LA DURATION

- $$D(0,\underline{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} T_k x_k v(0,T_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(0,T_k)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} T_k x_k (1+i)^{-T_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-T_k}}$$

- 1 solo importo T_m $\qquad D(0,\underline{x}) = T_m$
- semielasticità $\qquad \frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} D(0,\underline{x}) \qquad \frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -D(0,\underline{x})$

rendita

- $$D(0,R) = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1} \qquad D(0,R_\infty) = \frac{1+i}{i}$$

rendita perpetua

portafoglio

- $$D_p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{V(0,x_j)}{V(0,z)} D_j \qquad \frac{\alpha_1 V_1}{V_z} D_1 + \frac{\alpha_2 V_2}{V_z} D_2 = D_p$$

TCF

- $$D_{TCF} = \frac{I a_{\overline{m}|i}}{V_z} D(0,I) + \frac{C v(0,m)}{V_z} m$$

$$V_z = I a_{\overline{m}|i} + C v(0,m)$$

DUR_ES1

Sia dato un coupon bond x di valore facciale C = 100 euro, maturity di 2 anni, cedole pagabili semestralmente al tasso nominale annuo i = 3%.

Con riferimento a una struttura dei tassi di interesse a pronti su base annua data da:

i(0; 0,5) = 1,85%,

i(0; 1) = 2,35%,

i(0; 1,5) = 2,85%,

i(0; 2) = 3,20%,

determinare la duration di Macaulay del titolo x.

K		$i(0,k)$	x_k	$v(0,k)$	$x_k v(0,k)$	$T_k x_k v(0,k)$
0						
1	0.5	1.85%	1.5	$1.0185^{-0.5} = 0.9909$	1.4863	0.7432
2	1	2.35%	1.5	$1.0235^{-1} = 0.9770$	1.4656	1.4656
3	1.5	2.85%	1.5	$1.0285^{-1.5} = 0.9587$	1.4381	2.1571
4	2	3.20%	101.5	$1.032^{-2} = 0.9389$	95.3030	190.6060
					99.6930	194.9719

$$D(0, x) = \frac{194.9719}{99.6930} = 1.9557$$

DUR_ES2

Sia dato un bullet bond x_1 di valore facciale C=100 euro, maturity di 2 anni, cedole pagabili semestralmente al tasso nominale annuo i=4%.

Con riferimento a una struttura dei tassi di interesse a pronti su base annua data da:

$i(0,0.5)$ =1.80%,

$i(0,1)$ =2.25%,

$i(0,1.5)$ =3.15%,

$i(0,2)$ =3.70%,

determinare la duration di Macaulay del titolo x_1.

Indicato quindi con x il portafoglio composto da una quota α_1=1 del titolo x_1 e da una quota α_2 di uno zero coupon bond x_2 che paga 100 euro in t=1.5 anni, determinare α_2 in modo che D(0,x)=1.9 anni.

K	x_k	$i(0,k)$	$v(0,k)$	$x_k v(0,k)$	$T_k x_k v(0,k)$
0.5	2	1.80%	$1.018^{-0.5}=0.9911$	1.9822	0.9911
1	2	2.25%	$1.0225^{-1}=0.9780$	1.9560	1.9560
1.5	2	3.15%	$1.0315^{-1.5}=\boxed{0.9545}$	1.9091	2.8636
2	102	3.70	$1.037^{-2}=0.9299$	94.8512	189.7023
				100.6985	195.5131

$$D(0, x_1) = \frac{195.5131}{100.6985} = 1.9416$$

x_1

$V(0, x_1) = 100.6985$

$D(0, x_1) = 1.9416$

$\alpha_1 = 1$

x_2

$V(0, x_2) = 100 \times 0.9545 = 95.45$

$D(0, x_2) = 1.5$

α_2

$D_p = 1.9$

$$\frac{\alpha_1 V_1}{V_t} D_1 + \frac{\alpha_2 V_2}{V_t} D_2 = D_p$$

$$V_t = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$$

$$\alpha_1 V_1 D_1 + \alpha_2 V_2 D_2 = D_p V_t = D_p (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)$$

