

$$\boldsymbol{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\}$$

Flusso pagamenti j-esimo titolo

$$V_j = V(t, \boldsymbol{x}_j) \quad j = 1, \dots, n$$

Prezzi dei titoli

Problema:

determinare

$$v_k = v(t, t_k) \quad k = 1, \dots, m$$

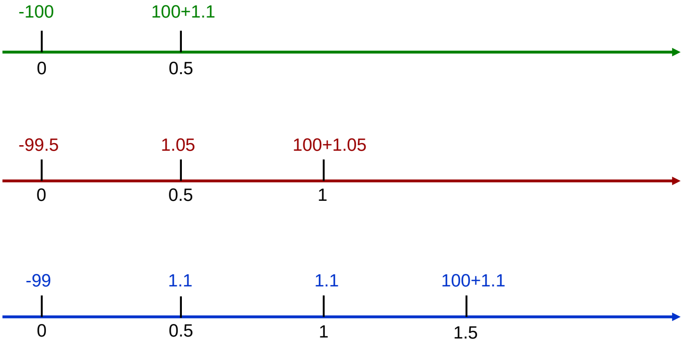
tali che

$$V_j = \sum_{k=1}^{m} x_{jk} v_k \quad j = 1, \dots, n$$

Esempio

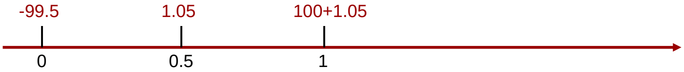
Al tempo t=0, sono quotati i seguenti titoli, tutti con nominale 100 euro:

- un TCF a sei mesi, con prezzo 100 euro, cedola semestrale e tasso nominale annuo 2.2%;
- un TCF a un anno, con tasso nominale annuo 2.1%, cedola semestrale e prezzo 99.5 euro;
- un TCF a un anno e mezzo, con cedola semestrale, prezzo 99 euro e tasso nominale annuo 2.2%.

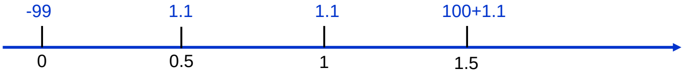


Esempio

$$100 = 101.1v(0,0.5\ )$$



$$99.5 = 1.05v(0,0.5) + 101.05v(0,1\ )$$



$$99 = 1.1v(0,0.5) + 1.1v(0,1\ ) + 101.1v(0,1.5)$$

Esempio

$$\begin{cases} 100 = 101.1v(0,0.5) \\ 99.5 = 1.05v(0,0.5) + 101.05v(0,1) \\ 99 = 1.1v(0,0.5) + 1.1v(0,1) + 101.1v(0,1.5) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 101.1 & 0 & 0 \\ 1.05 & 101.05 & 0 \\ 1.1 & 1.1 & 101.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0,0.5) \\ v(0,1) \\ v(0,1.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 99.5 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v(0,0.5) = \dfrac{100}{101.1} = 0.9891 \\ v(0,1) = \dfrac{99.5 - 1.05v(0,0.5)}{101.05} = 0.9744 \\ v(0,1.5) = \dfrac{99 - 1.1v(0,0.5) - 1.1v(0,1)}{101.1} = 0.9579 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni lineari

$$V_j = \sum_{k=1}^{m} x_{jk} v_k \quad j = 1, \dots, n$$

Prezzi dei titoli

Sistema di n equazioni lineari in m incognite

n numero di titoli
m numero di scadenze

$$X = \{x_{jk}, j = 1, \dots n \; e \; k = 1, \dots, m\}$$ **coefficienti**

$$\boldsymbol{v} = \{v_k, k = 1, \dots m\}$$ **incognite**

$$\boldsymbol{V} = \{V_j, j = 1, \dots, n\}$$ **termini noti**

$$X\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}$$

Esistenza e unicità della soluzione

$$X\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}$$

Matrice di dimensione n x m

$r(X) \leq \min(n, m)$ rango della matrice X

$n - r(X)$ numero di titoli ridondanti

$$\boxed{r(X) = n \leq m}$$

Il sistema è compatibile se: $r(X) = r(X|V) = n$

Il sistema è determinato se: $n = m$

Esempio

Si supponga che al tempo t = 0 siano trattati sul mercato i tre titoli

TCF_1={5, 5, 105}/{1, 2, 3}
TCF_2={4, 104}/{1, 2}
TCF_3 : {9, 109, 105}/{1, 2, 3}

Lo scadenzario comune è **t** = {1, 2, 3}

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 105 \\ 4 & 104 & 0 \\ 9 & 109 & 105 \end{pmatrix} \Rightarrow r(X) = 2$$

Supponiamo che sia:

$$V_1 = 99€ \quad V_2 = 98€ \quad \Rightarrow \quad V_3 = 99 + 98 = 197€$$

Esempio

$$X|V = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 105 & 99 \\ 4 & 104 & 0 & 98 \\ 9 & 109 & 105 & 197 \end{pmatrix} \Rightarrow r(X|V) = 2$$

Il sistema è compatibile

$$V_1 = 99€ \quad V_2 = 98€ \quad V_3 = 195€$$

$$X|V = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 105 & 99 \\ 4 & 104 & 0 & 98 \\ 9 & 109 & 105 & 195 \end{pmatrix} \Rightarrow r(X|V) = 3$$

Il sistema è incompatibile

Metodi basati sui tassi di parità

$$\boldsymbol{t} = \{k, k = 1, \dots, n\}$$

Al tempo t=0 si considerino n coupon bond
1° con scadenza in 1
2° con scadenza in 2
3° con scadenza in 3
…
n° con scadenza in n

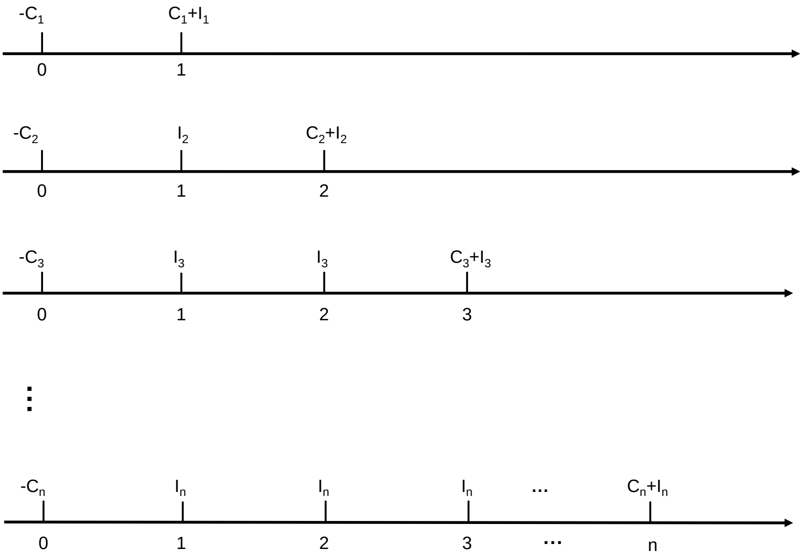
$\boxed{m_j = j, \ j=1,\dots,n}$

$\boxed{p_j , \ j=1,\dots,n}$

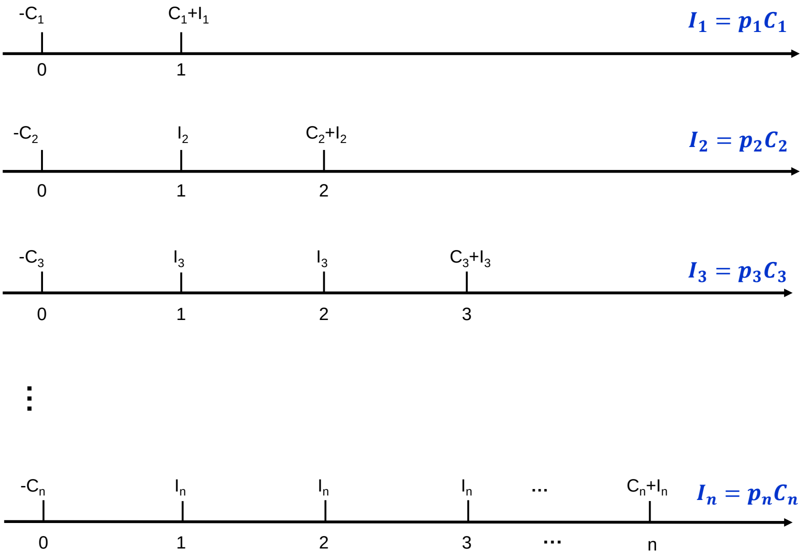
Sono quotati i tassi di parità di ciascun titolo

