La variabili casuali discrete

1

Le variabili casuali (o aleatorie)

- Le variabili casuali (VC) o aleatorie si suddividono in:

1. VC discrete
2. VC continue

2

2

Le VC discrete

- Una VC discreta può assumere un insieme discreto (finito o numerabile) di numeri reali.
- Es: X = risultato del lancio di un dado.
- X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

3

3

- Per una VC discreta si definisce la funzione di probabilità (fp) che associa ad ogni valore x_i della VC una probabilità $P(x_i)$.
- La fp ha due proprietà:

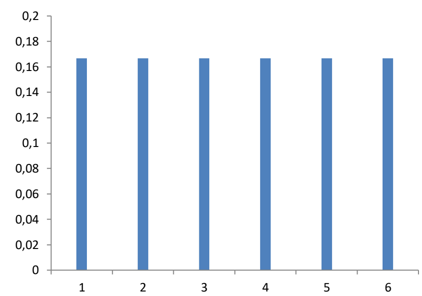
1. $P(x_i) \geq 0$
2. $\sum_i P(x_i) = 1$

4

4

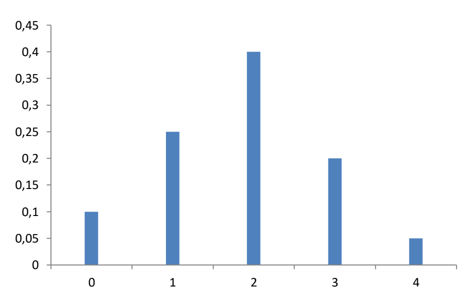
VC: risultato del lancio di un dado

x	*P(x)*
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Totale	1



Altra VC

x	*P(x)*
0	0,10
1	0,25
2	0,40
3	0,20
4	0,05
Totale	1



- Per una VC discreta si definisce la funzione di ripartizione (o di distribuzione) che associa ad ogni valore x_i la probabilità cumulata

$$F(x_i) = P(X \leq x_i)$$

7

7

VC: risultato del lancio di un dado

x	*F(x)*
1	1/6
2	2/6
3	3/6
4	4/6
5	5/6
6	1
Totale	

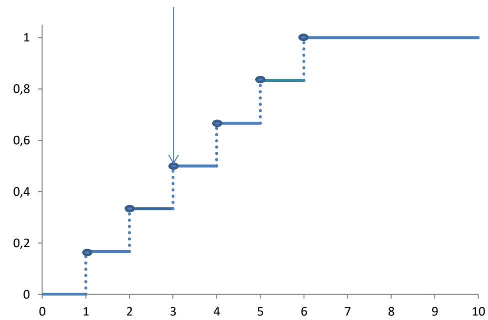
8

8

VC: risultato del lancio di un dado

x	F(x)
1	1/6
2	2/6
3	3/6
4	4/6
5	5/6
6	1
Totale	

$F(3) = P(X \leq 3) = 3/6$



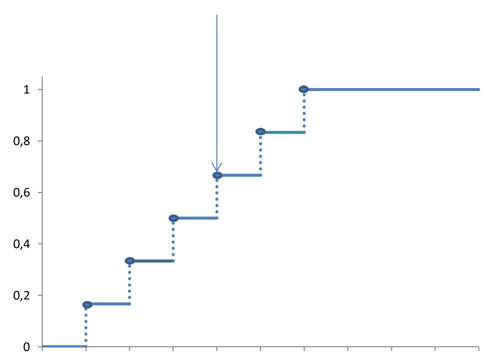
9

9

VC: risultato del lancio di un dado

$F(4) = P(X \leq 4) = 4/6$

x	F(x)
1	1/6
2	2/6
3	3/6
4	4/6
5	5/6
6	1
Totale	



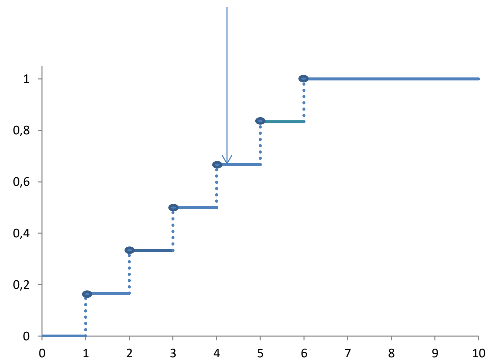
10

10

VC: risultato del lancio di un dado

F(4,2) = P(X ≤ 4,2) = P(X ≤ 4)

