La probabilità

1

Teoria della probabilità

- La teoria della probabilità studia i fenomeni incerti (non deterministici).
- Tre concetti primitivi:

1. Prova
2. Evento
3. Probabilità

2

Prova

- La <u>prova</u> (o esperimento aleatorio) è un esperimento che ha due o più possibili risultati.
- La prova può essere suddivisa in sottoprove.
- Es. 1: il lancio di un dado.
- Es. 2: il lancio di 2 dadi (suddiviso in due sottoprove).

3

Evento

- Per <u>evento elementare</u> si intende uno dei possibili risultati di una prova.
- Evento non elementare: un evento che può essere scomposto in eventi elementari.
- Nella prova *lancio di un dado:*
  - gli eventi elementari sono {1,2,3,4,5,6};
  - un evento non elementare è «numero pari».

4

- Lo <u>spazio degli eventi</u> (o spazio campionario) è l'insieme di tutti gli eventi elementari ω_i di una prova ed è indicato con Ω.
- Prova: *lancio di un dado*
- Ω: {1,2,3,4,5,6}
- Prova: *lancio di 1 moneta*
- Ω: {T, C}

5

- L'<u>evento impossibile</u> Ø è quello che non può mai verificarsi.

- L'<u>evento certo</u> Ω è quello che non può non verificarsi.

6

La probabilità

- La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1, estremi inclusi, che misura il grado di incertezza di un evento.
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$

7

- In una data prova, l'evento A si verifica con probabilità P(A).

8

Algebra degli eventi

- Operazioni tra eventi

9

Negazione (complemento) di un evento

- Dato un evento A, la sua negazione $\bar{A}$ è l'evento che si verifica quando non si verifica A.
- Prova: *lancio di un dado*
- A = {5}
  $\bar{A}$ = {1,2,3,4,6}
- A = {pari}
  $\bar{A}$ = {dispari}
- Da notare:
  $\emptyset = \overline{\Omega}$

10

Unione di 2 eventi

- Dati 2 eventi A e B, la loro unione

$$A \cup B$$

è l'evento che si verifica se almeno uno dei due eventi si verifica.

11

- Prova: *lancio di un dado*
- A = {2,4,6} (risultato pari)
- B = {5,6} (risultato > 4)
- $A \cup B$ = risultato pari <u>oppure</u> > 4
- $A \cup B$ = {2,4,5,6}

12

Intersezione di 2 eventi

- Dati 2 eventi A e B, la loro intersezione

$$A \cap B$$

è l'evento che si verifica se i 2 eventi si verificano congiuntamente.

13

- Prova: *lancio di un dado*
- A = {2,4,6}
- B = {5,6}
- $A \cap B$ = risultato pari <u>e</u> > 4
- $A \cap B$ = {6}

14

- Due eventi A e B sono <u>incompatibili</u> se non possono verificarsi congiuntamente, ovvero

$$A \cap B = \emptyset$$

- Da notare:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

15

Inclusione di un evento

- Dati 2 eventi A e B, se
$$A \cup B = A$$
allora l'evento B è incluso in A,
$$B \subset A$$
- Prova: *lancio di un dado*
- A = {2,4,6}
- B = {2}
- $B \subset A$
- Infatti, $A \cup B$ = {2,4,6}

16

Approcci alla probabilità

- Si considerano due diversi approcci alla probabilità:
  (1) classico
  (2) empirico (frequentista)

17

L'approccio classico

- Nell'approccio classico, la probabilità del verificarsi di un evento *A* è data da

$$P(A) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$

18

- Es.: qual è la probabilità che il risultato del lancio di un dado sia 4?

  A = {4}

$$P(A) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

19

L'approccio empirico

- Nell'approccio empirico, la probabilità del verificarsi di un evento *A* è data da

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- n è il numero di prove
- n_A è il numero di prove in cui si è verificato A
- (frequenza relativa)

20

- Es.: qual è la probabilità che un acquirente di un bene riacquisti lo stesso?