Se usiamo il tasso di parità come tasso cedolare
il titolo quota alla pari

I flussi

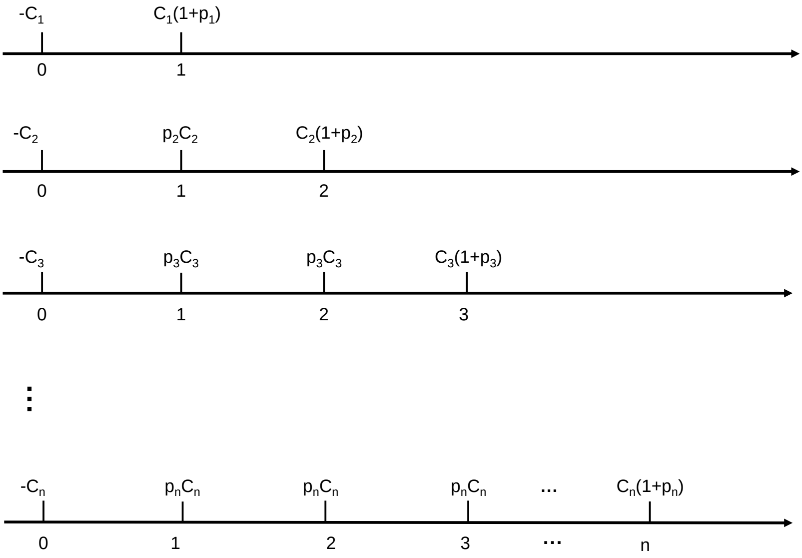

-C1
C1+I1
0
1
-C2
I2
C2+I2
0
1
2
-C3
I3
I3
C3+I3
0
1
2
3
-Cn
In
In
In
...
Cn+In
0
1
2
3
...
n

Le cedole



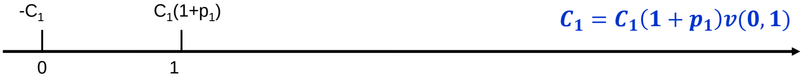
$-C_1$
C_1+I_1
0
1
$I_1 = p_1 C_1$
$-C_2$
I_2
C_2+I_2
0
1
2
$I_2 = p_2 C_2$
$-C_3$
I_3
I_3
C_3+I_3
0
1
2
3
$I_3 = p_3 C_3$
⋮
$-C_n$
I_n
I_n
I_n
…
C_n+I_n
0
1
2
3
…
n
$I_n = p_n C_n$

I flussi

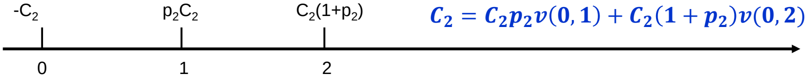


$-C_1$
$C_1(1+p_1)$
0
1
$-C_2$
p_2C_2
$C_2(1+p_2)$
0
1
2
$-C_3$
p_3C_3
p_3C_3
$C_3(1+p_3)$
0
1
2
3
$-C_n$
p_nC_n
p_nC_n
p_nC_n
...
$C_n(1+p_n)$
0
1
2
3
...
n

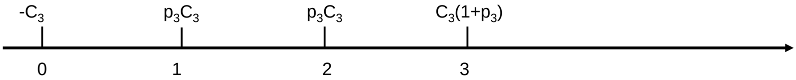
Equazione di parità



$$C_1 = C_1(1+p_1)v(0,1)$$

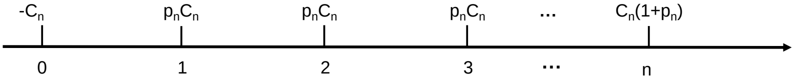


$$C_2 = C_2 p_2 v(0,1) + C_2(1+p_2)v(0,2)$$



$$C_3 = C_3 p_3 v(0,1) + C_3 p_3 v(0,2) + C_3(1+p_3)v(0,3)$$

$\vdots$



$$C_n = C_n p_n v(0,1) + C_n p_n v(0,2) + \cdots + C_n(1+p_n)v(0,n)$$

Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} C_1 = C_1(1+p_1)v(0,1) \\ C_2 = C_2 p_2 v(0,1) + C_2(1+p_2)v(0,2) \\ C_3 = C_3 p_3 v(0,1) + C_3 p_3 v(0,2) + C_3(1+p_3)v(0,3) \\ \quad\vdots \\ C_n = C_n p_n v(0,1) + C_n p_n v(0,2) + \cdots + C_n(1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = (1+p_1)v(0,1) \\ 1 = p_2 v(0,1) + (1+p_2)v(0,2) \\ 1 = p_3 v(0,1) + p_3 v(0,2) + (1+p_3)v(0,3) \\ \quad\vdots \\ 1 = p_n v(0,1) + p_n v(0,2) + \cdots + (1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 = (1+p_1)v(0,1) \\ 1 = p_2 v(0,1) + (1+p_2)v(0,2) \\ 1 = p_3 v(0,1) + p_3 v(0,2) + (1+p_3)v(0,3) \\ \quad \vdots \\ 1 = p_n v(0,1) + p_n v(0,2) + \cdots + (1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

$$\boxed{Xv = V}$$

$$\begin{pmatrix} 1+p_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & 1+p_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_j & p_j & \dots & 1+p_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n & \dots & p_n & \cdots & 1+p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0,1) \\ v(0,2) \\ \vdots \\ v(0,j) \\ \vdots \\ v(0,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti

$$X = \begin{pmatrix} 1+p_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & 1+p_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_j & p_j & \cdots & 1+p_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n & \cdots & p_n & \cdots & 1+p_n \end{pmatrix}$$

- L'indice di riga identifica il titolo
- L'indice di colonna identifica la scadenza
- Il titolo j-esimo scade in j
- k<j vuol dire che il titolo non è ancora scaduto
- k=j siamo alla data di scadenza del titolo
- k>j il titolo è scaduto

$$\begin{cases} x_{jk} = p_j & per \quad k < j \\ x_{jk} = 1 + p_j & per \quad k = j \\ x_{jk} = 0 & per \quad k > j \end{cases}$$

Esistenza e unicità della soluzione

$$X = \begin{pmatrix} 1+p_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & 1+p_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_j & p_j & \dots & 1+p_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n & \dots & p_n & \dots & 1+p_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r(X) = r(X|V) = n}}$$