$$\alpha_1 V_1 D_1 + \alpha_2 V_2 D_2 = D_p \alpha_1 V_1 + D_p \alpha_2 V_2$$

$$\alpha_2 V_2 D_2 - D_p \alpha_2 V_2 = D_p \alpha_1 V_1 - \alpha_1 V_1 D_1$$

$$\alpha_2 \left(V_2 D_2 - V_2 D_p \right) = \alpha_1 V_1 \left(D_p - D_1 \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 V_1 \left(D_p - D_1 \right)}{V_2 \left(D_2 - D_p \right)} = \frac{1 \times 100.6985 \left(1.9 - 1.9416 \right)}{95.45 \left(1.5 - 1.9 \right)} =$$

$$= 0.1096$$

DUR_ES3

Sia dato il titolo x1 che paga un flusso di importi {12,12,12,112} ai tempi t={0.5,1,1.5,2}. Con riferimento ad una struttura dei tassi a pronti data da

i(0, 0.5) = 11.25%

i(0, 1) = 11.50%

i(0, 1.5) = 12.05%

i(0, 2) = 12.7%,

determinare la duration del titolo x1. Indicato con x il portafoglio composto da una quota α1 del titolo x1 e da una quota α2 = 3 di uno zero coupon bond x2 che paga 100 euro in t = 0.5, determinare α1 in modo che D(0,x)= 1.

K	x_k	$i(0,k)$	$v(0,k)$	$x_k\, v(0,k)$	$k\, x_k\, v(0,k)$
0.5	12	11.25%	$1.1125^{-0.5} = 0.9481$	11.3771	5.6885
1	12	11.5%	$1.115^{-1} = 0.8969$	10.7623	10.7623
1.5	12	12.05%	$1.1205^{-1.5} = 0.8431$	10.1173	15.1759
2	112	12.7%	$1.127^{-2} = 0.7873$	88.18	176.36
				120.437	207.9868 $\Rightarrow D = 1.7269$

X_1 TCF

$V(0,X_1) = 120.437$

$D(0,X_1) = 1.7269$

α_1

$\boxed{D_p = 1}$

X_2 TCN

$V(0,X_2) = 100 \times 0.9681 = 96.81$

$D(0,X_2) = 0.5$

$\alpha_2 = 3$

$$\alpha_1 \frac{V_1}{V_z} D_1 + \alpha_2 \frac{V_2 D_2}{V_z} = D_p \Rightarrow \alpha_1 V_1 D_1 + \alpha_2 V_2 D_2 = D_p V_z$$

$$V_z = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \Rightarrow \alpha_1 V_1 D_1 + \alpha_2 V_2 D_2 = D_p (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)$$

$$\alpha_1 V_1 D_1 - \alpha_1 V_1 D_p = \alpha_2 V_2 D_p - \alpha_2 V_2 D_2$$

$$\alpha_1 V_1 (D_1 - D_p) = \alpha_2 V_2 (D_p - D_2) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\alpha_2 V_2 (D_p - D_2)}{V_1 (D_1 - D_p)} =$$

$$= \frac{3 \times 96.81 \, (1 - 0.5)}{120.437 \, (1.7269 - 1)} =$$

DUR_ES5

Sia dato un titolo a cedola nulla di valore x con vita a scadenza di tre mesi. Si consideri una struttura di interesse caratterizzata da una funzione d'intensità istantanea costante $\delta = 0.06$ anni^{-1}. Si determini rispetto a tale struttura la semielasticità rispetto a δ.

$$S_\delta = \frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -D(0,x) = -0{,}25$$

$$D(0,x) = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

DUR_ES6

Sia dato un flusso di pagamenti z={50,100,50,100} relativo allo scadenzario t={1,2,3,4} anni. Si supponga che la struttura di mercato in vigore nell'istante di tempo t=0 sia:

i(0, 1) = 1.80%,

i(0, 2) = 2.25%,

i(0, 3) = 3.15%,

i(0, 4) = 3.70%.

Calcolare il valore attuale e la duration in 0 del titolo z.