  A = {riacquisto bene}

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{?}{?}$$

21

- È necessario svolgere un'apposita indagine.

  Ad es. si intervistano 300 acquirenti e si verifica che 180 di questi hanno riacquistato il bene.

$$P(A) = \frac{180}{300} = 0{,}60$$

22

Le tabelle a doppia entrata

200 studenti universitari classificati sulla base del possesso di un bancomat (SI / NO) e della residenza (FUORISEDE / IN SEDE)

	FUORISEDE	**IN SEDE**	*Totale*
SI	90	56	146
NO	12	42	54
Totale	102	98	200

23

- Qual è la prob che uno studente possegga un bancomat?
- A = SI

	F sede	***In sede***	*Tot*
SI	90	56	$\boxed{146}$
NO	12	42	54
Tot	102	98	$\boxed{200}$

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{?}{?}$$

$$P(A) = \frac{146}{200} = 0{,}73$$

24

- Qual è la prob che uno studente non possegga un bancomat?
- A = SI
- B = NO

	F sede	*In sede*	*Tot*
SI	90	56	146
NO	12	42	$\boxed{54}$
Tot	102	98	$\boxed{200}$

$$P(B) = \frac{54}{200} = 0{,}27$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$$

Probabilità condizionata

- Probabilità condizionata: probabilità di un evento condizionata ad un altro evento, ovvero probabilità del verificarsi di un evento sapendo che si è verificato un altro evento.
- Dati 2 eventi, A e B, la probabilità dell'evento B condizionata al verificarsi dell'evento A è indicata con

$$P(B|A)$$

- Prova: *lancio di un dado*
- A = {2,4,6}
- B = {5,6}
- La probabilità di B condizionata ad A, ovvero P(B|A), indica la probabilità che il risultato sia > 4 condizionatamente a (sapendo che c'è stato) un risultato pari.

$$P(B|A) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

27

Probabilità condizionata

- Sapendo che uno studente è un "fuorisede", qual è la prob di possedere un bancomat? (Considerando solo gli studenti fuorisede, qual è la prob di possedere un bancomat?)
- A = SI
- D = fuorisede

	F sede	**In sede**	*Tot*
SI	$\boxed{90}$	56	146
NO	12	42	54
Tot	$\boxed{102}$	98	200

$$P(A|D) = \frac{n_{A|D}}{n_D} = \frac{90}{102} = 0{,}882$$

28

- Considerando gli studenti in sede, qual è la prob di possedere un bancomat?
- A = SI
- C = in sede

	F sede	*In sede*	*Tot*
SI	90	$\boxed{56}$	146
NO	12	42	54
Tot	102	$\boxed{98}$	200

$$P(A|C) = \frac{56}{98} = 0{,}571$$

Probabilità dell'intersezione di 2 eventi

- Prova: *lancio di un dado*
- A = {2,4,6}
- B = {5,6}
- $A \cap B$ = {6}

$$P(A \cap B) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

- In generale, la probabilità dell'intersezione degli eventi A e B è data da

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- Esempio precedente

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

31

Principio delle probabilità composte

- Poiché $A \cap B = B \cap A$ (i due eventi devono verificarsi <u>congiuntamente</u>)

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

32

- La probabilità di B condizionata a A è ricavabile da

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Esempio precedente

$$P(B|A) = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

33

- In modo analogo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

34

Probabilità dell'intersezione di 2 eventi

- Qual è la prob che uno studente possegga un bancomat e sia "in sede"?
- A = SI
- C = in sede

	F sede	*In sede*	*Tot*
SI	90	$\boxed{56}$	146
NO	12	42	54
Tot	102	98	$\boxed{200}$

$$P(A \cap C) = \frac{56}{200} = 0{,}28$$

35

Probabilità dell'unione di 2 eventi

- Prova: *lancio di un dado*
- A = {2,4,6}
- B = {5,6}
- $A \cup B$ = {2,4,5,6}

$$P(A \cup B\,) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili} = \frac{4}{6} = 0{,}667$$