x	F(x)
1	1/6
2	2/6
3	3/6
4	4/6
5	5/6
6	1
Totale	



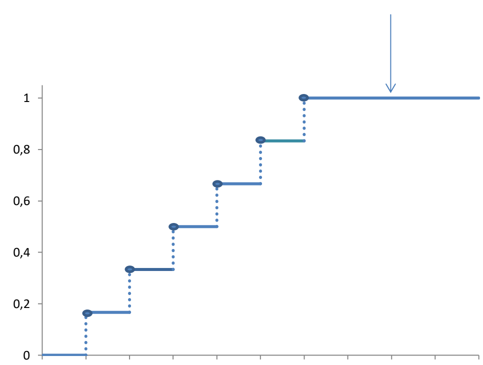
11

11

VC: risultato del lancio di un dado

F(8) = P(X ≤ 8) = 1

x	F(x)
1	1/6
2	2/6
3	3/6
4	4/6
5	5/6
6	1
Totale	

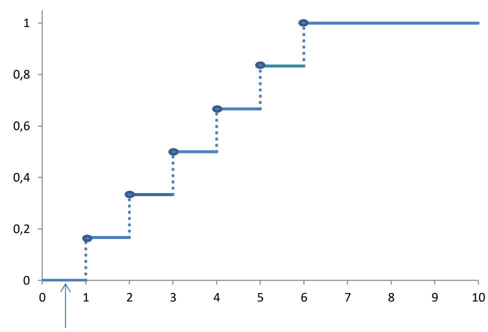


12

12

VC: risultato del lancio di un dado

x	*F(x)*
1	1/6
2	2/6
3	3/6
4	4/6
5	5/6
6	1
Totale	



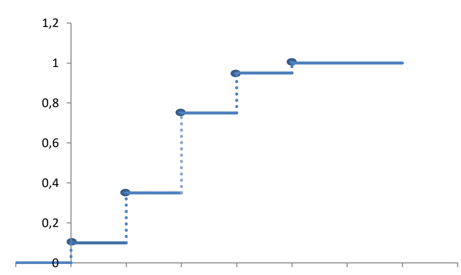
F(0,5) = P(X ≤ 0,5) = 0

13

13

Altra VC

x	*F(x)*
0	0,10
1	0,35
2	0,75
3	0,95
4	1
Totale	



14

14

- Le proprietà della <u>funzione di ripartizione</u> sono:

1. $F(x)$ è non decrescente, ovvero $x_1 > x_2 \Longrightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $F(x)$ è continua a destra, ovvero $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

15

15

Valore atteso

- Il valore atteso (o valore medio, o speranza matematica) di una VC discreta X, indicato con $E(X)$, è dato da

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

- E = expectation

16

16

VC: risultato del lancio di un dado

x	*P(x)*	*xP(x)*
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6
Totale	1	21/6

$$E(X) = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

17

17

Altra VC

x	*P(x)*	*xP(x)*
0	0,10	0
1	0,25	0,25
2	0,40	0,80
3	0,20	0,60
4	0,05	0,20
Totale	1	1,85

$$E(X) = 1{,}85$$

18

18

- Da notare:

$$E(X) = \frac{\sum_i x_i P(x_i)}{\boxed{\sum_i P(x_i)}} \qquad = 1$$

- Interpretazione: il valore atteso è la media aritmetica <u>ponderata</u> delle x_i con pesi pari alle rispettive probabilità.

19

19

Varianza

- La varianza di una VC discreta X, indicata con V(X), è data da

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 P(x_i)$$

- Forma indiretta:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - E(X)^2$$

valore atteso del quadrato – quadrato del valore atteso

20

20

VC: risultato del lancio di un dado

x	*P(x)*	*(x-E(X))²*	*(x-E(X))²P(x)*
1	1/6	6,25	6,25/6
2	1/6	2,25	2,25/6
3	1/6	0,25	0,25/6
4	1/6	0,25	0,25/6
5	1/6	2,25	2,25/6
6	1/6	6,25	6,25/6
Totale	1		17,5/6

$$V(X) = \frac{17,5}{6} = 2,917$$

21

21

V(X) = E(X²) - [E(X)]²

x^2	*P(x)*	$x^2P(x)$
1	1/6	1/6
4	1/6	4/6
9	1/6	9/6
16	1/6	16/6
25	1/6	25/6
36	1/6	36/6
Totale	1	91/6