Si supponga che sul mercato siano disponibili due titoli x e y con valore attuale e duration, calcolati in riferimento alla struttura data, uguali a V(0;x)=97 euro, D(0;x)=1 anno e V(0;y)=105 euro, D(0;y)=2.5 anni. Costruire un portafoglio con stesso valore attuale e duration del flusso z.

k	x_k	$i(0,k)$	$v(0,k)$	$x_k v(0,k)$	$k x_k v(0,k)$
1	50	1.8%	$1.018^{-1} = 0.9823$	49.1159	49.1159
2	100	2.25%	$1.0225^{-2} = 0.9565$	96.65	191.30
3	50	3.15%	$1.0315^{-3} = 0.9112$	45.5578	136.6733
4	100	3.7%	$1.037^{-4} = 0.8647$	86.47	345.8955
				276.795	722.9769

$D_z = 2.612$

z $\quad V(0,z) = 276.795 \qquad D(0,z) = 2.612$

x $\quad V(0,x) = 97 \qquad D(0,x) = 1$

y $\quad V(0,y) = 105 \qquad D(0,y) = 2.5$

Determinare α_x e α_y in modo che

$$\alpha_x V_x + \alpha_y V_p = V_z$$

e

$$\frac{\alpha_x V_x}{V_z} D_x + \frac{\alpha_y V_y}{V_z} D_y = D_z$$

sistema di due equazioni nelle due incognite α_x e α_y

$$\begin{cases} \alpha_x V_x + \alpha_y V_y = V_z \\ \alpha_x V_x D_x + \alpha_y V_y D_y = V_z D_p \end{cases} \qquad \begin{cases} 97\alpha_x + 105\alpha_y = 276.80 \\ 97 \times 1 \times \alpha_x + 105 \times 2.5\alpha_y = 276.80 \times 2.612 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_x = \dfrac{276.80 - 105\alpha_y}{97} \\ \cancel{97} \cdot \dfrac{276.80 - 105\alpha_y}{\cancel{97}} + 262.5\alpha_y = 723 \implies \end{cases}$$

$$276.80 - 105\alpha_y + 262.5\alpha_y = 723 \implies$$

$$\alpha_y(262.5 - 105) = 723 - 276.80$$

$$157.5\alpha_y = 446.20 \implies \alpha_y = \frac{446.20}{157.5} = 2.8330$$

$$\alpha_x = \frac{276.80 - 105 \cdot 2.8330}{97} = -0.2130$$

DUR_ES7

Sia dato un titolo a cedola fissa di valore nominale C=100 euro, cedola semestrale del 3.5% nominale annuo e vita a scadenza di 2 anni.

Si consideri una struttura di valutazione piatta, di intensità istantanea di interesse δ=0.038 anni^{-1}, calcolare:

(a) il valore attuale V e la durata media finanziaria D,

(b) la semielasticità S_δ rispetto a δ,

(c) la semielasticità S_i rispetto a i.

DUR_ES8

Sia data una operazione finanziaria $x1/t$ con $x1 = \{12.5, 10, 12.5, 235\}$, $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, dove il tempo è misurato in anni. Calcolarne la duration rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da

$i(0, 0.5) = 11.10\%$, $i(0, 1) = 11.30\%$, $i(0, 1.5) = 11.50\%$, $i(0, 2) = 11.70\%$.

Indicato poi con x il portafoglio costituito da una quota $alpha1 = 1$ del titolo $x1$ e da una quota $alpha2$ di uno z.c.b. che paga 100 euro in $t = 0.5$, determinare $alpha2$ in modo che $D(0, x) = 1$.

DUR_ES9

Sia dato un bullet bond x di valore nominale 100 euro, maturity 7 anni, cedola annuale e quotato alla pari.

Calcolare il valore attuale e la duration del titolo rispetto alla struttura piatta dei tassi di interesse determinata dal T.I.R. di x, sapendo che questo è uguale a 12.73%.

DUR_ES10

Un portafoglio obbligazionario è formato da:

a) BTP con valore di mercato 10 milioni di euro e duration 8 anni e mezzo;

b) rendite perpetue con rata annuale per un valore attuale di 6 milioni di euro;

c) BOT a 3 mesi per un valore di rimborso di 5 mln di euro.