36

- In generale, la probabilità dell'unione degli eventi A e B, è data da

$$P(A \cup B\ ) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Esempio precedente

$$P(A \cup B\ ) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

37

Probabilità dell'unione di 2 eventi

- Qual è la prob che uno studente possegga un bancomat oppure sia uno studente "in sede"?
- A = SI
- C = in sede

	F sede	***In sede***	*Tot*
SI	90	56	146
NO	12	42	54
Tot	102	98	200

$$P(A \cup C\ ) = \frac{146 + 98 - 56}{200} = \frac{188}{200} = 0{,}94$$

38

Probabilità della negazione di un evento

- Dato un evento *A*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

39

Eventi indipendenti

- Due eventi A e B sono <u>indipendenti</u> se il verificarsi dell'evento B non influenza il verificarsi dell'evento A e viceversa.
- In tal caso

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

40

- Ne consegue che per 2 eventi indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Inoltre, per K eventi indipendenti,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$$

41

Esempio precedente

- Verifica dell'indipendenza tra gli eventi A (possesso bancomat) e C (studente "in sede"). Se A e C fossero eventi indipendenti, allora

$$P(A \cap C\ ) = P(A)P(C)$$

- Ma

$$P(A \cap C\ ) = \frac{56}{200} = 0{,}28$$

$$P(A)P(C\ ) = \frac{146}{200} \cdot \frac{98}{200} = \frac{14308}{200} = 0{,}358$$

- I 2 eventi non sono indipendenti.

42

Eventi incompatibili

- Due eventi *A* e *B* sono incompatibili se non possono verificarsi congiuntamente
- In tal caso

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cap B) = 0$$

43

- Ne consegue che per 2 eventi incompatibili

$$P(A \cup B\ ) = P(A) + P(B)$$

- Inoltre, per *K* eventi incompatibili,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

44

Esempio 1

- I 200 clienti di una banca sono suddivisi in tre fasce: A (mai insolventi), B (insolventi una volta) e C (insolventi più di una volta). I clienti delle tre fasce sono, rispettivamente, 160, 30 e 10.

45

Dati del problema

n = *200*

n_A = *160*

n_B = *30*

n_C = *10*

46

Si consideri un’estrazione e si determini:

1. la prob di selezionare un cliente della fascia B.

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{30}{200}$$

47

2. la prob di selezionare un cliente della fascia A oppure dalla fascia B.

$$P(A \cup B\ ) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ma gli eventi A e B sono incompatibili.

$$P(A \cup B\ ) = P(A) + P(B) = \frac{160}{200} + \frac{30}{200} = \frac{190}{200}$$

48

- Si considerino due estrazioni (senza reimmissione) e si determini:

3. la prob di selezionare il primo cliente della fascia A e il secondo cliente della fascia B;

$P(A_1 \cap B_2) =?$

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) = \frac{160}{200} \cdot \frac{30}{199} = \frac{4800}{39800}$$

49

4. la prob di selezionare due clienti della stessa fascia.

$$P[\underbrace{(A_1 \cap A_2)} \cup \underbrace{(B_1 \cap B_2)} \cup \underbrace{(C_1 \cap C_2)}] =$$

UNIONE DI EVENTI INCOMPATIBILI

$$P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap C_2) =$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1) + P(C_1)P(C_2|C_1) =$$

$$\frac{160}{200} \cdot \frac{159}{199} + \frac{30}{200} \cdot \frac{29}{199} + \frac{10}{200} \cdot \frac{9}{199} = \frac{26400}{39800}$$

50

Esempio 2

- La prob che un soggetto acquisti un'autovettura è pari a 0,52. La prob che un soggetto acquisti un'autovettura e uno scooter è pari a 0,42. Inoltre l'acquisto di un'autovettura è un evento indipendente dall'acquisto di uno scooter.