Il sistema ammette una soluzione unica

La soluzione

$$\begin{cases} 1 = (1+p_1)v(0,1) \\ 1 = p_2 v(0,1) + (1+p_2)v(0,2) \\ 1 = p_3 v(0,1) + p_3 v(0,2) + (1+p_3)v(0,3) \\ \vdots \\ 1 = p_n v(0,1) + p_n v(0,2) + \cdots + (1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

$$v(0,1) = \frac{1}{1+p_1}$$

$$v(0,2) = \frac{1 - p_2 v(0,1)}{1+p_2}$$

$$v(0,3) = \frac{1 - p_3 v(0,1) - p_3 v(0,2)}{1+p_3} = \frac{1 - p_3 \sum_{j=1}^{2} v(0,j)}{1+p_3}$$

$$\vdots$$

$$v(0,k) = \frac{1 - p_k \sum_{j=1}^{k-1} v(0,j)}{1+p_k}$$

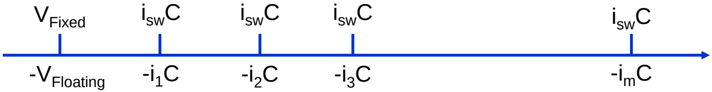
Il bootstrap

$$v(t,t+k) = \frac{1 - p_k \sum_{j=1}^{k-1} v(t,t+j)}{1+p_k}$$

$$i(t,t+k) = \left(\frac{1+p_k}{1 - p_k \sum_{j=1}^{k-1} v(t,t+j)}\right)^{\frac{1}{k}} - 1$$

Equazione del bootstrap

I tassi swap come tassi di parità

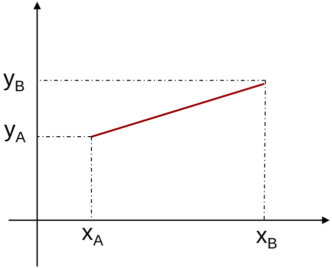


$$V_{Fixed} = V_{Floating}$$
$$V_{Floating} = C$$

$$\Rightarrow \quad V_{Fixed} = C \qquad i_{sw} = par\ yield$$

Interpolazione

E' una procedura approssimata che consente di ricavare da tabelle valori non riportati esplicitamente.

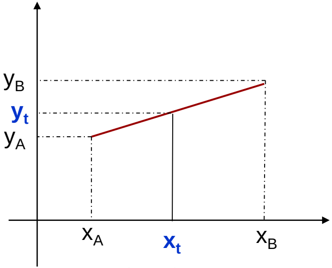


$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$y = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

Interpolazione

E' una procedura approssimata che consente di ricavare da tabelle valori non riportati esplicitamente.



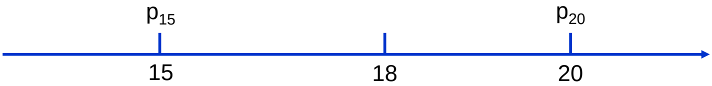
Valore da trovare

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$y = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

$$y_t = \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

Interpolazione



$$y_t = \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

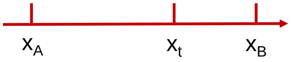
$$p_{18} = \frac{18 - 15}{20 - 15}(p_{20} - p_{15}) + p_{15}$$

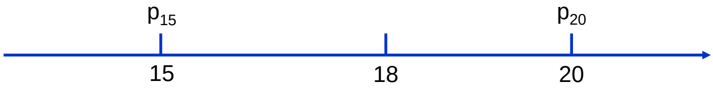
Interpolazione

$$y_t = \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A = \frac{x_t y_B - x_t y_A - x_A y_B + x_A y_A + x_B y_A - x_A y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{x_t y_B - x_t y_A - x_A y_B + x_B y_A}{x_B - x_A} = \frac{-x_t y_A + x_B y_A}{x_B - x_A} + \frac{x_t y_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{= \frac{x_B - x_t}{x_B - x_A} y_A + \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A} y_B}$$





$$p_{18} = \frac{20 - 18}{20 - 15} p_{15} + \frac{18 - 15}{20 - 15} p_{20}$$

Esempio

Si supponga che all'istante t = 0 siano osservati sul mercato i tassi di parità p1 = 3%, p2 = 4%, p3 = 5% relativi a tre titoli con cedola fissa annuale e maturity di 1, 2 e 3 anni. Determinare la struttura dei tassi di interesse.

titolo 1 : {103, 0, 0} / {1, 2, 3}
titolo 2 : {4, 104, 0} / {1, 2, 3}
titolo 3 : {5, 5, 105} / {1, 2, 3}

$$X = \begin{pmatrix} 103 & 0 & 0 \\ 4 & 104 & 0 \\ 5 & 5 & 105 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0.04 & 1.04 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 1.05 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0.04 & 1.04 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0,1) \\ v(0,2) \\ v(0,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v(0,1) = \frac{1}{1.03} = 0.9709$$

$$v(0,2) = \frac{1 - 0.04 \cdot 0.9709}{1.04} = 0.9242$$

$$v(0,3) = \frac{1 - 0.05 \cdot 0.9709 - 0.05 \cdot 0.9242}{1.05} = 0.8621$$

$$i(0,1) = \frac{1}{0.9709} - 1 = 3\%$$

$$i(0,2) = \left(\frac{1}{0.9242}\right)^{1/2} - 1 = 4.0202\%$$

$$i(0,3) = \left(\frac{1}{0.8621}\right)^{1/3} - 1 = 5.0689\%$$

Struttura ZCS

La struttura dei tassi a pronti ricavata dai tassi swap quotati con il bootstrap, è «completata» sulle scadenze inferiori all'anno con le quotazioni dei tassi del mercato monetario (tassi Euribor).

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti ricavata dai tassi swap è detta anche *struttura zero-coupon swap*.

Dal punto di vista di chi quota sono date, per ciascuna scadenza, le quotazioni:

- denaro (bid), quando chi quota paga fisso;
- lettera (ask), quando chi quota riceve fisso;
- **mid**: media aritmetica della quotazione denaro (più bassa) e della quotazione lettera (più alta).

Perciò si parla di strutture zcs denaro, lettera e mid.

Table of Contents

- La duration di Macaulay;
- momenti di secondo ordine;
- variazione relativa (semielasticità);
- elasticità;
- convexity;
- convessità relativa.

Premessa

Chi investe in un titolo a reddito fisso, quale un'obbligazione, nel tempo vedrá variare il valore del proprio investimento.

Il valore di mercato é soggetto a fluttuazioni, a causa delle variazioni delle condizioni del mercato, quali i tassi di interesse e la percezione della possibile insolvenza dell'emittente rispetto a qualche pagamento.

Ad ogni epoca, il valore di mercato di un'obbligazione é influenzato dai rendimenti correnti quotati sul mercato obbligazionario $\longrightarrow$ RISCHIO DI TASSO.

Scadenza

Maturity

$t_m \Rightarrow$ scadenza (*maturity*).
indica la data in cui il contratto si può considerare definitivamente concluso.

Vita a scadenza

$t_m - t \Rightarrow$ *vita a scadenza* (*time to maturity*), o *vita residua*.
rappresenta la durata complessiva dell'operazione di scambio.

trascurano l'effetto finanziario dovuto ai pagamenti intermedi e forniscono una caratterizzazione completa della distribuzione temporale delle poste solo nel caso di titoli privi di cedole.

1938 l’economista canadese *Frederick Macaulay*, nel suo libro *The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Proces in the United States since 1856* pubblicó uno studio particolareggiato sull’andamento dei tassi di ineteresse dal 1856 al 1938.

Secondo Macauley, “solo i prestiti a breve termine possono essere considerati assolutamente privi di rischio (di tasso)”. Macauley definí, quindi l’arco temporale rispetto al quale valutare l’assenza di rischio.