V(X) = 91/6 – $3,5^2$
= 15,167 – 12,25
= 2,917

22

22

Altra VC

x	*P(x)*	*(x-E(X))²*	*(x-E(X))²P(x)*
0	0,10	3,4225	0,34225
1	0,25	0,7225	0,180625
2	0,40	0,0225	0,009
3	0,20	1,3225	0,2645
4	0,05	4,6225	0,231125
Totale	1		1,0275

V(X) = 1,0275

23

Deviazione standard

- La deviazione standard di una VC discreta X, indicata con $SD(X)$, è data da

$$SD(X) = \sqrt{V(X)}$$

24

La variabile casuale Uniforme discreta

- La VC Uniforme discreta, in simboli
$$X \sim Ud(a, s)$$
è una VC che assume gli *s* valori interi a partire da *a* con fp
$$\boxed{P(x) = \frac{1}{s}}$$
- $X = \{a, a+1, \dots, a+s-1\}$

25

25

- Es.: X = risultato del lancio di un dado

$$X \sim Ud(1,6)$$

$$P(x) = \frac{1}{6}$$

26

26

- Il valore atteso di $X \sim Ud(a, s)$ è dato da

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

ed è pari a

$$E(X) = a + \frac{s-1}{2}$$

- La varianza di $X \sim Ud(a, s)$ è data da

$$V(X) = \frac{s^2 - 1}{12}$$

27

27

La variabile casuale di Bernoulli

- La VC di Bernoulli, in simboli

$$X \sim Ber(\pi)$$

è una VC che assume il valore 1 (in caso di successo, evento di interesse) con prob π e il valore 0 (insuccesso) con prob $1 - \pi$.

$$X = \begin{cases} 0 & con\ prob & 1 - \pi \\ 1 & con\ prob & \pi \end{cases}$$

28

28

- Tutte le prove che producono due soli possibili risultati generano VC di Benoulli.
- Es 1: lancio di una moneta, T = 1, C = 0 (π = 0,50)
- Es 2: la presenza di una caratteristica P = 1, A = 0 (π = ?)

29

29

- La sua fp è

$$\boxed{P(x) = \pi^x (1-\pi)^{1-x}}$$

- Infatti:
  per $x = 0$, si ha $P(0) = \pi^0(1-\pi)^{1-0} = 1-\pi$
  per $x = 1$, si ha $P(1) = \pi^1(1-\pi)^{1-1} = \pi$

30

30

- Il valore atteso di una VC di Bernoulli è dato da

$$E(X) = \pi$$

- Infatti:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

$$E(X) = 0 \cdot (1-\pi) + 1 \cdot \pi$$
$$= \pi$$

31

31

- La varianza di una VC di Bernoulli è data da

$$V(X) = \pi(1-\pi)$$

Infatti:

$$V(X) = \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 P(x_i)$$
$$= (0-\pi)^2\ (1-\pi) + (1-\pi)^2\pi$$
$$= \pi^2\ (1-\pi) + (1+\pi^2-2\pi)\pi$$
$$= \pi^2 - \pi^3 + \pi + \pi^3 - 2\pi^2$$
$$= \pi - \pi^2$$
$$= \pi(1-\pi)$$

32

32

La variabile casuale Binomiale

- La VC Binomiale, in simboli

$$X \sim Bin(\pi, n)$$

  è una VC che descrive il numero di successi in *n* prove indipendenti.
- Numero di successi: numero di volte in cui si verifica l'evento di interesse.
- Il numero di successi è X = {0, 1, 2,…, n} ovvero varia da 0 a n (numeri interi).
- Il parametro π è la probabilità di successo in una singola prova.
- La VC binomiale è la somma di *n* VC di Bernoulli indipendenti.

33

33

Esempio

- Si considerano 3 prove (3 rilevamenti di velocità), *n*=3.
- La VC

  X = numero di eccessi di velocità

  può assumere valori da 0 a 3.
- $X = \{0,1,2,3\}$
- La prob che si rilevi un eccesso di velocità in un rilevamento è 0,30 (π = 0,30).
- P(E) = π = 0,30
- P(NE) = 1 - π = 0,70
- $X \sim Bin(0{,}30,\ 3)$

34

34

Funzione di probabilità

x	*P(x)*
0	
1	
2	
3	
Totale	1

35

35

- P(0) = ?