Assumendo che la struttura per scadenza dei tassi sia piatta al tasso annuo i = 4%, si calcoli il valore V e la duration D del portafoglio.

Il portafoglio viene poi ribilanciato nel seguente modo: tutti i titoli di Stato Italiani vengono venduti ~~a~~ e al loro posto viene acquistato un valore pari a V' (incognito) titoli di Stato a cedola nulla Tedeschi a 2 anni, in modo tale che la duration complessiva del nuovo portafoglio sia di 10 anni. Si calcoli il valore V' ~~0~~ necessario a tale scopo.

BTP $\quad V_{BTP}(0) = 10 \text{ mln} \qquad D_{BTP}(0) = 8.5$

r $\quad V_r(0) = 6 \text{ mln} \qquad D_r(0) = \frac{1+i}{i} = \frac{1.04}{0.04} = 26$

BOT $\quad V_{BOT}(0) = S_{mln}(1+0.04)^{-0.25} \qquad D_{BOT}(0) = \frac{3}{12} = 0.25$

$= 4\,951\,213.68$

$$V_p = 10\,mln + 6\,mln + 4\,951\,213.68 = 20\,951\,213.68$$

$$D_p = 8.5\,\frac{10\,mln}{V_p} + 26\cdot\frac{6\,mln}{V_p} + 0.25\,\frac{4\,951\,213.68}{V_p} = 11.5620$$

$$V_z = V' + 6\,000\,000 \qquad D_{Bund} = 2$$

$$D_z = \frac{V'}{V_z} D_{Bund} + \frac{6\,000\,000}{V_z} D_2$$

$$10 = \frac{V'}{V_z}\cdot 2 + \frac{6\,000\,000}{V_z} 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot V_z = 2V' + 156\,000\,000 \Rightarrow 10\left(V' + 6\,000\,000\right) =$$
$$2V' + 156\,000\,000$$

$$10V' + 60\,000\,000 = 2V' + 156\,000\,000$$

$$10V' - 2V' = 156\,000\,000 - 60\,000\,000$$

$$8V' = 96\,000\,000 \qquad V' = \frac{96\,000\,000}{8} = 12\,000\,000$$

DUR_ES11

Una famiglia deve gestire un patrimonio di 50 000 euro e lo investe interamente in BTP con maturità di 5 anni e tasso nominale annuo del 5.5%. Assumendo che sul mercato viga una struttura per scadenza piatta al tasso $i = 6\%$, si calcoli la duration del portafoglio, esprimendola in anni.

Un consulente convince la famiglia ad abbassare il rischio dell'investimento, disinvestendo parte dei BTP (per un valore di mercato complessivo V) e acquistando con il ricavato BOT a 3 mesi, in maniera da ottenere una duration del portafoglio di 1 anno. Si calcoli il valore V necessario a tale scopo.

DUR_ES11

In un mercato in cui la struttura per scadenza è piatta al tasso annuo i = 4.36%, un investitore detiene un portafoglio del valore complessivo di 38 mln di euro, formato per il 60% del valore da rendite perpetue a rata annuale costante e per il resto da BOT a 6 mesi. Si calcoli la duration del portafoglio.

L'investitore decide poi di acquistare titoli a cedola nulla con maturità T da decidere, per un valore complessivo di 200 mln di euro. Si calcoli la maturità che deve essere fissata affinché il portafoglio complessivo dell'investitore abbia una duration di 4 anni.

DUR_ES12

La Ducktown University ha debito che consiste in una rendita trentennale con rata mensile di 1 000$. Si calcoli anzitutto il valore V e la duration D (in anni) del debito, sapendo che la struttura per scadenza dei tassi di interesse è piatta, con tasso annuo i=6%. Il direttore amministrativo vuole dimezzare la duration del debito, acquistando titoli per un importo V’. Può scegliere tra titoli a cedola nulla a un anno, titoli a cedola nulla a due anni e titoli a cedola nulla trentennali. Determinare per ciascuna dei tre TCN se è adatto allo scopo, tra quelli adatti, quale sia quello che gli fa spendere di meno e l'importo da spendere nel caso di acquisto di titoli del TCN scelto.