Esempio

Consideriamo due prestiti. Per entrambi la durata complessiva é 10 anni, l'importo iniziale é di 100 euro e il tasso effettivo di interesse su base annua é il 10%:

- un unico pagamento di 259.37 dopo 10 anni ($100 = 259.37 \cdot 1.1^{-10}$);
- un pagamento di 100 euro dopo 1 anno e uno di 23.60 dopo 10 anni ($100 = 100 \cdot 1.1^{-1} + 23.60 \cdot 1.1^{-10}$)

Macauley volle definire una misura in base alla quale il prestito 1 verrebbe classificato con "arco temporale piú lungo" rispetto al prestito 2, in quanto per il primo prestito "la maggior parte" del pagamento che restituisce il prestito é versata piú tardi.
Macauley chiamó questa misura temporare DURATA MEDIA FINANZIARIA.

Table of Contents

La duration di Macaulay

Si consideri il contratto finanziario $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Sia t l'istante di valutazione e $v(t,s)$ la struttura dei prezzi a pronti in vigore sul mercato al tempo t. La *duration* al tempo t di $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ è definita come:

$$D(t;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k)} \,.$$

La duration con struttura per scadenza piatta

Si consideri il contratto finanziario $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Sia t l'istante di valutazione e i il tasso annuo a pronti per tutte le scadenze.
La *duration* al tempo t di $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ è definita come:

$$D(t; \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}\,.$$

La duration di Macaulay

$$
\begin{aligned}
D(t;\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} \\
&= \frac{(t_1 - t)\, x_1\, v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + \frac{(t_m - t)\, x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} \\
&= (t_1 - t)\frac{x_1\, v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + (t_m - t)\frac{x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)}
\end{aligned}
$$

posto

$$
p_k = \frac{x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)}
$$

la duration si può anche scrivere:

$$
D(t;\mathbf{x}) = (t_1 - t)\, p_1 + \ldots + (t_m - t)\, p_m = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k\,,
$$

La duration di Macaulay

$$D(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k \qquad p_k = \frac{x_k\, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k)}$$

la duration è la media ponderata delle vite a scadenza delle poste del flusso, dove i pesi sono i valori attuali percentuali dei flussi futuri.

Il peso p_k é il contributo relativo del pagamento effettuato al tempo t_k al valore attuale complessivo dei pagamenti del titolo.

A paritá di valore attuale complessivo (il denominatore), tanto piú elevato il pagamento effettuato al tempo t_k, tanto piú elevato sará il suo contributo al valore attuale complessivo e dunque tanto piú elevato sará p_k. Questo comporterá un maggior peso assegnato all'epoca t_k rispetto alle altre epoche.

$$D(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k\,,$$

$D(t;\mathbf{x})$ si misura in unità temporali.

Si può pensare a $D(t;\mathbf{x})$ come distanza da t del baricentro della distribuzione temporale delle masse p_k; fornisce cioè il *momento del primo ordine* della distribuzione $\{p_k\}$.

Ne risulta immediata la proprietà:

$$t_1 - t \leq D(t;\mathbf{x}) \leq t_m - t\,,$$

dato che il baricentro non può essere esterno al segmento sul quale sono distribuite le masse.

Duration di uno ZCB

$$D(t;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)\,x_k\,v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}\,x_k\,v(t,t_k)} = \frac{(t_m - t)\,x_m\,v(t,t_m)}{x_m\,v(t,t_m)} = t_m - t$$

L'uguaglianza della duration con la vita a scadenza di una delle poste di $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ può aversi solo nel caso degenere di "massa concentrata", cioè di un flusso di tipo zcb.

Esempio

Si consideri il flusso:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{10, 20, 30\}/\{1, 2.5, 3.3\} .$$

Sia data la struttura per scadenza dei prezzi:

$$v(0, 1) = 0.9512$$
$$v(0, 2.5) = 0.7316$$
$$v(0, 3.3) = 0.5801$$

Calcolare la duration del flusso.

Il valore attuale del flusso risulta:

$$V(0;\mathbf{x}) = 10 \times 0.9512 + 20 \times 0.7316 + 30 \times 0.5801 =$$

$$= 41.547 \text{ euro}\,;$$

quindi i pesi p_k sono espressi da:

$$\begin{aligned} p_1 &= 10 \times 0.9512/41.547 = 0.22895\,, \\ p_2 &= 20 \times 0.7316/41.547 = 0.35218\,, \\ p_3 &= 30 \times 0.5801/41.547 = 0.41887\,. \end{aligned}$$

Il valore della duration risulta:

$$D(0;\mathbf{x}) = 1 \times 0.22895 + 2.5 \times 0.35218 + 3.3 \times 0.41887 =$$

$$= 2.492 \text{ anni}\,.$$

Se si considerasse il flusso composto dall'unica posta $x_1 = 10$ in $t_1 = 1$, cioè lo zcb annuale con valore facciale di 10 euro, il valore attuale sarebbe:

$$V(0; \mathbf{x}) = 10\, v(0, 1) = 10 \times 0.9512 = 9.512 \text{ euro}\,;$$

si avrebbe l'unico peso:

$$p_1 = 9.512/9.512 = 1\,,$$

e la duration risulterebbe $D(0; \mathbf{x}) = 1 \times 1 = 1$ anno; sarebbe cioè uguale alla vita a scadenza $t_1 - t$ del titolo, indipendentemente dalla struttura dei tassi.

Esempio

Sia in vigore sul mercato, al tempo $t = 0$, la struttura per scadenza dei tassi di interesse:

$$
\begin{aligned}
i(0,1) &= 4.9958, \\
i(0,2) &= 4.8646, \\
i(0,3) &= 4.7336 \\
i(0,4) &= 4.6028 \\
i(0,5) &= 4.4721
\end{aligned}
$$

Si calcoli in corrispondenza la duration del titolo a cedola fissa che garantisce il flusso di pagamenti:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{6, 6, 6, 6, 106\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(tempi misurati in anni).

Poniamo $t = 0$. $m = 5$. La duration può essere scritta come:

$$D(t;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{5} k\, x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k}}{\sum_{k=1}^{5} x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k}} \,,$$

Il valore attuale del flusso, cioè il denominatore, è:

$$V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{5} x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k} = 106.57844 \text{ euro} \,.$$

La duration risulta:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{5} k\, x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k}}{106.57844} = 4.4869 \text{ anni} \,.$$

□

Esempio

Il flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ utilizzato nell'esempio precedente caratterizza un titolo a cedola fissa con scadenza quinquennale, valore facciale di 100 euro e cedola annuale uguale a 6 euro.

Dato che il tasso nominale di questo titolo (6%) è uniformemente più elevato della struttura dei tassi usata per la valutazione, il valore attuale risulta notevolmente superiore al valore di parità (100 euro).

Se si considera, al contrario, un titolo con bassa cedola (un "deep discount bond"), caratterizzato a esempio dal flusso:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{1, 1, 1, 1, 101\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}\,,$$

il valore attuale scende sotto la parità, essendo $V(0; \mathbf{x}) = 84.72329$, e la duration risulta $D(0; \mathbf{t}) = 4.8924$; approssima cioè (per difetto) la duration del titolo quinquennale a cedola nulla.

La duration con struttura piatta

Ritorniamo un attimo alla duration con struttura piatta (*flat yield duration*):

$$D(t; \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}\,.$$

Nei casi in cui è possibile ricavare, unico, il tasso interno di rendimento i^* del flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ sulla base del prezzo di mercato, la duration calcolata con struttura piatta al livello i^* fornisce una soddisfacente approssimazione della duration calcolata sulla struttura.

Momenti di secondo ordine

Momento di secondo ordine, o *duration di secondo ordine*:

$$D^{(2)}(t;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2 \, x_k \, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, v(t, t_k)} \,,$$

o, con notazione più compatta, dalla:

$$D^{(2)}(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2 \, p_k \,.$$

La duration di secondo ordine esprime la media pesata dei quadrati degli “scarti temporali” $t_k - t$ e fornisce quindi una *misura di dispersione temporale* del flusso $\mathbf{x}$ rispetto a t.