51

Dati del problema

A = {acquisto autovettura}

S = {acquisto scooter}

$P(A) = 0,52$

$P(A \cap S) = 0,42$

A e S sono indipendenti

52

1. Sapendo che i due eventi sono indipendenti, verificare se i due eventi sono anche incompatibili;

I due eventi non sono incompatibili, poiché $P(A \cap S) \neq 0$

53

2. determinare la prob che un soggetto acquisti uno scooter;

$P(S) = ?$

Poiché i due eventi sono indipendenti, $P(A \cap S) = P(A)P(S)$, quindi

$$P(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{0{,}42}{0{,}52} = 0{,}81$$

54

3. determinare la prob che un soggetto acquisti un'autovettura o uno scooter.

$$P(A \cup S) = ?$$

$$P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S) = 0{,}52 + 0{,}81 - 0{,}42$$

$$P(A \cup S) = 0{,}91$$

55

Teorema di Bayes

- Si considera una partizione dello spazio campionario Ω, ossia un insieme di eventi $A_1,\dots,A_k$, tali che:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ (incompatibili a due a due)
2. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$ (almeno uno degli eventi $A_1,\dots,A_k$ si verifica)

- Si considera un evento B incluso in Ω.

56

- Si distingue
- $P(A_i)$ = probabilità *a priori*
- $P(A_i|B)$ = probabilità *a posteriori*

57

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

58

$$P(B) = ?$$

$$P(B) = P(B \cap \Omega)$$

$$= P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right)$$

$$= P(\underbrace{(A_1 \cap B)} \cup \underbrace{(A_2 \cap B)} \cup \cdots \cup \underbrace{(A_k \cap B)})$$

EVENTI INCOMPATIBILI

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k)$$

59

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

probabilità a priori

probabilità condizionata (verosimiglianza)

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k)}}$$

probabilità a posteriori

60

Interpretazione

- Il teorema di Bayes è utile quando gli eventi A_i sono possibile cause dell'evento osservato B .
- In tal caso le probabilità a posteriori sono le probabilità delle diverse cause.

61

Esempio 1

- Affidabilità di un test molecolare.
- La prob di avere la malattia Cov è 0,05.

  P(Cov) = 0,05
- Il test è positivo (Pos) nel 99% dei casi in cui la malattia è in atto.

  P(Pos | Cov) = 0,99
- L'esame fornisce un *falso positivo* nel 2% dei pazienti.

  P(Pos | $\overline{\text{Cov}}$) = 0,02
- Se per un soggetto il test positivo, qual è la prob che abbia la malattia Cov?
- P(Cov | Pos) = ?

62

$$P(Cov\,|Pos) = \frac{P(Cov)P(Pos|Cov)}{P(Cov)P(Pos|Cov) + P(\overline{Cov})P(Pos|\overline{Cov})}$$

$$P(Cov\,|Pos) = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}99}{0{,}05 \cdot 0{,}99 + 0{,}95 \cdot 0{,}02} = 0{,}72$$

63

Esempio 2

- Un paziente si rivolge al medico per alcune macchie rosse (M). Le possibili cause sono riconducibili esclusivamente a 3 malattie (A_1,A_2,A_3). È noto, inoltre, che
  - $P(A_1) = 0{,}5$
  - $P(A_2) = 0{,}4$
  - $P(A_3) = 0{,}1$

  Data una certa malattia la probabilità di presentare macchie rosse è
  - $P(M|A_1) = 0{,}2$
  - $P(M|A_2) = 0{,}5$
  - $P(M|A_3) = 0{,}8$

  quale diagnosi dovrebbe formulare il medico?

64

$$P(A_1|M) = \frac{P(A_1)P(M|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(M|A_i)}$$

$$P(A_1|M) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}8} = 0{,}263$$

$$P(A_2|M) = \frac{P(A_2)P(M|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(M|A_i)}$$

$$P(A_2|M) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}8} = 0{,}526$$

$$P(A_3|M) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}8}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}8} = 0{,}210$$

Diagnosi: malattia A_2

65