- P(0) = $P(\underbrace{NE \cap NE \cap NE}_{})$

  Intersezione di 3 eventi indipendenti

- P(0) = P(NE)·P(NE)·P(NE)

  $= (1-\pi)(1-\pi)(1-\pi)$

  $= (1-\pi)^3$

  $= 0{,}70^3$

  $= 0{,}343$

36

36

Funzione di probabilità

x	*P(x)*
0	0,343
1	
2	
3	
Totale	1

37

37

- P(1) = ?

- $P(1) = P[\underbrace{(E \cap NE \cap NE) \cup (NE \cap E \cap NE) \cup (NE \cap NE \cap E)}]$

  Unione di 3 eventi incompatibili = somma delle prob

- $P(1) = P(E \cap NE \cap NE) + P(NE \cap E \cap NE) + P(NE \cap NE \cap E)$

$$= P(E)\cdot P(NE)\cdot P(NE) + P(NE)\cdot P(E)\cdot P(NE) + P(NE)\cdot P(NE)\cdot P(E)$$
$$= \pi(1-\pi)(1-\pi) + (1-\pi)\pi(1-\pi) + (1-\pi)(1-\pi)\pi$$
$$= 3[\pi(1-\pi)^2]$$
$$= 3\cdot 0{,}30\cdot 0{,}70^2$$
$$= 0{,}441$$

38

38

Funzione di probabilità

x	*P(x)*
0	0,343
1	0,441
2	
3	
Totale	1

39

39

- P(2) = ?
- $P(2) = P[\underbrace{(E \cap E \cap NE) \cup (E \cap NE \cap E) \cup (NE \cap E \cap E)}]$

Unione di 3 eventi incompatibili = somma delle prob

- $P(2) = P(E \cap E \cap NE) + P(E \cap NE \cap E) + P(NE \cap E \cap E)$

  $= P(E) \cdot P(E) \cdot P(NE) + P(E) \cdot P(NE) \cdot P(E) + P(NE) \cdot P(E) \cdot P(E)$

  $= \pi\pi(1-\pi) + \pi(1-\pi)\pi + (1-\pi)\pi\pi$

  $= 3[\pi^2(1-\pi)]$

  $= 3 \cdot 0{,}30^2 \cdot 0{,}70$

  $= 0{,}189$

40

40

Funzione di probabilità

x	*P(x)*
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	
Totale	1

41

41

- P(3) = ?

- P(3) = P(E ∩ E ∩ E)
  = P(E)·P(E)·P(E)
  = $\pi \cdot \pi \cdot \pi$
  = π^3
  = $0{,}30^3$
  = 0,027

42

42

Funzione di probabilità

x	*P(x)*
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Totale	1

43

43

- In generale, la fp di una VC Binomiale è

$$\boxed{P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}}$$

- In questa formula,

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

è il <u>coefficiente binomiale</u>.

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$ è il <u>fattoriale</u> di *n*.
- Per convenzione, 0! = 1.

44

44

- Il coefficiente binomiale è il numero delle combinazioni di *n* elementi in classe *x*:

  quanti gruppi di *x* elementi possono formarsi in modo che due gruppi differiscano per almeno un elemento.
- n = 3 (A, B, C)
- x = 2
- {A, B}, {A, C}, {B, C}

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

45

45

Esempio precedente

- $X \sim Bin(0{,}30, 3)$

$$P(0) = \binom{3}{0} 0{,}30^0 (1 - 0{,}30)^{3-0}$$
$$= \frac{3!}{0!\,(3-0)!} 0{,}30^0 \cdot 0{,}70^3$$
$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 0{,}30^0 \cdot 0{,}70^3$$
$$= 0{,}70^3 = 0{,}343$$