Dato che $x_k \geq 0$, $D^{(2)}(t;\mathbf{x})$ non può assumere valori negativi:

$$0 \leq (t_1 - t)^2 \leq D^{(2)}(t;\mathbf{x}) \leq (t_m - t)^2 \,,$$

e coincide con il quadrato della vita a scadenza di una delle poste di $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ solo nel caso di massa concentrata.

La duration di secondo ordine ha dimensioni del tipo tempo^2, dato che esprime una media di tempi al quadrato. Calcolandone la radice quadrata, si definisce l'indice temporale:

$$\sqrt{D^{(2)}(t;\mathbf{x})} \,,$$

noto come *dispersione temporale* del flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$, che ha per dimensioni un tempo.

Analogia fisica

$D^{(2)}(t;\mathbf{x})$ rappresenta il momento d'inerzia della distribuzione di masse $\{p_k\}$, qualora questa fosse pensata in rotazione intorno a un asse perpendicolare all'asse dei tempi e passante per il punto t.

Risulta quindi intuitivo che il momento d'inerzia, che esprime la tendenza del sistema di masse a conservare la propria velocità di rotazione, risulta tanto più elevato quanto più le masse risultano "lontane" tra loro.

Table of Contents

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \,,$$

struttura dei rendimenti piatta:

$$V(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \,(1+i)^{-(t_k-t)} \,,$$

Considerare variazioni di i significa ipotizzare variazioni dello stato del mercato.

$$x_k \geq 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,, \exists k : x_k > 0\,,$$

Si ponga $t = 0$.

$$V(0; \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{-\delta t_k}\,,$$

che fornisce il prezzo del flusso in termini del tasso di valutazione i, o, equivalentemente, dell'intensità istantanea di interesse $\delta = \log(1+i)$.

Una volta fissato il flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$, studiamo il prezzo V al variare di i, o di δ, (ipotizzando un mercato che evolve per strutture piatte).

$$V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}\ ,$$

Risulta:

$$V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{-\delta t_k}\,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

$$V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}\,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

e, analogamente:

$$V(\delta) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{\delta\to\infty} V(\delta) = 0\,.$$

$$V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}\,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

e, analogamente:

$$V(\delta) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{\delta\to\infty} V(\delta) = 0\,.$$

La derivata prima e seconda rispetto a i hanno la forma:

$$V'(i) = -\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,(1+i)^{-t_k-1}\,,$$

$$V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k \, e^{-\delta t_k} \,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k \,, \quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

e, analogamente:

$$V(\delta) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k \,, \quad \lim_{\delta\to\infty} V(\delta) = 0\,.$$

La derivata prima e seconda rispetto a i hanno la forma:

$$V'(i) = -\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \,(1+i)^{-t_k-1} \,,$$

m

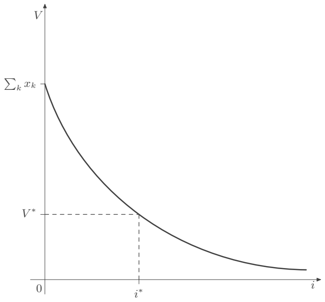
mentre quelle rispetto a δ sono espresse dalle:

$$V'(\delta) = -\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, e^{-\delta t_k}\ ,$$

$$V''(\delta) = \sum_{k=1}^{m} t_k^2\, x_k\, e^{-\delta t_k}\ .$$

La funzione $V(i)$ (la funzione $V(\delta)$)

- assume solo valori positivi;
- coincide con la somma delle poste per $i = 0$ (per $\delta = 0$);
- è funzione strettamente decrescente e convessa di i (di δ).



Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Risulta:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k}}$$

Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Risulta:

$$\begin{aligned}\frac{V'(i)}{V(i)} &= -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-t_k}} \\ &= -\frac{1}{1+i}\,\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-t_k}}\end{aligned}$$

Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Risulta:

$$\begin{aligned}
\frac{V'(i)}{V(i)} &= -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-t_k}} \\
&= -\frac{1}{1+i}\,\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-t_k}} \\
&= -\frac{1}{1+i}\, D(0;\mathbf{x})
\end{aligned}$$

e:

$$\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{-\delta t_k}} = -D(0; \mathbf{x})\,.$$

La variazione relativa è strettamente collegata alla duration del flusso calcolata in base a una struttura piatta; ed è nota come *modified duration*.
Nei casi in cui la semielasticità viene definita rispetto a δ, si ha la perfetta coincidenza (a meno del segno) col concetto di flat yield curve duration.

Convexity

È definita come:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\,(t_k+1)\,x_k\,(1+i)^{-t_k-2}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k}}\,,$$

La *convexity* del prezzo è una misura di convessità espressa in unità di capitale.

Per la convexity rispetto a δ si ha:

$$\frac{V''(\delta)}{V(\delta)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k^2\,x_k\,e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}} = D^{(2)}(0;\mathbf{x})\,.$$

La convessità della funzione prezzo risulta quindi collegata con gli indici di dispersione. In particolare, la convexity, espressa come funzione dell'intensità δ, coincide con la duration di secondo ordine del flusso $\mathbf{x}/\mathbf{t}$.

Convessità relativa

È definita come:

$$\frac{V''(i)}{V'(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\,(t_k+1)\,x_k\,(1+i)^{-t_k-2}}{\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,(1+i)^{-t_k-1}}\,,$$

La convessità relativa, nota anche come *volatility convexity*, esprime la convessità della funzione prezzo in unità di variazione del prezzo.

Per la convessità relativa rispetto a δ si ha:

$$\frac{V''(\delta)}{V'(\delta)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k^2\,x_k\,e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,e^{-\delta t_k}} = -\frac{D^{(2)}(0;\mathbf{x})}{D(0;\mathbf{x})}$$

e quindi è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra duration del primo ordine e duration del secondo ordine di $\mathbf{x}/\mathbf{t}$.

Esempio

Si consideri il titolo che garantisce il flusso:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{5, 5, 5, 105\}/\{1, 2, 3, 4\}\,.$$

Con riferimento a una struttura piatta al livello $i = 5\%$ annuo, cioè $\delta = \log 1.05 = 0.04879$ anni^{-1}, negli esempi precedenti si è ricavato, in $t = 0$:

$$V(0;\mathbf{x}) = 100\,;\ \ D(0;\mathbf{x}) = 3.72325\,;\quad D^{(2)}(0;\mathbf{x}) = 14.43915\,.$$

Rispetto allo stesso valore di i e di δ, si ricava la variazione relativa:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{1.05} \times 3.72325 = -3.54595\,,$$
$$\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -3.72325\,,$$

Si ricava la convexity:

$$\begin{aligned}
\frac{V''(i)}{V(i)} &= \frac{1}{(1+i)^2}\left[D^{(2)}(0,\mathbf{x}) + D(0;\mathbf{x})\right] \\
&= \frac{1}{1.05^2} \times (14.43915 + 3.72325) = 16.47383\,, \\
\frac{V''(\delta)}{V(\delta)} &= 14.43915\,,
\end{aligned}$$

e la convessità relativa:

$$\begin{aligned}
\frac{V''(i)}{V'(i)} &= -\frac{1}{1+i}\left[\frac{D^{(2)}(0;\mathbf{x})}{D(0;\mathbf{x})} + 1\right] \\
&= -\frac{1}{1.05} \times \left(\frac{14.43915}{3.72325} + 1\right) = -4.64582\,, \\
\frac{V''(\delta)}{V'(\delta)} &= -\frac{D^{(2)}(0;\mathbf{x})}{D(0;\mathbf{x})} = -3.87811\,.
\end{aligned}$$

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\mathbf{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\mathbf{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Per $\Delta i = 0.01$, si ha $\frac{1}{0.01} = 100$ e quindi:

$$D(0;\mathbf{x}) \approx -100\,\frac{\Delta V}{V}\,.$$

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\mathbf{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Per $\Delta i = 0.01$, si ha $\frac{1}{0.01} = 100$ e quindi:

$$D(0;\mathbf{x}) \approx -100\,\frac{\Delta V}{V}\,.$$

Si può quindi affermare, in via approssimata, che se il titolo che garantisce il flusso $\mathbf{x}$ ha duration D, a seguito di un incremento di un punto percentuale del tasso di valutazione subirà una perdita di valore di circa D punti percentuali.

