

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{6n} + e^n + 2}{e^{4n} + 1}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{+\infty}{+\infty}$, quindi in forma indeterminata.

Applichiamo la sostituzione

$$y = e^n \Rightarrow (n \rightarrow +\infty \Rightarrow y \Rightarrow +\infty)$$

Risolviamo:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^6 + y + 2}{y^4 + 1} = +\infty$$

per il Principio di sostituzione dei polinomi -

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log^3 n + \log n + 1}{\log^4 n + 3}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ - Applichiamo la

Sostituzione $y = \log n$. $n \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

Risolviamo:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3 + y + 1}{y^4 + 1} = 0$$

per il Principio di sostituzione dei polinomi -

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right]$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

Facciamo riferimento al limite notevole:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Riscriviamo il limite come:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{2x} \right)^n \right]$$

Si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right]^{1/2}$$

Applichiamo la sostituzione:

$$y = 2x; \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{1/2} = e^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{2x} \right)^n \right] = \log e^{1/2} = \frac{1}{2}$$

per il limite teniamo solo limiti di funzioni composte.

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} [(e^{1/n} - 1) \cdot n]$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot (+\infty)$.

Facciamo riferimento al limite notevole:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n}$$

Applichiamo la sostituzione $y = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{y}$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

Risolviamo il limite:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[(e^y - 1) \cdot \frac{1}{y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)^0$. Risolviamo il

limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n^{1/n})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \log n}$$

Facciamo riferimento al limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = 1.$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})$$

Le espressioni si presentano nella forma indeterminata $\infty - (\infty)$.

Riscriviamo le espressioni:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} = +\infty$$

$$- \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{2^{\log n}}{n}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applichiamo la sostituzione $y = \log n \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = e^y$ $n \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty$

Abbiamo:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{2^y}{e^y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^y = +\infty$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n}{n}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applichiamo la sostituzione $y = \arctan n \Rightarrow$
 $n = \tan y$ $n \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Abbiamo:

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{y}{\tan y} = 1$$

$$- \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - n}{\log n}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Facciamo riferimento al limite notevole:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(1+n)}{n} = 1$$

Risolviamo il limite:

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n(n-1)}{\log n}$$

Applichiamo la sostituzione $y = n-1 \Rightarrow n = y+1$.

$$n \rightarrow 1 \Rightarrow (y-1) \rightarrow 0.$$

Abbiamo:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1) \cdot y}{\log(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(y+1) \cdot \frac{y}{\log(y+1)} \right] = 1$$

DERIVATIVES

$$- f(n) = n \cdot e^{1/n}$$

$$f'(n) = 1 \cdot e^{1/n} + n \cdot e^{1/n} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = e^{1/n} - \frac{e^{1/n}}{n}$$

$$- f(n) = \cos[\log(1+n^2)]$$

$$\begin{aligned} f'(n) &= -\sin[\log(1+n^2)] \cdot \frac{1}{1+n^2} \cdot 2n \\ &= -\sin[\log(1+n^2)] \cdot \frac{2n}{1+n^2} \end{aligned}$$

$$- f(n) = n^n$$

$$f(n) = e^{\log(n^n)} = e^{n \log n}$$

$$\begin{aligned} f'(n) &= e^{n \log n} \cdot \left(1 \cdot \log n + n \cdot \frac{1}{n}\right) = \\ &= e^{n \log n} (\log n + 1) \end{aligned}$$

$$- f(n) = \operatorname{arctg} \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$f'(n) = \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (n+1) - n \cdot 1}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(n+1)^2 + n^2}{(n+1)^2}} \cdot \frac{n+1 - n}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^2 + 2n + 1 + n^2} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)^2}} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$$

$$- f(n) = \operatorname{arcsen} (\log n)$$

$$f'(n) = \frac{1}{\sqrt{1 - \log^2 x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \sqrt{1 - \log^2 x}}$$

$$- f(n) = \sqrt{\frac{2x+1}{e^{5x^2}}}$$

$$f'(n) = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{2x+1}{e^{5x^2}}}} \cdot \frac{2 \cdot e^{5x^2} - (2x+1) \cdot e^{5x^2} \cdot 10x}{e^{10x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^{5x^2}}{2x+1}} \cdot \frac{2e^{5x^2} - 20x^2 e^{5x^2} - 10e^{5x^2} \cdot x}{e^{10x^2}}$$

$$- f(x) = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} \cdot \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - (e^x - 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{e^x + 1}}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x (\cancel{e^x + 1} - e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$- f(x) = e^{\arctan \sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f'(x) = e^{\arctan \sqrt{x^2 + 3}} \cdot \frac{1}{1 + (x^2 + 3)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot 2x$$

$$= e^{\arctan \sqrt{x^2 + 3}} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= \frac{x e^{\arctan \sqrt{x^2 + 3}}}{\sqrt{x^2 + 3} (x^2 + 4)}$$

$$- f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x} \cdot \log \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 4x}} \cdot (6x + 4) \cdot \log \frac{1}{x} +$$

$$+ \sqrt{3x^2 + 4x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2(3x + 2)}{2\sqrt{3x^2 + 4x}} \cdot \log \frac{1}{x} + \sqrt{3x^2 + 4x} \cdot x \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{3x + 2}{\sqrt{3x^2 + 4x}} \cdot \log \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3x^2 + 4x}}{x}$$

$$- f(x) = [x \cdot \log^2 x]^\pi$$

$$f'(x) = \pi \cdot [x \cdot \log^2 x]^{\pi-1} \left(\log^2 x + x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= \pi (x \log^2 x)^{\pi-1} (\log^2 x + 2 \log x)$$