46

46

$$P(1) = \binom{3}{1} 0{,}30^1 (1 - 0{,}30)^{3-1}$$

$$= \frac{3!}{1!\,(3-1)!} 0{,}30^1 \cdot 0{,}70^2$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} 0{,}30^1 \cdot 0{,}70^2$$

$$= 3 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}70^2 = 0{,}441$$

47

47

$$P(2) = \binom{3}{2} 0{,}30^2 (1 - 0{,}30)^{3-2}$$

$$= \frac{3!}{2!\,(3-2)!} 0{,}30^2 \cdot 0{,}70^1$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} 0{,}30^2 \cdot 0{,}70^1$$

$$= 3 \cdot 0{,}30^2 \cdot 0{,}70 = 0{,}189$$

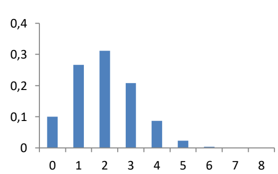
48

48

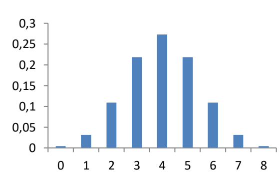
$$P(3) = \binom{3}{3} 0{,}30^3 (1 - 0{,}30)^{3-3}$$
$$= \frac{3!}{3!\,(3-3)!} 0{,}30^3 \cdot 0{,}70^0$$
$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} 0{,}30^3 \cdot 0{,}70^0$$
$$= 0{,}30^3 = 0{,}027$$

49

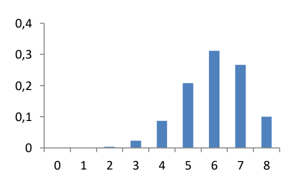
Rappresentazione grafica della fp di una VC binomiale



n = 8, π = 0,25



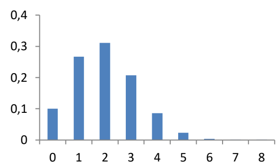
n = 8, π = 0,50
(simmetrica)

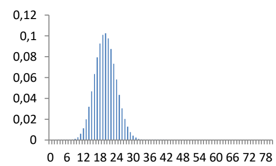


n = 8, π = 0,75

50

Rappresentazione grafica della fp di una VC binomiale





n = 8, π = 0,25 n = 80, π = 0,25

51

51

Valore atteso

- Si può dimostrare che il valore atteso di una VC binomiale è dato da

$$E(X) = n\pi$$

- Nell'esempio

$$E(X) = 3 \cdot 0{,}30 = 0{,}90$$

52

52

Valore atteso

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 0,90$$

x	*P(x)*	*xP(x)*
0	0,343	0
1	0,441	0,441
2	0,189	0,378
3	0,027	0,081
Totale	1	0,900

53

53

Varianza

- Si può dimostrare che la varianza di una VC binomiale è data da

$$V(X) = n\pi(1-\pi)$$

e

$$SD(X) = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

- Nell'esempio

$$V(X) = 3 \cdot 0,30 \cdot 0,70 = 0,630$$

54

54

Varianza

$$V(X) = \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 P(x_i) = 0{,}630$$

x	*P(x)*	*(x-E(X))²P(x)*
0	0,343	0,278
1	0,441	0,004
2	0,189	0,229
3	0,027	0,119
Totale	1	0,630

55

55

Varianza

$$V(X) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - E(X)^2 = 1{,}440 - 0{,}90^2 = 0{,}630$$

x²	*P(x)*	*x²P(x)*
0	0,343	0
1	0,441	0,441
4	0,189	0,756
9	0,027	0,243
Totale	1	1,440

56

56

Esempio

- Si considerino *4* negozi sottoposti a controlli fiscale.
  La prob che un negozio presenti una irregolarità è 0,24.

1. Qual è la prob che 3 negozi presentino una irregolarità?

57

57

Dati del problema

n = 4

π = 0,24

X = numero di negozi con irregolarità su 4

$X = \{0,1,2,3,4\}$

$X \sim Bin(0{,}24, \quad 4)$

58

58

1. Qual è la prob che 3 negozi presentino una irregolarità?

$$P(3) = \binom{4}{3} 0{,}24^3 (1 - 0{,}24)^{4-3}$$

$$= \frac{4!}{3!\,(4-3)!} 0{,}24^3 \cdot 0{,}76^1$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} 0{,}24^3 \cdot 0{,}76^1$$

$$= 4 \cdot 0{,}24^3 \cdot 0{,}76 = 0{,}042$$

59

59

2. Qual è la prob che tutti i negozi presentino una irregolarità?

$$P(4) = \binom{4}{4} 0{,}24^4 (1 - 0{,}24)^{4-4}$$

$$= \frac{4!}{4!\,0!} 0{,}24^4 \cdot 0{,}76^0$$

$$= 0{,}24^4 = 0{,}003$$

60

60

3. Qual è la prob che al massimo 2 negozi presentino una irregolarità?

$$P(X \leq 2) = ?$$

$$P(X \leq 2) = \mathrm{P}(0) + \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2)$$

$$P(X \leq 2) = 1 - \mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(4)$$

$$P(X \leq 2) = 1 - 0{,}042 - 0{,}003 = 0{,}955$$

61

61

La variabile casuale di Poisson

- La VC di Poisson, in simboli
  $$X \sim Po(\lambda)$$
  è una VC che descrive il numero di successi in un determinato arco temporale.
- Il numero di successi è X = {0,1,2,…} ovvero varia da 0 a ∞ (numeri interi).