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\mathbf{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Per $\Delta i = 0.01$, si ha $\frac{1}{0.01} = 100$ e quindi:

$$D(0;\mathbf{x}) \approx -100\,\frac{\Delta V}{V}\,.$$

Si può quindi affermare, in via approssimata, che se il titolo che garantisce il flusso $\mathbf{x}$ ha duration D, a seguito di un incremento di un punto percentuale del tasso di valutazione subirà una perdita di valore di circa D punti percentuali.

La duration di un titolo esprime approssimativamente la perdita percentuale di prezzo subìta per un aumento dell'1% del tasso di interesse.

Osservazione

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due flussi (non necessariamente definiti sullo stesso scadenzario)
- valutazione in base a una struttura piatta

Osservazione

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due flussi (non necessariamente definiti sullo stesso scadenzario)
- valutazione in base a una struttura piatta

Supponiamo che le curve di prezzo dei due flussi nel piano (δ, V) siano tangenti tra loro per un valore δ^*

Osservazione

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due flussi (non necessariamente definiti sullo stesso scadenzario)
- valutazione in base a una struttura piatta

Supponiamo che le curve di prezzo dei due flussi nel piano (δ, V) siano tangenti tra loro per un valore δ^* allora nel punto di ascissa δ^* i due flussi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ avranno lo stesso prezzo e stessa duration ($V'(\delta^*, \mathbf{x}) = V'(\delta^*, \mathbf{y})$).

In generale, i flussi avranno invece diversa convexity, saranno cioè caratterizzati da un diverso indice di dispersione.

Esempio

Si ponga $t = 0$ e si consideri lo scadenzario:

$$\mathbf{t} = \{1, 2, \ldots, 29, 30\}\,,$$

essendo il tempo misurato in anni. Sulle date di $\mathbf{t}$, si considerino i flussi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \{\, a_5 = 164.88\,,\;\; a_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 5 \,\}\,,\\
\mathbf{b} &= \{\, b_1 = 55.26\,,\;\; b_9 = 122.98\,,\;\; b_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 9 \,\}\,,\\
\mathbf{c} &= \{\, c_1 = 95.28\,,\;\; c_{30} = 277.04\,,\;\; c_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 30 \,\}\,.
\end{aligned}$$

Esempio

Si ponga $t = 0$ e si consideri lo scadenzario:

$$\mathbf{t} = \{1, 2, \ldots, 29, 30\} \, ,$$

essendo il tempo misurato in anni. Sulle date di $\mathbf{t}$, si considerino i flussi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \{\, a_5 = 164.88 \, , \;\; a_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 5 \,\} \, , \\
\mathbf{b} &= \{\, b_1 = 55.26 \, , \;\; b_9 = 122.98 \, , \;\; b_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 9 \,\} \, , \\
\mathbf{c} &= \{\, c_1 = 95.28 \, , \;\; c_{30} = 277.04 \, , \;\; c_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 30 \,\} \, .
\end{aligned}$$

Per $\delta = 0.1$ anni^{-1} i tre flussi hanno stesso valore attuale, uguale a 100, e stessa duration (5 anni).

Fissato il prezzo $V^* = 100$, il tasso $i^* = e^{0.1} - 1 = 10.517\%$ rappresenta il corrispondente tasso interno di rendimento.

Fissato il prezzo $V^* = 100$, il tasso $i^* = e^{0.1} - 1 = 10.517\%$ rappresenta il corrispondente tasso interno di rendimento.

Il flusso $\mathbf{c}$ è quello con convexity più alta, mentre il flusso $\mathbf{a}$ (corrispondente a un titolo a cedola nulla) ha la convexity minima.

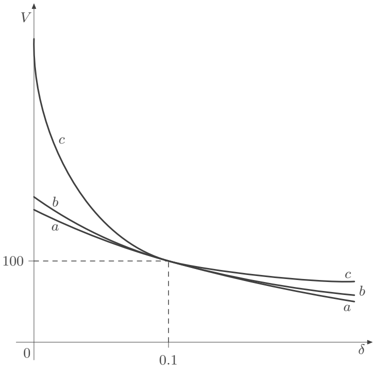


Table of Contents

Duration e dispersione di portafogli

Si considerino, al tempo t, gli n flussi non nulli:

$$\mathbf{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

definiti sullo scadenzario comune:

$$\mathbf{t}_j = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

essendo $t \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$.

Duration e dispersione di portafogli

Si considerino, al tempo t, gli n flussi non nulli:

$$\mathbf{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

definiti sullo scadenzario comune:

$$\mathbf{t}_j = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

essendo $t \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. A partire da questi flussi è sempre possibile costruire un portafoglio:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

contenente α_j unità del titolo $\mathbf{x}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. È significativo considerare l'insieme dei flussi $\mathbf{x}_j$ come un *paniere*, dal quale viene selezionato il portafoglio α.

Il paniere può essere formalmente rappresentato dalla matrice $n \times m$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Il paniere può essere formalmente rappresentato dalla matrice $n \times m$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Il flusso $\mathbf{z}$ dei pagamenti generati dal portafoglio si ottiene sommando, per la generica scadenza k, tutte le poste esigibili in t_k dei titoli del paniere, prese secondo la relativa quota di composizione. Si ha cioè:

$$\mathbf{z}/\mathbf{t} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

essendo:

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, x_{jk} \, , \quad k = 1, 2, \ldots, m \, .$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t; \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t, t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t, t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, x_{jk} \right] =$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\, \alpha_j\, x_{jk}$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\, \alpha_j\, x_{jk}$$

Invertendo l'ordine delle operazioni di somma, si può anche scrivere:

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\, \alpha_j\, x_{jk}$$

Invertendo l'ordine delle operazioni di somma, si può anche scrivere:

$$V(t;\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \left[\sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, x_{jk}\right]$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\, \alpha_j\, x_{jk}$$

Invertendo l'ordine delle operazioni di somma, si può anche scrivere:

$$V(t;\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[\sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, x_{jk}\right] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, V(t;\mathbf{x}_j)$$

Il valore attuale del portafoglio può quindi essere calcolato a partire dal valore dei flussi componenti, effettuandone la combinazione lineare con coefficienti uguali alle quote di composizione.

La durata media finanziaria del generico flusso $\mathbf{x}_j$ é:

$$D(t; \mathbf{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t, t_k)}{V(t; \mathbf{x}_j)} \ ,$$

La durata media finanziaria del generico flusso $\mathbf{x}_j$ é:

$$D(t;\mathbf{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{x}_j)} \,,$$

e la durata media finanziaria del flusso $\mathbf{z}$ generato dal portafoglio α è:

$$D(t;\mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, z_k\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{z})} \,.$$

La durata media finanziaria del generico flusso $\mathbf{x}_j$ é:

$$D(t; \mathbf{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t, t_k)}{V(t; \mathbf{x}_j)} \,,$$

e la durata media finanziaria del flusso $\mathbf{z}$ generato dal portafoglio α è:

$$D(t; \mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, z_k\, v(t, t_k)}{V(t; \mathbf{z})} \,.$$

Si ha:

$$D(t; \mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] v(t, t_k)}{V(t; \mathbf{z})}$$

La durata media finanziaria del generico flusso $\mathbf{x}_j$ é:

$$D(t;\mathbf{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{x}_j)}\,,$$

e la durata media finanziaria del flusso $\mathbf{z}$ generato dal portafoglio α è:

$$D(t;\mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, z_k\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{z})}\,.$$

Si ha:

$$D(t;\mathbf{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right]\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{z})}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \left[\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)\right]}{V(t;\mathbf{z})}\,.$$

moltiplico e divido per $V(t;\mathbf{x}_j)$

$$D(t;\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \frac{V(t;\mathbf{x}_j)}{V(t;\mathbf{z})} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{x}_j)} \,,$$

moltiplico e divido per $V(t;\mathbf{x}_j)$

$$D(t;\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \frac{V(t;\mathbf{x}_j)}{V(t;\mathbf{z})} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{x}_j)} \, ,$$

posto:

$$p_j = \frac{\alpha_j \, V(t;\mathbf{x}_j)}{V(t;\mathbf{z})} \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

moltiplico e divido per $V(t; \mathbf{x}_j)$

$$D(t; \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{V(t; \mathbf{x}_j)}{V(t; \mathbf{z})} \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t, t_k)}{V(t; \mathbf{x}_j)},$$

posto:

$$p_j = \frac{\alpha_j\, V(t; \mathbf{x}_j)}{V(t; \mathbf{z})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

si ha

$$D(t; \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, D(t; \mathbf{x}_j)$$

Le quantità p_j sono interpretabili come dei pesi che esprimono il valore attuale del flusso $\alpha_j\, \mathbf{x}_j$ (cioè del contributo fornito dal flusso $\mathbf{x}_j$ alla formazione del flusso di portafoglio $\mathbf{z}$) espresso in percentuale del valore attuale dell'intero portafoglio.

Rendite a rate costanti

$t = 0$, rendita $\mathbf{r}$ (immediata)posticipata di durata m anni, con rate annue costanti R.
$x_k = R$ e $t_k = k$, per $k = 1, 2, \ldots, m$.

$$D(0; \mathbf{r}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} k\,(1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k}}$$

indipendente dal valore della rata R. Il denominatore è il valore attuale $a_{\overline{m}|i}$ di una rendita con rate unitarie. Il numeratore, che si indicherà col simbolo $d_{\overline{m}|i}$, viene a volte indicato come *dollar duration* della rendita unitaria $\mathbf{r}$.

Moltiplicando e dividendo per $(1 - v)$ si ottiene:

$$d_{\overline{m}|i} = \sum_{k=1}^{m} k\, v^k = \frac{1}{1-v} \sum_{k=1}^{m} (1-v)\, k\, v^k = \frac{1}{1-v} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(k\, v^k - k\, v^{k+1} \right) \right] .$$

Sviluppando le sommatorie e cancellando i termini di segno opposto si ottiene:

$$d_{\overline{m}|i} = \frac{1}{1-v} \left[v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + mv^m \right] +$$

$$- \frac{1}{1-v} \left[v^2 + 2v^3 + \cdots + (m-1)v^m + m\, v^{m+1} \right]$$

$$= \frac{1}{1-v} \left(\sum_{k=1}^{m} v^k - m\, v^{m+1} \right) .$$

Utilizzando ancora l'espressione della somma di m termini in progressione geometrica con ragione v si può anche scrivere:

$$d_{\overline{m}|i} = \frac{1}{1-v}\left(v\frac{1-v^m}{1-v} - m\,v^{m+1}\right) = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^m}{1-v} - m\,v^m\right)$$

Risulta quindi:

$$D(0;\mathbf{r}) = \frac{d_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} = \frac{\frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^m}{1-v} - m\,v^m\right)}{v\,\frac{1-v^m}{1-v}}$$

$$= \frac{\frac{1-v^m}{1-v} - m\,v^m}{1-v^m} = \frac{1}{1-v} - \frac{m\,v^m}{1-v^m}$$

Risulta quindi:

$$D(0;\mathbf{r}) = \frac{1}{1-v} - \frac{m\,v^m}{1-v^m}\,,$$

o anche, in termini di tasso:

$$D(0;\mathbf{r}) = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1}\,.$$

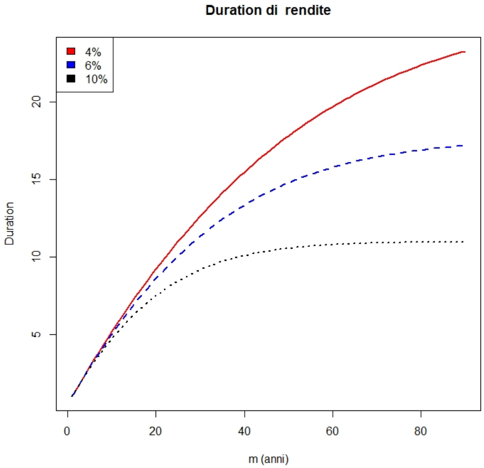
Si deduce che la duration della rendita $\mathbf{r}$ è una funzione decrescente del tasso di valutazione e è funzione crescente del numero di rate (cioè della maturity del flusso $\mathbf{r}$). Risulta forse meno evidente il fatto che la duration non cresce illimitatamente al crescere della durata. Dato che è:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{(1+i)^m - 1} = 0\,,$$

si ricava che il grafico della $D(0;\mathbf{r})$ in funzione di m presenta un asintoto orizzontale al livello $(1+i)/i$. Questo valore può essere interpretato come la duration di una rendita perpetua posticipata.

Andamento della Duration di una rendita

In figura é riportato il comportamento della duration di una rendita al variare del numero di rate e del tasso di interesse



Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso $\mathbf{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,,\;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\; k = 1, 2, \ldots, m$.

Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso $\mathbf{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,, \;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k, \;\; k = 1, 2, \ldots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, è espressa dalla:

$$D(0; \mathbf{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^{m} \, k\,(1+i)^{-k} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} + C\,(1+i)^{-m}}\,,$$

Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso $\mathbf{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,,\;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\;\; k = 1, 2, \dots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, è espressa dalla:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^{m} k\,(1+i)^{-k} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} + C\,(1+i)^{-m}}\,,$$

che, ha la forma esplicita:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{I\,d_{\overline{m}|i} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I\,a_{\overline{m}|i} + C\,(1+i)^{-m}}$$

Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso $\mathbf{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,,\;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\;\; k = 1, 2, \ldots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, è espressa dalla:

$$D(0; \mathbf{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^{m} \, k \, (1+i)^{-k} + m \, C \, (1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} + C \, (1+i)^{-m}}\,,$$

che, ha la forma esplicita:

$$D(0; \mathbf{x}) = \frac{I \, d_{\overline{m}|i} + m \, C \, (1+i)^{-m}}{I \, a_{\overline{m}|i} + C \, (1+i)^{-m}}$$

Evidentemente il titolo a cedola fissa $\mathbf{x}$ è equivalente a un portafoglio composto da una rendita $\mathbf{I}$ posticipata con m rate annue I e da uno zcb unitario con maturity m e valore facciale C.