62

62

- La fp di una VC di Poisson è

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

- *e* rappresenta la costante di Nepero (2,71828)
- $\lambda > 0$ è il numero atteso (medio) di successi nell'arco di tempo specificato
- $x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Esempio

- Quanti possono essere i clienti di una banca in una giornata?
- Evento di interesse (successo): accesso del cliente in banca in una giornata.
- I clienti possono essere 0, 1, 2, 3, …
- La VC

X = numero clienti di una banca in una giornata

è una VC di Poisson.

- Sapendo che il numero medio di clienti di una banca in una giornata è 5, qual è la probabilità

1. che ci siano 4 clienti (4 successi)?

$$\lambda = 5$$

$$P(4) = \frac{e^{-5}5^4}{4!}$$

$$P(4) = 0{,}175$$

2. che ci siano 8 clienti (8 successi)?

$$P(8) = \frac{e^{-5}5^8}{8!}$$

$$P(8) = 0{,}065$$

3. che ci sia non più di (al massimo) 1 cliente?

$$P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!}$$

$$P(X \leq 1) = 0{,}007 + 0{,}034 = 0{,}041$$

67

67

4. che ci siano più di 2 clienti?

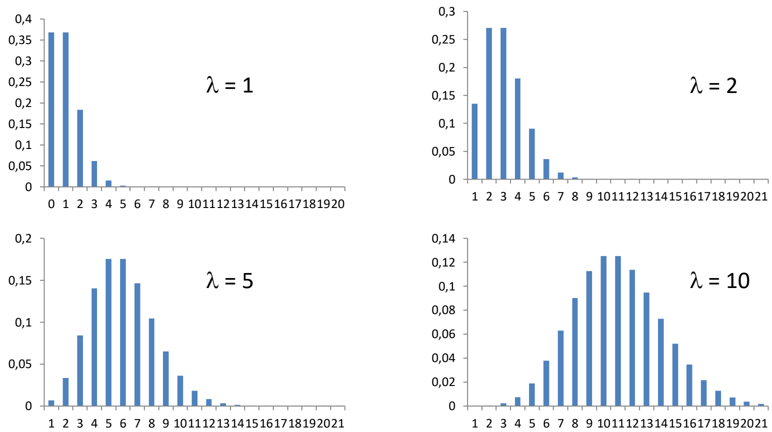
$$P(X > 2) = P(3) + P(4) + \cdots = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

$$P(X > 2) = 1 - 0{,}007 - 0{,}034 - 0{,}084 = 0{,}875$$

68

68

Rappresentazione grafica della fp di una VC di Poisson



69

- Si dimostra che il valore atteso di una VC di Poisson è dato da

$$E(X) = \lambda$$

- La varianza e la deviazione standard sono

$$V(X) = \lambda$$

$$SD(X) = \sqrt{\lambda}$$

70

Somma di VC di Poisson

- Date *n* variabili $X_1, \dots, X_n$ di Poisson indipendenti con parametri, rispettivamente, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora

$$Y = X_1 + \cdots + X_n$$

è una VC di Poisson con parametro $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

71

71

Esempio

- Sapendo che il numero medio di clienti di una banca in una giornata è 5, e ipotizzando l'indipendenza del numero dei clienti in giornate diverse.
- Qual è la prob che ci siano 12 clienti da lun a mer?

72

72

$X_1 \sim Po(5)$ [num. clienti lun]

$X_2 \sim Po(5)$ [num. clienti mar]

$X_3 \sim Po(5)$ [num. clienti mer]

$\mathrm{Y} = X_1 + X_2 + X_3$ [num. clienti lun-mer]

$$Y \sim Po(\lambda)$$

$$\lambda = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$Y \sim Po(15)$$

73

73

Per la VC Y

$$P(12) = \frac{e^{-15} 15^{12}}{12!}$$

$$P(12) = 0{,}083$$

74

74