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\, C\, v^m}{I\, a_{\overline{m}|i} + C\, v^m}$$

Tenuto conto che:

$$V(0;\mathbf{x}) = V(0;\mathbf{I}) + C\, v(0,m) = I\, a_{\overline{m}|i} + C\, v^m$$

Si può scrivere:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\, C\, v^m}{V(0;\mathbf{x})} = \frac{I\, d_{\overline{m}|i}}{V(0;\mathbf{x})} + \frac{m\, C\, v^m}{V(0;\mathbf{x})}$$

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\, C\, v^m}{V(0;\mathbf{x})} = \frac{I\, d_{\overline{m}|i}}{V(0;\mathbf{x})} + \frac{m\, C\, v^m}{V(0;\mathbf{x})}$$

si può scrivere:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i}}{V(0;\mathbf{I})}\,\frac{V(0;\mathbf{I})}{V(0;\mathbf{x})} + \frac{m\, C\, v(0,m)}{C\, v(0,m)}\,\frac{C\, v(0,m)}{V(0;\mathbf{x})}\,,$$

cioè:

$$D(0;\mathbf{x}) = D(0;\mathbf{I})\,\frac{V(0;\mathbf{I})}{V(0;\mathbf{x})} + m\,\frac{C\, v(0,m)}{V(0;\mathbf{x})}$$

Quindi la duration del titolo a cedola fissa può essere ricavata come media pesata della duration $D(0;\mathbf{I})$ del flusso cedolare $\mathbf{I}$, e della duration m dello zcb che corrisponde al rimborso del valore nominale C. Come pesi vanno utilizzati i valori attuali percentuali di $\mathbf{I}$ e dello zcb, calcolati col tasso di valutazione i.

Andamento della Duration

In figura é riportato il comportamento della duration di un TCF al variare del il tasso cedolare e della maturity m e della relazione tra il tasso cedolare e il tasso di interesse.

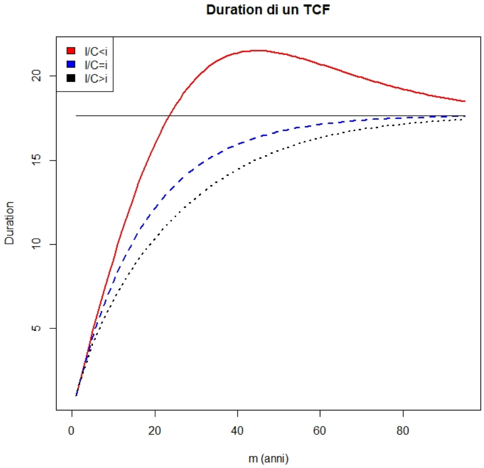


Table of Contents

Consideriamo un titolo a cedola fissa espresso dal vettore di importi:

$$\mathbf{x} = \{I, I, \dots, C+I\} \,,$$

sullo scadenzario:

$$\mathbf{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \,.$$

Ricordiamo che si definisce

- *tasso cedolare* del titolo = I/C;
- *tasso nominale* (annuo) dell'obbligazione = la somma delle le cedole pagate in un anno divisa per C = tasso cedolare x numero annuo di coupon;
- *rateo di interesse* al tempo t = l'importo A ottenuto moltiplicando il valore della cedola I per la frazione del periodo di godimento cedola già trascorso alla data t di valutazione

  $$A = I\,\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \,.$$

  con $t_0 \leq t \leq t_1$;

- “corso *tel quel*” = prezzo P;
- “corso secco” $Q = P - A$ = prezzo riportato nei listini nel mercato secondario;
- *scarto di emissione* = per un obbligazione emessa in t_0 con prezzo di emissione (corso secco) Q_0, scadenza in t_m e valore di rimborso Q_m, lo *scarto di emissione* è definito come:

$$S^E(t_0, t_m) := Q_m - Q_0;$$

e lo scarto di emissione di competenza di un intervallo temporale $[t', s]$ contenuto in $[t_0, t_m]$, nel caso di legge lineare, è definito da:

$$S^E(t', s) = S^E(t_0, t_m)\frac{s - t'}{t_m - t_0} = \frac{Q_m - Q_0}{t_m - t_0}(s - t').$$

Le obbligazioni sono tipicamente soggette a imposizione fiscale.
Sono assoggettati al prelievo fiscale i redditi che costituiscono la remunerazione fornita dall'obbligazione (scarto di emissione per i Bot cedole per i Btp).
Per gli interessi percepiti al di fuori di un'impresa commerciale è prevista l'applicazione di una *imposta sostitutiva*, calcolata sulla base dell'aliquota $a = 12.50\%$

- L'imposta sostitutiva si applica sullo scarto di emissione (se positivo) e sugli interessi cedolari, in proporzione alla parte maturata durante il periodo di possesso del titolo.
- Per gli zcb, l'imposta sostitutiva si applica al solo scarto di emissione.

Si dicono *nettisti* gli investitori soggetti al pagamento dell'imposta sostitutiva.

Buoni ordinari del tesoro

Il meccanismo prevede che l'intera imposta sullo scarto di emissione sia corrisposta al momento dell'acquisto in sede d'asta; la quotazione sul mercato secondario è maggiorata per l'imposta di competenza relativa al periodo compreso tra la data di acquisto e la scadenza del titolo. Il valore di rimborso a scadenza è uguale a 100.
Con riferimento a un Bot emesso in t_0 al prezzo Q_0 e con scadenza in t_m, l'imposta sostitutiva in un qualsiasi istante $t \in [t_0, t_m]$ è data da:

$$f_t = S^E(t, t_m)\, a\,,$$

con

$$S^E(t, t_m) = S^E(t_0, t_m)\frac{t_m - t}{t_m - t_0}\,,$$

BOT

All'emissione, l'imposta sostitutiva va applicata all'intero scarto di emissione, e si ha

$$f_0 = S^E(t_0, t_m)\, a .$$

Al prezzo di emissione in sede di asta va aggiunta l'imposta sostitutiva, per cui il prezzo di emissione effettivo (o lordo) è dato da

$$Q'_0 = Q_0 + f_0 .$$

In modo analogo, sul mercato secondario il prezzo lordo è:

$$Q'_t = Q_t + f_t \,,$$

essendo Q_t la quotazione del titolo al tempo t.

Buoni poliennali del tesoro

Il meccanismo prevede che l'intera imposta sullo scarto di emissione sia prelevata alla scadenza del titolo.

Analogamente, l'intera imposta sulla cedola è prelevata al momento dello stacco.

Quindi un nettista percepisce il flusso cedolare netto $I' = I\,(1-a)$ e il valore di rimborso netto $C' = 100 - S^{E}(t_0, t_m)\,a$.

BTP

Si consideri un Btp emesso in t_0 al prezzo Q_0 e con scadenza in t_m; sia t_{k-1} la data di inizio godimento della k-esima cedola e sia $t \in [t_{k-1}, t_k]$ una generica data di valutazione. Sia I la cedola del titolo, l'imposta sostitutiva è data da:

$$f_t = S^E(t_0, t)\, a + A_t\, a\,,$$

dove:

$$A_t = I \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\,, \qquad S^E(t_0, t) = S^E(t_0, t_m) \frac{t - t_0}{t_m - t_0}\,,$$

sono, rispettivamente, il rateo al tempo t e lo scarto di emissione di competenza del periodo $[t_0, t]$; i tempi sono contati con convenzione eff/eff.

BTP

Per i Btp, quindi, l'imposta sostitutiva è la somma dell'imposta sullo scarto di emissione e dell'imposta sulla cedola.

Il prezzo lordo di acquisto è dato da:

$$P'_t = Q_t + A_t - f_t \, .$$

BTP

Il prezzo sul secondario è ridotto per l'ammontare dell'imposta non di competenza dell'acquirente, che coincide, appunto, con f_t.

Il rendimento lordo su base annua, ovvero il tasso interno di rendimento è calcolato rispetto alla quotazione tel quel $P_t = Q_t + A_t$.

Il flusso netto del titolo è definito dalla cedola netta I' e dal valore di rimborso netto C'. Il rendimento netto, ovvero il tir è calcolato in base alla quotazione $P'_t = Q_t + A_t - f_t$.

Matematica Finanziaria

Thank you for listening!
Any questions?